

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1 - SESSION 2010

Jean-François GROSJEAN
Maître de Conférences à l'Université de Nancy I

Présentation du sujet

L'objectif de l'épreuve est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$ des racines carrées de f . Cette étude se fait de manière progressive quant au niveau de difficulté. Le sujet est divisé en quatre parties. Voici une brève présentation du contenu de ces parties.

La partie I est très classique et calculatoire, largement abordable par un candidat ayant assimilé les techniques classiques d'algèbre linéaire : recherche de valeurs propres, de vecteurs propres, de puissance de matrices, calculs de composés d'endomorphismes. Cette partie traite deux exemples dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$. La partie A) se termine par la détermination des différentes racines carrées de la matrice réduite précédemment. La partie B) propose d'aborder la même question sur une autre matrice qui n'admet cette fois-ci que deux valeurs propres distinctes au lieu de trois. Plusieurs questions permettent de valoriser les candidats sur des calculs directs de réduction de matrice d'ordre 3.

Dans la deuxième partie, E est cette fois-ci de dimension quelconque $n \geq 2$. On considère un endomorphisme f qui satisfait certaines conditions. En particulier f est combinaison linéaire de deux endomorphismes p et q . Cette partie demande un peu plus de raisonnement, mais le candidat est encore ici largement guidé vers la solution par des questions assez simples mais assez imbriquées. Le but de cette partie est de montrer que p et q sont des projecteurs, de décrire l'espace F de toutes les racines carrées qui s'écrivent comme combinaison linéaire de p et q et de comparer F et $\mathcal{R}(f)$.

La troisième partie est une généralisation de la partie précédente, les endomorphismes f considérés et leurs puissances successives s'écrivant comme combinaison linéaire d'endomorphismes p_1, \dots, p_n . Les premières questions s'avèrent assez simples mais techniquement difficiles. Les questions suivantes montent ensuite très rapidement en difficulté. Cette partie utilise en particulier des raisonnements sur les polynômes d'endomorphisme afin de prouver que p_1, \dots, p_n sont les projecteurs associés à la décomposition spectrale de f .

La quatrième partie aborde le même problème dans le cas d'un endomorphisme nilpotent général. Si le niveau de généralité des questions reste assez proche de la partie III, en revanche cela demande un peu plus de recul car, outre des résultats d'algèbre linéaire, cette partie demande l'utilisation de résultats d'analyse et d'arithmétique sur les polynômes.

Remarques sur la façon dont a été traité le sujet

De très bonnes copies vont à l'essentiel tout en ne négligeant aucun détail important et parviennent à aborder presque toutes les questions de l'épreuve. Il semblerait que

dans l'ensemble, les candidats aient fait un effort du côté de la présentation, même si l'honnêteté de la rédaction se dégrade au fil de l'épreuve. L'autre principal reproche qui peut être fait quant à la rédaction mathématique est la confusion qui existe entre les notions d'implication, d'équivalence, d'inclusion et d'égalité. Quelques copies vraiment très faibles ont été rencontrées, les réponses proposées étant souvent incohérentes.

La partie I a été la partie la mieux traitée. Dans la partie A) les premières questions ont été relativement bien traitées malgré quelques erreurs de calcul. La majorité des candidats connaît très bien la technique employée, mais on peut regretter cependant que bon nombre d'entre eux ne prennent pas le temps de procéder à des vérifications d'usage des résultats qu'ils proposent. Ces candidats ont perdu une occasion de constater qu'une erreur avait été commise. Comme les questions de cette partie s'enchaîne, la moindre erreur de calcul devient très pénalisante. Dans la question 4) par exemple, les résultats présentés ne sont pas toujours justes, mais très peu de candidats ont jugé utile de vérifier leur calcul par le calcul de $P^{-1}P$. Dans la question A)6) l'erreur la plus fréquente a été de supposer que H était forcément diagonale. La dernière question de la partie A) (question 7)) a été peu traitée correctement surtout dans sa deuxième partie.

Le début de la partie B) a été relativement bien traité. Dans la question B)4) la majorité des candidats est passée à côté de l'unicité du couple (p, q) . Dans la question B)5), les candidats qui ont trouvé les bonnes expressions de p et q ne voient pas toujours qu'il s'agit de projections et certaines expressions de p^2 , q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$ sont erronées. La question 6) a été bien réussie sauf pour les matrices de P et Q à donner dans la nouvelle base. Les dernières questions de la partie B) ont été peu et mal traitées.

Dans la question 1) de la partie II, le calcul de la composée est plutôt bien fait. Par contre le lien entre polynôme annulateur scindé n'admettant que des racines simples et diagonalisation n'est pas souvent fait et semble même dans certains centres inconnu. Dans la question 2), on a pu voir beaucoup de raisonnements faux, comme $f = \lambda \text{id}$ et $f = \mu \text{id}$. La question 3) a parfois été effectuée par de faux raisonnements d'identification. Les candidats ont eu du mal à montrer dans la question 4) que f est un isomorphisme et à trouver l'expression de f^{-1} . Dans la question 5) la récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ a été souvent bien faite. Pour $m \in \mathbb{Z}$, cela a posé beaucoup de problèmes. Le reste de la partie a été peu traité.

Dans la partie III, peu de questions ont été abordées mises à part les questions 1) et 2). La première question a été en général assez bien traitée. Dans la question 2) les candidats ont rarement pensé à poser le polynôme $P(X) = \prod(X - \lambda_i \text{id})$ pour pouvoir appliquer la question 1). Pour ce qui est de la question 3) les candidats reconnaissent les polynômes de Lagrange sans pouvoir les utiliser. Le reste de la partie a été très peu abordé. Notons cependant que quelques candidats ont traité de manière correcte la question 8)1).

La partie IV a été la partie la moins traitée de tout le sujet. Lorsque la question A)1) est abordée elle est assez bien réussie. Cependant le fait de devoir choisir un x judicieux n'est en revanche pas toujours vu. Dans la question 3), les développements limités usuels ne semblent pas vraiment bien connus.

Pour la partie B), le résultat de trigonalisation de f a parfois été cité dans la question 2).