



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

But du problème

Dans la partie I, on étudie les solutions d'une équation différentielle

$$(E) \quad y'' - \alpha y = f(x),$$

solutions vérifiant en outre des conditions aux limites.

Dans la partie II, on introduit une fonction K de deux variables, fonction qui est définie comme somme d'une série.

Dans la partie III, à chaque fonction f continue impaire 2π -périodique sur $\mathbf{R}$, on associe une fonction h grâce à la relation

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) f(t) dt$$

et on étudie quelques propriétés de la fonction ainsi obtenue.

PARTIE I

Lorsque $p \in \mathbf{N}$, on désigne par $\mathcal{L}^p([0, \pi], \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{L}^p$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$.

Lorsque $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{L}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - \alpha y = f(x).$$

On désigne par :

- $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions réelles sur l'intervalle $[0, \pi]$ de l'équation différentielle (E) ;
- $\mathcal{S}^0(E)$ l'ensemble des fonctions F appartenant à $\mathcal{S}(E)$ et vérifiant en outre :

$$F(0) = F(\pi) = 0.$$

I.1/ On suppose, dans cette question, que f est la fonction nulle.

I.1.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ lorsque $\alpha = 0$.

Tournez la page S.V.P.

I.1.2/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ (selon la valeur de $\omega \in \mathbf{R}_+^*$)

I.1.2.1/ lorsque $\alpha = \omega^2$,

I.1.2.2/ lorsque $\alpha = -\omega^2$.

I.2./ On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$.

I.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$

I.2.1.1/ lorsque $f(x) = \cos x$,

I.2.1.2/ lorsque $f(x) = \sin(nx)$ (où n désigne un entier naturel non nul fixé).

I.2.2/ On suppose que $f(x) = |\cos x|$.

I.2.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}(E)$.

I.2.2.2/ Montrer que $\mathcal{S}^0(E)$ contient un seul élément, (seule fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi]$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$; $F''(x) = |\cos x|$ et $F(0) = F(\pi) = 0$) ; expliciter $F(x)$ et indiquer l'allure de son graphe.

I.3/ On suppose toujours que $\alpha = 0$ et on désigne par f une fonction quelconque appartenant à $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$.

Montrer que $F \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait :

$$F(x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du + Ax + B.$$

En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ contient un seul élément que l'on notera F_1 .

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ l'application de $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ dans lui même qui à f associe l'élément F_1 , unique solution sur l'intervalle $[0, \pi]$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = f(x) \\ \text{vérifiant en outre } y(0) = y(\pi) = 0.$$

I.4/ Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$.

I.5/ L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

I.6/ Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ .

I.7/ Pour tout $x \in [0, \pi]$ on désigne par T_x l'ensemble des couples $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ tels que $0 \leq t \leq u \leq x$.

I.7.1/ Représenter l'ensemble T_x dans le plan euclidien pour un x fixé, ($0 < x < \pi$).

I.7.2/ Justifier les égalités suivantes, pour $x \in [0, \pi]$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$:

$$\iint_{T_x} f(t) \, du \, dt = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) \, dt \right] du = \int_0^x (x-t) f(t) \, dt.$$

I.7.3/ Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ et $F_1 = \varphi(f)$.

I.7.3.1/ Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbf{R}$ (β que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt + \beta x \int_0^\pi (\pi-t) f(t) dt$.

I.7.3.2/ En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ (γ que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \gamma \left[\int_0^x t(\pi-x) f(t) dt + \int_x^\pi x(\pi-t) f(t) dt \right]$.

PARTIE II.

Etude d'une fonction de deux variables

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on note $K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(ny)}{n^2}$, lorsque la série converge.

II.1/ Montrer que la fonction K est définie sur $\mathbf{R}^2$.

II.2/ Soit y un réel fixé, étudier la continuité de l'application $x \mapsto K(x, y)$.

II.3/ Développement en série de Fourier d'une fonction E_x .

On considère un nombre réel x fixé, $x \in [0, \pi]$ et on désigne par E_x l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ 2π -périodique et impaire, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$E_x(t) = t(\pi-x) \text{ lorsque } 0 \leq t \leq x$$

et

$$E_x(t) = x(\pi-t) \text{ lorsque } x \leq t \leq \pi.$$

II.3.1/ Indiquer l'allure du graphe de $t \mapsto E_x(t)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (pour un x fixé, $x \in]0, \pi[$) ; justifier la convergence de la série de Fourier réelle de E_x et préciser sa somme.

(Rappel : la série de Fourier réelle de E_x est : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$)

$$\text{où } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) \sin(nt) dt$$

sont les coefficients de Fourier réels de E_x).

II.3.2/ Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction E_x .

II.3.3/ Exprimer $K(x, t)$ en fonction de $E_x(t)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, \pi]$.

II.4/ On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$:

le carré C ensemble des couples $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$,

le triangle U ensemble des couples $(x, t) \in C$ tels que $0 < t < x < \pi$,

le triangle $\bar{U}$ ensemble des couples $(x, t) \in C$ tels que $0 \leq t \leq x \leq \pi$.

II.4.1/ Déduire de II.3.3 l'existence d'un minimum et d'un maximum pour la fonction K sur le carré C et préciser la valeur du minimum.

II.4.2/ La fonction K possède-t-elle un maximum relatif sur le triangle U ?

Tournez la page S.V.P.

II.4.3/ Etudier les extremums de la fonction K sur l'ensemble $\overline{U} \setminus U$ (bords du triangle de $\overline{U}$).

II.4.4/ En déduire la valeur du maximum de K sur le carré C .

II.4.5/ Si $\delta \in \mathbf{R}$ on note Γ_δ l'ensemble des $(x,t) \in C$ tels que $K(x,t) = \delta$,
(Γ_δ est la ligne de niveau δ).

Représenter (sur un même croquis) l'ensemble C , Γ_0 et la ligne Γ_δ passant par le point $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

PARTIE III

Dans cette partie on désigne par :

- $\mathcal{J}_{2\pi}$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications continues, impaires 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- K la fonction introduite dans la partie II $\left(K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(ny)}{n^2} \right)$.

A toute fonction f appartenant à $\mathcal{J}_{2\pi}$ on associe la fonction $h = \psi(f)$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) f(t) dt.$$

III.1/ Vérifier que si $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ et si $h = \psi(f)$ alors la fonction h est impaire, 2π -périodique.
Justifier l'égalité

$$h(x) = 2 \int_0^{\pi} K(x, t) f(t) dt.$$

III.2/ Déduire de II.3.3 et de la partie I que si $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ alors les fonctions $h = \psi(f)$ et $F_1 = \varphi(f)$ sont proportionnelles sur $[0, \pi]$; en déduire que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[$ et qu'elle vérifie les relations :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in]0, \pi[\\ h''(x) = -\pi f(x) \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases}$$

III.3/ En utilisant (en particulier) l'impairité de f et de h , montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite de cette partie, pour chaque application g 2π -périodique, continue par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on désigne par $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier réels de g :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N} : a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt.$$

Soient désormais $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ et $h = \psi(f)$.

III.4/ Etablir une relation entre $b_n(h)$ et $b_n(h'')$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

III.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (b_n(f))^2$ (respectivement $\sum_{n \geq 1} \frac{(b_n(f))^2}{n^4}$) et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n(f))^2$ (respectivement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b_n(f))^2}{n^4}$) en fonction d'une intégrale.

III.6/ Etablir l'inégalité :

$$\int_0^\pi (h(x))^2 dx \leq \pi^2 \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

III.7/ Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / -\pi \leq x \leq \pi \text{ et } -\pi \leq y \leq \pi\}$. On considère l'intégrale double :

$$J(f) = \iint_D K(x, y) f(x) f(y) dx dy.$$

III.7.1/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x) h(x) dx$.

III.7.2/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi (h'(x))^2 dx$.

III.7.3/ Montrer que :

$$0 \leq J(f) \leq 2\pi \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

III.7.4/ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ telles que :

$$J(f) = 2\pi \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

Fin de l'énoncé