Mathématiques 1

Monsieur HARINGTON Bruno

Thème

Le sujet proposait de vérifier l'importance des hypothèses d'un théorème, ici le théorème de convergence normale d'une série de Fourier. On étudiait ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux ».
Une première partie démontre des résultats préliminaires notamment autour des théorèmes de Cesàro et Fejér.
Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », la série de Fourier peut diverger.
Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur |. On arrive ainsi au théorème de Jordan.

Observations générales

Le problème, bien équilibré et progressif, ne comportait aucune difficulté sérieuse et proposait des questions accessibles jusqu'à la fin. Les parties étaient largement indépendantes ce qui permettait aux candidats de ne pas rester bloqués. Une grande partie du programme d'analyse de la classe de MP était couverte, on y retrouvait des questions de cours et des questions assez classiques que les candidats auront certainement rencontré en exercice ou en devoir lors de leur année de préparation. Quelques étudiants ont réussi à faire le sujet en entier. C'est un sujet qui a parfaitement rempli son rôle et permis de bien classer les candidats.

Quelques conseils

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.
1. Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
3. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent 4 lignes plus haut ou à la question précédente.
4. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
5. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet, vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
6. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
7. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
8. Soigner la présentation.
9. Éviter dans une démonstration d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.

Remarques détaillées par question

1. Le théorème de Dirichlet est souvent mal énoncé. C'est quand même inquiétant, concernant les séries de Fourier il n'y a que deux théorèmes de convergence à connaître !

2. La notion de « classe C^1 par morceaux » n'est pas bien comprise. On voit souvent comme justification : la fonction n'est pas dérivable en 0 donc n'est pas de classe C^1 par morceaux !
On observe aussi la confusion classique entre « f non dérivable en 0 » et « f' n'admet pas de limite finie en 0 ».

3. On oublie souvent de préciser que la série $\sum 1$ diverge pour justifier la sommation de relations de comparaison.
La question b) était facile et rapide, il était inutile ici de refaire la démonstration classique en utilisant les ε.

4. On voit souvent la notation maladroite : $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = l$ alors que l dépend de x.
L'unicité de la limite n'est pas assez évoquée.

5. Les candidats manipulent mal la notion de borne supérieure.
On voit aussi « (u_n) converge vers 0 donc est décroissante à partir d'un certain rang » !

6. Question facile mais pour certains la convergence normale est visiblement une notion très floue. Quelques candidats écrivent $\|f(x)\|_\infty$ à la place de $\|f\|_\infty$ ce qui est sanctionné. On voit souvent l'oubli des valeurs absolues dans la majoration $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2} \ldots$

7. Beaucoup de candidats font une double intégration par parties ce qui rallonge grandement le calcul et oblige à distinguer des cas ($p \neq 0$). On voit trop souvent des copies qui additionnent des équivalents !

8. Trop souvent on utilise la convergence normale de la série $\sum f_n$ à la place de $\sum f_n(t)\cos(pt)$.

9. On oublie de parler de suites extraites au moment de conclure.

10. La continuité en 0 est mal traitée, on rencontre même des développements limités de la fonction $x \mapsto \cos(\dfrac{\pi}{2x})$ au voisinage de 0 !

11. Plusieurs candidats affirment qu'une fonction monotone est continue ou encore que la somme de deux fonctions monotones est encore une fonction monotone !
On rappelle par ailleurs que le théorème des accroissements finis n'est pas valable pour une fonction à valeurs complexes (on peut s'en convaincre avec $f(t) = e^{it}$: $|f(2\pi) - f(0)| = 0 \neq f'(c)2\pi$).

12. On rappelle qu'une subdivision d'un segment $[a,\ b]$ débute avec a et finit avec b.

13. Beaucoup de candidats essayent ici de tromper la vigilance du correcteur ce qui n'est pas très apprécié.

14. à 17. Questions peu traitées sauf pour la question 17.

La moyenne de l'épreuve est de **8,55** et l'écart type est de **3,54**.