Mathématiques 1

Monsieur DE SAINT JULIEN Arnaud

Le sujet était constitué de deux exercices et d'un problème.
Le premier exercice établissait la convergence de deux séries et le calcul de leur somme.
Dans le deuxième exercice, on utilisait un développement en série de Fourier pour calculer des sommes.
Le problème traitait de fonctions tests (fonctions de classe C^∞ à support compact) et était constitué de trois parties. Dans la première, on établissait l'existence de fonctions tests et d'un noyau régularisant. Dans la deuxième partie, on montrait que toute fonction continue à support compact pouvait être approchée uniformément par une suite de fonctions tests obtenue par convolution à l'aide du noyau régularisant.
Dans la troisième partie, on démontrait un théorème de Withney à l'aide des fonctions tests : toute fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe C^∞.

Les deux exercices étaient extrêmement classiques.
Le problème était bien construit, détaillé et progressif, il ne posait pas de problème particulier de compréhension (citons juste quelques rares candidats qui ont confondu « à support compact » avec « nulle à l'infini »).
Le sujet était de difficulté raisonnable et progressive, peut-être un peu long (même si certains candidats ont traité toutes les questions). Il ne demandait pas de dextérité excessive.

Les thèmes mis en jeu balayaient une bonne partie du programme d'analyse.
- séries (convergence et somme), séries de Fourier (Dirichlet, Parseval…)
- dérivation (théorème de prolongement C^1 …)
- suites de fonctions (convergence uniforme, …)
- intégration (convolution, fonctions intégrables, dérivation d'une intégrale à paramètres)
- topologie (parties compactes, distance à une partie…)

Appréciation générale des copies

Les résultats des candidats sont assez contrastés, la fourchette de notes très large.
Il y a bien sûr de très bonnes copies (certaines excellentes) avec des rédactions soignées.
Savoir bien rédiger n'est pas quelque chose de facile, mais trop de candidats rendent des copies inacceptables :
- L'écriture est à la limite du lisible.
- Il y a très peu de rigueur dans la rédaction, on oublie souvent les quantificateurs. Cela donne des copies où l'on ne lit pas mais on déchiffre, ce qui est extrêmement désagréable pour le correcteur et préjudiciable pour le candidat.
- On déplore aussi des tentatives d'arnaque, ce qui fait très mauvais effet et irrite le correcteur.

Un premier effort pourrait être de souligner les résultats.

Enfin, il semble que la réflexion soit souvent très insuffisante, en atteste par exemple, les nombreuses erreurs pour des tracés de fonctions…

La moyenne de l'épreuve est 10, 40. L'écart type vaut 3,90.

Ce sujet a très bien joué son rôle pour les concours communs polytechniques ; il a permis de bien classer les candidats.

Remarques détaillées par question

Exercice 1

a. Pas de problème en général pour la convergence. Pour le calcul de la somme, certains se sont lancés sur les séries entières en y laissant pas mal d'énergie.
L'erreur la plus fréquente a été de ne pas travailler avec les sommes partielles et donc de faire une manipulation du type $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

b. Certains candidats n'ont pas pensé à d'Alembert et ont invoqué Stirling ce qui a souvent conduit à des erreurs. Pour la somme, la majorité des candidats a réussi.

Exercice 2

Cet exercice ultra classique a étonnamment souvent était mal réussi. Les candidats écrivent $f=\sum c_k e_k$ lorsque l'on demande la série de Fourier. Les théorèmes de convergence (Dirichlet ou Parseval…) sont souvent mal énoncés.

Problème

$\boxed{\text{I}}$

1. Petite question de topologie souvent mal traitée notamment le sens A bornée implique $\overline{A}$ bornée. Les candidats savent qu'en dimension finie les compacts sont les fermés bornés.

2. Deux petites questions légèrement ouvertes qui ont permis de repérer des candidats qui ne réfléchissaient pas assez. Pour beaucoup, la fonction u était de classe C^∞ malgré le graphe qui présentait deux points anguleux. Beaucoup oublient que la fonction est paire et pensent que la fonction n'est définie que sur $[0,+\infty[$. D'une façon générale, les candidats ne sont pas à l'aise avec les fonctions définies par morceaux.

3. **a.** Le principe de la récurrence ne pose pas de problème, mais il y a souvent eu erreur de dérivation, le degré est souvent juste.
La conclusion pour être C^∞ est délicate, c'est une conséquence du théorème de prolongement de classe C^1 ou C^k qui a été cité exceptionnellement.
b. Beaucoup ont commis l'erreur classique, elle est C^∞ donc développable en série entière.
D'autres ont écrit $\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!x^n}$, mais ce n'est pas une série entière.

4. Réponses décevantes. Pas mal d'erreurs dans les variations, la courbe, on oublie souvent qu'il y a plusieurs morceaux…

5. La plupart des candidats a deviné la réponse, mais raisonne par l'absurde et commet l'erreur suivante : la négation de « tend vers 0 » est « tend vers $l \neq 0$ ».

6. L'intégrabilité de φ donne parfois lieu à des arguments curieux, lorsque les candidats n'ont pas réalisé qu'elle était nulle en dehors de $[-1,1]$.

   On oublie régulièrement la continuité pour justifier l'intégrabilité sur $[-1,1]$ et pour justifier la stricte positivité de l'intégrale.

II

7. **a.** Certains pensent au critère de Cauchy uniforme, d'autres le redémontrent à partir de la définition de convergence uniforme. Mais beaucoup se trompent dans la place des quantificateurs, notamment des *x*, ce qui aboutit à des réponses « arnaques ».
   b. Question un peu subtile pas souvent réussie. Beaucoup de candidats concluent bien que $P_n - P_N$ est constant, mais confondent « polynôme constant en la variable *x* » et « polynôme constant indépendant de *n* ».

8. **a.** Graphe souvent réussi (sauf oubli de la partie sur $]-\infty, 0]$). La convergence simple est souvent juste mais la convergence uniforme a posé problème, pas mal de réponses sans justifications.
   b. c. d. e. Pas mal de réponses non justifiées ou « balancées ». Il fallait justifier que g_n est à support compact.

9. En général bien traité, même si certains oublient la continuité…

10. Question qui a donné lieu à pas mal d'arnaques. Peu ont donné de réels contre-exemples au **b.**

11. Le théorème de dérivation de Leibniz a été très rarement bien utilisé.

12. L'inégalité du **a.** est assez souvent obtenue mais les candidats oublient parfois de préciser que ρ_n est positive et a pour support $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

    Le **b.** a été réussi par quelques bons candidats.

III

13. Question souvent réussie. Les candidats ont surtout raisonné avec la caractérisation séquentielle des fermés. Invoquer l'image réciproque d'un fermé a été rare…

14. Parmi ceux qui ont traité cette question, peu rappellent que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

15. Question réussie lorsqu'elle était traitée.

16. Parmi ceux qui ont traité la question, tous ont pensé à poser $f = \sum_k \varphi_k$. Certains ont bien justifié qu'elle était convergente. Le point très délicat était de montrer qu'elle était de classe C^∞.