



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

1.a) Présentation du sujet

Le sujet se proposait d'étudier des conditions liées à l'existence d'un vecteur propre commun à deux matrices A et B , et de donner une application de cette existence.

La **partie I** étudiait la problématique dans un cas simple où les calculs étaient très largement guidés et devaient pouvoir se faire en une trentaine de minutes.

La **partie II** abordait de façon plus théorique la recherche d'une condition nécessaire, puis de conditions suffisantes pour admettre un vecteur propre commun. Le découpage des questions de cette partie était suffisamment fin pour que beaucoup de questions puissent être abordées en admettant les questions précédentes. Les problèmes abordés dans cette partie relevaient bien souvent de techniques très proches de celles vues dans le programme de PC (stabilité de sous-espaces propres ou d'ensembles-image sous certaines conditions, existence d'une valeur propre complexe dans le cas scindé, inclusions entre ensemble, etc).

La **partie III** étudiait en profondeur un exemple simple issu des espaces vectoriels de polynômes. Cela permettait d'illustrer le caractère relatif des conditions apparues dans la partie II.

La **partie IV** étudiait de façon quasi-indépendante des parties précédentes des endomorphismes sur l'espace des matrices antisymétriques. Les questions donnaient souvent lieu à des calculs simples relevant de techniques utilisées en algèbre bilinéaire.

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer chez les candidats la connaissance du cours, la qualité du raisonnement ainsi que l'efficacité. La longueur relative du sujet était justement un point important d'évaluation de l'efficacité des candidats. Aucune question à elle seule ne nécessitait un raisonnement combinant plusieurs idées fines et originales.

1.b) Problèmes constatés par les correcteurs

Les correcteurs de cette épreuve ont constaté d'une part que le soin et la présentation globale des copies étaient bons et d'autre part que les copies très faibles étaient peu nombreuses.

En revanche, beaucoup de correcteurs soulignent que les qualités de raisonnement et de rédaction ont encore régressé. Un grand nombre de candidats emploient un vocabulaire approximatif difficilement compatible avec la rigueur exigée.

La connaissance du cours et sa restitution correcte dans un cadre particulier semble poser désormais de nombreux problèmes. Concernant l'efficacité, on constate que trop de candidats font le choix de méthodes de calcul et de raisonnements inutilement longs, perdant ainsi un temps précieux. Tout au contraire, une petite minorité de candidats calcule, raisonne et rédige de façon juste, concise et synthétique, qualités toujours très appréciées des correcteurs.

L'orthographe est correcte dans l'ensemble sauf pour quelques rares candidats qui se refusent à toute accentuation.

La longueur de l'épreuve ne s'est pas avérée pénalisante même si les candidats ayant bien traité l'ensemble du sujet se sont fait plus rares cette année (moins de 5 %).

La partie I a été très bien réussie par tous mais elle a dû prendre trop de temps à certains candidats.

La partie II a été abordée de façon parcellaire et a engendré de nombreux problèmes de raisonnement.

La partie III a été, quant à elle, largement abordée dans son ensemble avec quelques difficultés ponctuelles de rédaction.

La question IV.1. et les questions à partir de IV.3.c. ont été rarement traitées. Les autres questions de cette partie IV ont permis en revanche à une moitié de candidats de valider des calculs en général assez formels.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I

I.1.a. Très bien réussie.

I.1.b. Une réussite très relative pour une question qui ne nécessitait guère de calculs savants. Les vecteurs étant donnés explicitement, le caractère “vecteurs propres” se faisait par un calcul direct quand bien même plus de la moitié des candidats cherche une famille génératrice de chaque sous-espace propre. En revanche, la perte de temps précieux ainsi occasionnée ne doit pas pour autant servir d'alibi pour “parachuter” sans vérification détaillée le fait que la famille est libre. Par ailleurs, l'argument sur le cardinal de la famille n'apparaissait plus que dans moins de la moitié des cas. On signale ici que cela n'a pas de sens de parler de la “dimension d'une famille”.

I.1.c. Cette question pouvait être traitée de plusieurs manières dont deux manières très rapides : A est symétrique réelle ou existence d'une base de vecteurs de propres. Malheureusement, la majorité des candidats ont choisi de comparer la dimension des sous-espaces propres aux multiplicités des valeurs propres. Quelques-uns semblaient croire que pour être diagonalisable, une matrice devait nécessairement posséder un polynôme caractéristique scindé à racines simples. Bon taux de réussite tout de même mais une perte importante de temps.

I.1.d. Très bien réussie.

I.2.a. Très bien réussie.

I.2.b. La question a souvent été traitée en commençant par $E_2(B)$ (ce qui évite l'usage du théorème du rang). Le lien entre l'image d'une matrice et ses colonnes n'est pas toujours connu. En revenant à la définition de l'image, les candidats montraient alors souvent une inclusion sans justifier pleinement l'égalité entre ensembles.

I.2.c. Bien réussie.

I.3.a. Seulement une moitié des candidats a réussi pleinement à montrer l'égalité entre les deux ensembles alors que tous prétendent avoir l'égalité...

I.3.b. Question la moins bien réussie de la partie. Moins d'un tiers des candidats justifiait le fait que $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$. Très nombreuses confusions entre $\{0\}$ et l'ensemble vide qui

apportaient le doute dans l'esprit du correcteur. Des difficultés à gérer la condition de non nullité des vecteurs propres dans l'écriture de l'ensemble des solutions.

I.4.a. Très bien réussie.

I.4.b. Question souvent bâclée pour gagner du temps. Des conditions “fantaisistes” pour que deux matrices soient semblables. Le polynôme caractéristique de C souvent donné sans justification sous forme factorisée $-X(X - 6)(X + 6)$ afin “d'arranger” les calculs.

Partie II

II.1.a. Bien réussie.

II.1.b. Le théorème du rang était bien souvent utilisé mais son écriture pour une matrice A à la place d'une application linéaire f faisait apparaître de grandes confusions. Certains candidats ont fait intervenir $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et obtenaient suivant les cas (ou les besoins) n ou n^2 . Il y a aussi ceux qui parlaient du rang de A non pas pour la dimension de son image, mais bien pour le nombre de colonnes de la matrice. Que penser alors de la “dimension de A ” qui ajoutait aussi à la confusion générale ?

II.2. Moyennement réussie. Sans même tenir compte de l'argument d'existence de λ qui sera surtout évalué en 3.b, l'équivalence entre “matrice nulle” et “noyau égal à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ” ne semblait pas couler de source. Le candidat se lançait alors dans le calcul et n'en ressortait pas toujours indemne.

II.3.a. Même si ce n'était pas très difficile, on s'attendait bien sûr à voir comment le candidat montrait la linéarité de ψ . La stabilité de $E_\lambda(A)$ par ψ était très proche d'un résultat du cours, quand les deux matrices commutent. Malgré cela, la réussite a été très moyenne.

II.3.b. Très mal réussie. Les correcteurs s'attendaient à voir intervenir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et le fait que $E_\lambda(A)$ était de dimension au moins 1. Aucun de ces arguments n'a été donné en général.

II.4. Question souvent abordée mais mal réussie : la forme d'un endomorphisme en dimension 1 ne semblait pas claire aux yeux de plus de 80 % des candidats. Beaucoup de malhonnêtetés intellectuelles dans la résolution de cette question.

II.5.a. De très gros problèmes de logiques encore ici. Plus de la moitié des candidats était persuadée que la propriété $Cu \neq 0$ était conséquence de $u \neq 0$ et $\text{rg}(C) = 1$.

II.5.b. Les correcteurs attendaient simplement des candidats qu'ils constatent que (Cu) était bien une famille libre de $\text{Im}(C)$ de cardinal 1. Au lieu de cela, un certain nombre de candidats décidait d'écrire $\text{Im}(C) = \{Cu \mid u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \text{Vect}(Cu)$.

II.5.c. Mieux réussie à partir de la définition de l'image.

II.5.d. Bien réussie.

II.5.e. Les deux égalités ont bien été démontrées mais la stabilité de $\text{Im}_\lambda(A)$ a posé de nombreux problèmes d'écriture, y compris pour ϕ .

II.5.f. et 6. Questions de synthèse assez peu abordées.

Partie III

III.1. Très bien réussie.

III.2. La linéarité de g méritait d'être détaillée, à défaut de celle de f ainsi que la stabilité de E par g .

III.3.a. Question souvent abordée, mais avec une réussite assez mitigée. Dans un cas sur deux, on pensait à raisonner par l'absurde, mais ce n'était que dans la moitié de ces cas que le raisonnement aboutissait clairement à une contradiction avec la non nullité du vecteur propre. Beaucoup de copies donnaient seulement l'impression d'y arriver...

III.3.b. Très bonne réussite pour la relation $g(X^n) = \lambda X^n$ avec $\lambda = 1$. La non nullité du vecteur propre encore et toujours oubliée.

III.4.a. Une double inclusion était encore nécessaire ici. Un argument par récurrence permettait par exemple de justifier l'inclusion la plus délicate. Beaucoup d'approximations et de longueurs dans la rédaction de cette question.

III.4.b. A nouveau une double inclusion. L'inclusion $\{0\} \subset \text{Sp}(f^i)$ a été souvent bâclée. L'inclusion inverse faisait appel au degré mais la non nullité du vecteur propre a encore été oubliée, rendant le raisonnement incomplet.

III.5. Un raisonnement en deux temps nécessitant un minimum d'esprit de synthèse par rapport aux questions précédentes : malheureusement très mal réussie.

III.6. La question a permis à beaucoup de candidats de reprendre pied dans cette partie. En revanche, de nombreuses erreurs de décalage d'indice ont rendu l'écriture de A_n fausse.

III.7.a. Très bien réussie et assez souvent abordée.

III.7.b. Après plusieurs calculs, au moins l'un des deux résultats demandés finissait par être faux dans près de la moitié des cas. Il s'agissait souvent d'une erreur d'inattention dans le calcul de la différence de deux matrices, ou encore des confusions sur la valeur du rang dans des cas simples.

III.7.c. Une question de synthèse très peu abordée.

Partie IV

IV.1. La question, qui ne se voulait pas difficile, a été très peu abordée, peut-être à cause du fait qu'il fallait prendre l'initiative de faire plusieurs cas. Beaucoup de candidats semblaient persuadés (peut-être à cause de la dimension 1) qu'une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie est figée, à une proportionnalité près.

IV.2.a. Souvent abordée, avec encore des confusions entre l'ensemble vide et $\{0\}$. Un exemple simple de matrice antisymétrique non nulle n'a été vu que dans moins de la moitié des cas.

IV.2.b. Une petit moitié de candidat savait clairement que la diagonale d'une matrice antisymétrique était constituée exclusivement de 0 et n'ont eu aucun mal à le démontrer.

IV.2.c. La linéarité a souvent été seulement esquissée, mais la stabilité a été mieux réussie.

IV.2.d. Des confusions très embarrassantes entre $\phi \circ \psi$, $\phi \circ \psi(M)$ et parfois encore $\phi(M)\psi(M)$ voire $\phi(M) \circ \psi(M)$.

IV.3.a. Les sous-questions i), iii) et iv) ont été bien traitées par les candidats qui les ont abordées. La sous-question ii) a été l'occasion de lire beaucoup d'énormités et a finalement été montrée correctement par très peu de personnes.

IV.3.b. à IV.4.g. Ces questions ont été abordées dans moins de 5 % des cas certainement par manque de temps et n'ont pas posé de problème dans ce cas.