# *MATHÉMATIQUES I*

***Monsieur François GAUTHIER***

Dans cette épreuve, on considérait un procédé de sommation :

à une suite complexe $a$ on associait une suite $a^*$ définie par $a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ .

On se proposait dans les parties I et II de comparer la nature des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ ainsi que leur somme en cas de convergence.

La partie III était consacrée à l'étude de diverses fonctions avec une application du procédé de sommation.

Le sujet permettait de se faire une idée sur le degré de connaissance et le niveau de compréhension de quelques notions importantes de l'analyse, il permettait ainsi de juger de l'aptitude à concevoir une hypothèse puis à effectuer une démonstration rigoureuse par récurrence.

Les trois parties pouvaient être abordées et l'ont été assez largement.

**PARTIE I**

Dans cette partie, on étudiait le cas des suites constantes et des suites géométriques. Cette partie, sans difficulté apparente (sauf peut-être la question I.2.3.3), a pourtant gêné les candidats les plus fragiles :

- dans la question I1.1 des candidats, en nombre non négligeable, ne reconnaissent pas la formule du binôme qui fait pourtant partie des rappels en début d'énoncé.

- à voir l'extrême difficulté rencontrée pour obtenir la divergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$ lorsque $a_n = \alpha \neq 0$ ou bien lorsque $a_n = z^n$ avec $|z| = 1$, il est clair que l'implication $a_n$ ne tend pas vers zéro $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge n'arrive pas de suite dans beaucoup d'esprit.

- Les séries géométriques sont traitées de façon très approximative.

- Une autre remarque importante concerne l'utilisation des nombres complexes ; voici quelques exemples :

« la partie réelle de $(a+ib)^n$ est $a^n$ »

« $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$ donc $-1 < z < 1$ et $0 < \frac{1+z}{2} < 1$ »

dernier exemple (souvent lu) :

« si $z = e^{i\theta}$ avec $0 < |\theta| < \pi$ alors $\left|\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right| \leq \frac{1}{2} + \left|\frac{e^{i\theta}}{2}\right| < 1$ car $0 < |\theta| < \pi \Rightarrow \left|e^{i\theta}\right| < 1$ »

**PARTIE II**

Le but de cette partie était d'établir que la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ entraînait celle de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et que $S^* = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2S$ (avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ).
La première question permet de constater que la notion d'équivalent est très vague chez les candidats, le maniement des symboles $\sim$, $o$ et 0 est fait sans discernement et l'utilisation de la formule de Stirling n'arrange rien :
On lit couramment :
«lorsque $n \to +\infty$ alors $n! \sim (n-k)!$ donc $\binom{n}{k} \sim \frac{1}{k!}$ ».
Concernant la question II.1.3 où l'on prouve que (lorsque $n \to +\infty$) $a_n \to 0 \;\Rightarrow\; a_n^* \to 0$, les correcteurs ont été assez surpris par de nombreuses copies dans lesquelles la démonstration assez fine ( type « Cesaro ») était assez correcte alors que d'autres questions beaucoup plus simples étaient mal résolues.
Pour la comparaison des convergences des deux séries (II.2) il faut féliciter les bons candidats qui font une démonstration par récurrence claire et correcte, se distinguant de ceux ayant deviné la bonne expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ et qui n'hésitent pas à conclure cqfd après un calcul n'ayant aucune chance d'aboutir.

**PARTIE III**

Une des principales remarques sur cette partie concerne les séries entières :
En dehors de ceux qui ne reconnaissent pas les séries entières et de ceux par lesquels « série entière = polynôme » beaucoup de candidats n'ont pas compris que lorsqu'ils ont trouvé le rayon de convergence ils ont immédiatement (d'après le cours !!) le caractère $C^{\infty}$ de la somme, si bien qu'ils repartent dans une étude de série de fonctions avec souvent des affirmations fausses, par exemple :
« si $R$ est le rayon de convergence, la série entière converge normalement sur $]-R, R[$ ».
Concernant III.1, nombreux sont ceux qui ayant obtenu la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$, puis ayant trouvé (un peu trop vite) que $e^{-x} f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, poursuivent sans être étonnés du résultat !!

Pour III.2 en dehors des difficultés pour obtenir le caractère $C^{1}$ de $g$, les candidats arrivent assez souvent à la relation $(R)$ $g' - g = f$, mais lorsqu'ils veulent établir l'expression intégrale de $g$, beaucoup se contentent de vérifier que ladite expression intégrale vérifie la relation $(R)$, dans leur esprit une équation différentielle du premier ordre comme $(R)$ (sans condition initiale) doit avoir une solution unique.

L'étude de la fonction $F$ (III.3), qui semblait un peu plus délicate, a pourtant reçu d'assez bonnes réponses, en revanche la pratique désastreuse des équivalents est confirmée dans III.4.1 :

« $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ (lorsque $k \to +\infty$ )».

De façon plus globale, les correcteurs ont été surpris par le nombre important de candidats qui connaissent des résultats que l'on peut qualifier de secondaires, qui utilisent par moment, des techniques très fines et sont capables de rédiger de manière correcte une démonstration du type «  Cesaro » mais qui sont dans le même temps ignorant de notions fondamentales comme les séries entières ou la structure d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; ce type de candidat peut affirmer qu'une somme (infinie) de fonctions continue est continue.

Nous souhaiterions que ces candidats qui ont des connaissances et ils le prouvent puissent mettre  davantage en évidence  leur qualité grâce à de la réflexion et du raisonnement.