

Frédéric GACHET

Docteur agrégé, professeur au lycée Carnot de Dijon

I.— Remarques générales sur l'épreuve.

1.— Présentation du sujet.

L'épreuve de cette année portait sur les deux droites des moindres carrés d'un ensemble de points et leurs éventuelles propriétés d'être sécantes ou orthogonales. Chacune de ces deux droites s'obtient en minimisant une certaine distance obtenue à l'aide d'une projection verticale ou horizontale.

Ce problème était étudié sur un exemple très simple dans la **partie I**.

La situation géométrique était très largement formalisée dans cette première partie et les questions étaient suffisamment détaillées pour qu'une très grande majorité des candidats réussisse à comprendre les enjeux du problème sur ce cas simple.

La **partie II** étudiait une situation de distance d'un point à un sous-espace vectoriel F dans un espace préhilbertien réel. Après quelques rappels de cours, généralités et introduction des notations adaptées, le cas particulier " F de dimension 2" donnait lieu à deux droites d'équation réduite " $\frac{y-m_y}{\sigma_y} = \rho \cdot \frac{x-m_x}{\sigma_x}$ " et " $\frac{x-m_x}{\sigma_x} = \rho \cdot \frac{y-m_y}{\sigma_y}$ ". On obtenait alors naturellement le point d'intersection de ces droites à l'aide du produit scalaire et d'un vecteur quelconque \mathbf{u} normé.

Certaines des questions de cette partie nécessitaient une bonne connaissance du cours ainsi qu'une bonne maîtrise technique et logique dans un cadre assez abstrait. En revanche, les résultats intermédiaires étaient très souvent explicités afin qu'une question non résolue ne bloque pas la résolution des questions suivantes.

La **partie III** posait le problème, dans le cadre d'un espace euclidien, d'adapter, en un sens précis, une base au produit scalaire.

Cette partie donnait l'occasion aux candidats d'effectuer des réductions de matrices symétriques en base orthonormale et de répondre à divers problèmes liés à des familles orthogonales ou orthonormales. Une connaissance raisonnable du cours d'algèbre bilinéaire et une maîtrise technique et logique dans plusieurs cadres concrets étaient suffisantes pour réussir cette partie. En revanche, la situation de cette partie exigeait que le produit scalaire donné dans l'espace euclidien ne soit pas "canonique" contrairement aux situations plus habituelles.

La **partie IV** faisait le lien avec les deux parties précédentes et permettait de résoudre le problème général des deux droites des moindres carrés pour n points non alignés : ces deux droites se coupaient en un unique point correspondant à l'isobarycentre des n points avec une certaine condition pour avoir l'orthogonalité.

Cette partie ne devait donner lieu essentiellement qu'à des questions de cours et des questions de synthèse des parties précédentes. Il suffisait ici de citer les questions qui s'appliquaient en vérifiant rapidement que les hypothèses.

Le **problème** conduisait à un résultat "classique" qui n'est pas au programme de PC. La résolution la plus simple de ce problème pouvait se faire plus rapidement par l'étude du minimum de deux fonctions de deux variables. Le point de vue choisi ici a été d'obtenir le résultat par une méthode à la fois plus indirecte et plus "naturelle" pouvant donner lieu à

d'autres généralisations (par exemple : la famille de droites de moindres carrés obtenues par projection dans une direction quelconque qui se coupent encore en l'isobarycentre).

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer les diverses aptitudes des candidats à la connaissance et la maîtrise du cours, des techniques investies dans le cours, de la logique et de raisonnements simples et largement guidés dans des situations particulières (exemples directs, cadre abstrait et cadre concret). La longueur du sujet, même si elle a pu paraître décourageante, devait initialement laisser plus de possibilités aux candidats de montrer l'étendue de leur savoir-faire, même en cas de blocage sur la partie II.

2.— Problèmes constatés par les correcteurs.

Avec une moyenne générale de 9,79 en PC-CH et de 9,86 en PC-PH, la tendance est restée sensiblement stable par rapport à la session précédente. Etant donné la relative facilité du sujet, il semble que le niveau global attendu pour cette épreuve en terme de connaissance du cours, de logique, de savoir-faire et de rédaction ne soit pas toujours au rendez-vous. En revanche, la présentation des copies est encore très bonne cette année, ce qui a permis de relever les notes d'une très grande majorité de candidats.

Contrairement aux années précédentes, très peu de copies n'ont pas abordé la partie I dans son ensemble. La partie II a souvent posé des problèmes dès le début alors que la fin de la partie II, quand elle était traitée, était plutôt mieux réussie. La partie III a souvent souffert de manque de temps et surtout de manque de compréhension. La partie IV, y compris les premières questions, a été très peu traitée.

Un certain pourcentage des candidats a pu globalement avoir l'impression de faire le tour complet du problème en traitant les trois premières parties et le début de la dernière partie. Malheureusement, les défauts de rédaction ou de compréhension, dans ce cas, n'ont que très rarement apporté le nombre maximum de points. Manifestement, les candidats de la session 2011 se sont investis dans le sujet, mais la maîtrise des notions centrales du programme d'algèbre et de géométrie de première et deuxième années de PC ainsi que la maîtrise même du langage mathématique (logique, concision, rigueur, savoir calculer,...) est jugée encore trop insuffisante par les correcteurs.

II.— Remarques détaillées sur chaque question de l'épreuve.

I.1. Abordée systématiquement, cette question a donné lieu à toutes sortes de raisonnements dont beaucoup se sont avérés faux dans le détail :

- confusion entre point et vecteur ;
- confusion entre produit scalaire, produit vectoriel et déterminant ;
- étude de la condition $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ sans précaution sur le cas $A = C$.

I.2.a. Le résultat étant donné, l'obtention des points nécessitait un minimum de détails. On constate alors que pour beaucoup de candidats, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$!

I.2.b. Bien réussie.

I.2.c. La notion de minimum global d'une fonction est très mal comprise. Il s'agit pourtant, notamment, d'une notion centrale du chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Plus de la moitié des candidats se contente de montrer que la fonction admet un unique point critique.

I.3.a. Bien réussie (on n'a pas pénalisé à nouveau ceux qui se trompent de signe dans le vecteur $\overrightarrow{p_{a,b}(A)\vec{A}}$).

I.3.b. Le résultat étant donné, il suffisait de développer des termes du type $(a + b + c)^2$ ce qui n'a pas toujours été fait correctement.

I.3.c. Comme pour I.2.c., si bien que la localisation du point (a_1, b_1) n'a pas souvent posé problème, ce qui a permis malgré tout de faire la question suivante.

I.4. Une très grande majorité arrive ici avec deux équations de droites du type " $y = 1/2$ " et " $x = \alpha/3$ ". Seulement une minorité arrivera à engranger tous les points de la question. Pour beaucoup, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation " $y = 1/2$ " et l'isobarycentre est un mystère du programme de terminale S.

II.1. Le cours pose bien des problèmes. La propriété " F et F^\perp sont supplémentaires dans E " n'est bien souvent citée que si E est de dimension finie, puis utilisée après dans le cadre de la dimension infinie. La distinction de ce point du programme s'avère pourtant essentielle pour l'application aux séries de Fourier notamment.

II.2. Une démonstration à savoir refaire dans un sujet de concours et qui, de plus, illustre parfaitement la notion de minimum et le théorème de Pythagore. Et pourtant, moins de 20 % des candidats savent commencer la démonstration par le théorème de Pythagore correctement écrit. Combien finissent la démonstration parfaitement ?

II.3.a. Essentiellement la première question à rédiger correctement en faisant intervenir les propriétés i) à iv) : beaucoup font du produit subordonné un produit scalaire.

II.3.b. Etonnement très mal réussie. La question II.3.a. utilisée directement comme une preuve d'existence... L'unicité semble souvent impliquer l'existence.

II.4. La question pouvait être traitée de deux façons différentes :

- en utilisant l'expression de II.3.a. pour le produit subordonné et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (raisonnement le plus courant) ;
- en refaisant la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec un polynôme de discriminant négatif.

Le cas d'égalité a été très mal réussi. Il est vrai que la question était une des rares questions laissées ouvertes.

II.5.a. Une question qui paraît si évidente et qui n'a été réussie correctement que très rarement :

- les candidats norment un vecteur quelconque de E sans précaution de non-nullité du vecteur ;
- les candidats évoquent l'existence d'une base orthonormée de E sans précaution sur le fait que le cardinal de cette base est au moins 1 car E est de dimension au moins 1.

II.5.b. La formule étant donnée, beaucoup partent sur la justification "à tout prix" de la formule du projeté orthogonal sans utiliser le caractère orthonormal de la base.

II.5.c. Première formule bien réussie et deuxième formule souvent obtenue à l'aide d'un hypothétique $(\mathbf{x}|p_D(\mathbf{y})) = 0$.

II.6. Bien réussie.

II.7.a. Les deux premières formules ont bien été obtenues. $|\rho| \leq 1$ aussi, mais combien en concluent que $\rho \in]-1, 1[$ plutôt que d'admettre le résultat avec les inégalités strictes...

II.7.b et c. Assez bien réussies.

II.7.d, e, f. et 8. Calculs avec résultats intermédiaires obtenus à 40 % par les candidats qui les ont traités. Trop de calculs erronés qui donnent quand même le bon résultat avec le risque de discréditer toutes les questions traitées.

II.9. et II.10. Questions bien traitées et souvent avec intelligence (il était inutile de redétailler tous les calculs pour avoir les points).

II.11. Quand elle est traitée, cette question simple de résolution d'un système linéaire de deux équations à 2 inconnues ne donne que rarement des points car la condition $\rho^2 \neq 1$ n'apparaît presque jamais.

II.12. Bien traitée mais par moins de 10 % des candidats.

III.1. Ce calcul de base qui doit figurer en bonne position dans tout cours de deuxième année n'est pas maîtrisé par plus de la moitié des candidats.

III.2.a. La symétrie a été bien vue. La propriété du spectre d'une telle matrice (un problème très classique) est moins bien réussie que les années précédentes.

III.2.b. Des confusions entre famille orthogonale et famille orthonormale. On note aussi une mauvaise compréhension de la notion de matrice associée à une base, qui a été confondue parfois avec celle de représentation matricielle d'un endomorphisme dans une base, dans cette question comme dans les suivantes.

III.3. Très rarement réussie à partir du moment où le candidat essaie de persuader le correcteur que $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ donne toujours "pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = b_i$ ".

III.4.a. Une question du cours de première année qui fait chuter la moitié des candidats.

III.4.b. Pas de problème pour ceux qui ont répondu à la question III.4.a. correctement.

III.4.c. et d. Confusions entre "orthogonale" et "orthonormale". La terminologie de matrice orthogonale n'y est pas pour rien.

III.5. Très mal réussie.

III.6.a. La question a semblé souffrir de sa position dans le problème. Rien de compliqué et pourtant l'orthonormalisation des bases est souvent oubliée ou les valeurs propres sont erronées.

III.6.b. Le lien avec la question du spectre inclus dans \mathbb{R}_+^* est très rare si bien que beaucoup pensent que M_2 est effectivement associée à une base.

III.7.a. L'orthogonalisation au sein du sous-espace propre de dimension 2 a été oubliée quasi-systématiquement. Quelques candidats brillants pensent au produit vectoriel et gagnent en plus beaucoup de temps.

III.7.b. Jamais réussie parfaitement.

III.8. Les candidats s'abandonnent au calcul... Perte de temps et résultat non garanti. Moins de 10 % pensent à la trace ou montrent qu'un élément diagonal d'une matrice associée ne peut pas être nul.

III.9.a, b, c, d et e. Questions peu traitées bien que largement indépendantes de ce qui précède.

IV.1. A nouveau du cours qui met encore les candidats en difficulté...

IV.2. Très peu de candidats pour dire en une ou deux lignes que les résultats des parties précédentes s'appliquent.

IV.3. Parfois traitée mais quasiment jamais réussie.

IV.4. Quelques candidats s'y essaient et y arrivent quand même.

IV.5.a, b et c. Très rare.

IV.5.d. Rarissime et pourtant faisable sans utiliser les questions précédentes.