Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Voici un problème proposé aux élèves d'une classe de première :

> Aline et Bertrand commandent chacun un café et une carafe de lait. Aline ajoute immédiatement le lait dans son café puis attend trois minutes que le mélange refroidisse avant de le boire. Bertrand attend trois minutes que le café refroidisse avant d'y ajouter le lait.
>
> **Question posée aux élèves :** qui d'Aline ou de Bertrand a bu le café au lait le plus chaud ?
>
> **Données :**
> - Chaque café est servi à la température de 48°C.
> - La température ambiante T_a, qui est aussi celle du lait, est de 22°C.
> - Chaque tasse contient 15 cL de café et chacun y ajoute 3 cL de lait.
> - Lorsque l'on mélange un volume V_1 d'un premier liquide à température T_1 et un volume V_2 d'un second liquide à température T_2, on obtient un liquide dont la température est égale à
>
> $$\frac{V_1 T_1 + V_2 T_2}{V_1 + V_2}.$$
>
> - L'évolution, à partir d'un temps initial $t_0 = 0$, de la température d'un liquide est modélisée par l'équation différentielle :
>
> $$(\mathcal{E}) \qquad T'(t) = -0,04\,(T(t) - T_a),$$
>
> où T_a désigne la température ambiante exprimée en degré Celsius, $T(t)$ la température du liquide exprimée en degré Celsius à l'instant t (exprimé en minute) et $T'(t)$ la valeur à l'instant t de la dérivée de la fonction T.

La théorie des équations différentielles n'étant pas au programme des classes de première, le professeur décide d'utiliser une méthode de résolution approchée, appelée méthode d'Euler, dont le principe est le suivant :

Méthode d'Euler : on part d'une condition initiale $T(0) = \alpha$, où α est un nombre réel, et d'une relation

$$(\mathcal{R}) \qquad T'(t) = F(T(t)),$$

vérifiée par une fonction T dérivable sur $[0, a]$, où a est un réel strictement positif et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On détermine une valeur approchée de $T(a)$ selon le procédé détaillé ci-dessous.
On choisit un entier n strictement positif.
On détermine une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ partageant l'intervalle $[0, a]$ en n intervalles de même longueur.
On pose $y_0 = \alpha$. On note $\mathcal{D}_0$ la droite passant par le point A_0 de coordonnées $(t_0; y_0)$ et de coefficient directeur $F(y_0)$.
On note A_1 le point d'abscisse t_1 de la droite $\mathcal{D}_0$. L'ordonnée y_1 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_1)$.
On note $\mathcal{D}_1$ la droite passant par A_1 et de coefficient directeur $F(y_1)$. On note A_2 le point de $\mathcal{D}_1$ d'abscisse t_2. L'ordonnée y_2 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_2)$.
On itère ce processus jusqu'à y_n, qui est pris comme valeur approchée de $T(a)$.

Partie A : mise en œuvre de la méthode d'Euler

Soit n un entier strictement positif. On applique la méthode d'Euler à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On note $T_n(3)$ la valeur approchée de $T(3)$ obtenue selon le procédé détaillé ci-dessus. Dans toute la suite, on note (t_k, y_k) les coordonnées des points A_k construits à la k-ième étape de la méthode d'Euler.

I. Exprimer les réels $t_0, \ldots, t_n$ subdivisant le segment $[0, 3]$ en n intervalles de même longueur.

II. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}_k$.

III. En déduire que $y_{k+1} = \left(1 - \dfrac{0,12}{n}\right) y_k + \dfrac{2,64}{n}$.

IV. Le professeur demande aux élèves de donner des valeurs approchées des températures du café de Bertrand et du café au lait d'Aline au bout de trois minutes à l'aide de la méthode d'Euler. Voici la production d'un élève ayant utilisé un tableur pour calculer la température du café de Bertrand :

	A	**B**
1	Température ambiante	22
2	Température initiale	48
3	n	20
4		
5	Temps	Température café
6	0	48
7	1	47,844
8	2	47,688936
9	3	47,534802384
10	4	47,3815935697
11	5	47,2293040083
12	6	47,0779281842

1. Quelle formule l'élève a-t-il pu saisir dans la cellule B7 pour obtenir ces résultats en étirant la formule vers le bas et en utilisant les données contenues dans les cellules B1, B2 et B3 ?
2. Comment l'élève peut-il modifier sa production pour calculer une valeur approchée de la température du café au lait d'Aline au bout de trois minutes ?

V. 1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir y_n à partir des entrées $\alpha = T(0)$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Utiliser cet algorithme pour répondre à la question posée dans le problème en prenant $n = 20$.

Partie B : résolution exacte

I. Soit α un réel strictement positif. Déterminer la solution exacte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) & = -0,04\,(y(t) - 22) \\ y(0) & = \alpha \end{cases}$$

II. En appliquant le résultat de la question précédente pour deux valeurs bien choisies de α, répondre à la question posée aux élèves. On donnera une valeur approchée décimale de la température en degré Celsius des cafés au lait d'Aline et de Bertrand à 10^{-2} près.

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler

On étudie la convergence de la suite $(T_n(3))_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque l'on prend la condition initiale $\alpha = 48$.

I. Dans cette question, n est fixé.

1. Donner deux réels a et b tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$y_{k+1} = ay_k + b.$$

2. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.
3. En considérant la suite $(y_k - \ell)_{k\in[\![0,n]\!]}$, exprimer $y_n = T_n(3)$ en fonction de n.

II. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(3)$ et comparer avec le résultat obtenu dans la partie B.

III. Déterminer un équivalent de $|T(3) - T_n(3)|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème n° 2

Notations. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Le protocole de tirage d'une boule dans une urne, décrit ci-dessous, est utilisé tout au long de ce problème.

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher (b et r sont des entiers naturels dont au moins un est non nul). On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne et elle y est remplacée par une boule blanche, de sorte que le nombre $N = b + r$ de boules dans l'urne reste constant.

Le but de ce problème est d'étudier plusieurs expériences aléatoires de tirages successifs en suivant ce protocole.

Partie A : un cas particulier

On suppose dans cette partie que $b = 2$ et $r = 3$.

I. Première expérience aléatoire. On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

1. Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance $E(X)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

II. Seconde expérience aléatoire. On effectue trois fois le protocole de tirage.

1. Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y et calculer son espérance $E(Y)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

III. L'algorithme suivant utilise une fonction **alea**$(1..n)$ qui rend un nombre entier aléatoire obtenu de façon équiprobable dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

```
Entrer(b, r)
d ← alea(1..b + r)
Si (d > b) Alors
    résultat ← rouge
    b ← b + 1
    r ← r − 1
Sinon
    résultat ← blanche
Fin Si
Retourner(résultat)
```

1. Que simule cet algorithme ?
2. Compléter cet algorithme en un nouvel algorithme simulant la variable aléatoire X.

Partie B : généralisation

Dans cette partie, on généralise les résultats obtenus précédemment au cas où b et r sont des entiers naturels non nuls quelconques.

I. Première expérience aléatoire. On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Pour tout entier strictement positif n, on note A_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Donner l'ensemble E des valeurs prises par X.

2. Pour $k \in E$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements liés aux événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

3. Question de cours. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

a. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B) > 0$. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. On la notera $P(A \mid B)$ ou $P_B(A)$.

b. Soit i un entier strictement positif et soient $B_1, \ldots, B_i$ des événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}) > 0$. Après avoir justifié l'existence des probabilités conditionnelles $P(B_2 \mid B_1)$, …, $P(B_i \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1})$, montrer que

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) \ldots P(B_i \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}).$$

4. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Vérifier que $P(X = r + 1) = \dfrac{r!}{N^r}$ et que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{r!}{(r - (k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}.$$

5. a. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n et tous réels $p_0, \ldots, p_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1} - p_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) - np_n.$$

b. En déduire que l'espérance de X est donnée par

$$E(X)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{k!}{N^k}.$$

II. Seconde expérience aléatoire. Soit n un entier strictement positif. On effectue n fois le protocole de tirage. Pour tout entier $m\in[\![1,n]\!]$, on note Y_m la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues à l'issue du m-ième tirage. Par convention, Y_0 est la variable aléatoire nulle.

1. **a.** Donner la valeur de $P(Y_n=k)$ lorsque $k>n$.

b. Donner la valeur de $P(Y_n=k)$ lorsque $k>r$.

c. Donner la valeur de $P(Y_n=0)$.

2. Pour $k\in[\![0,n]\!]$ et $i\in[\![0,n-1]\!]$, exprimer la probabilité conditionnelle

$$P(Y_n=k\mid Y_{n-1}=i).$$

En déduire que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,

$$P(Y_n=k)=\frac{b+k}{N}P(Y_{n-1}=k)+\frac{r+1-k}{N}P(Y_{n-1}=k-1).$$

3. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$E(Y_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r+k(N-1)}{N}P(Y_{n-1}=k)=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(Y_{n-1})+\frac{r}{N}.$$

4. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$E(Y_n)=r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).$$

b. Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))_{n\geqslant 0}$ et montrer l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$,

$$|E(Y_n)-r|\leqslant\frac{1}{4}.$$

III. **1.** Pour tout entier strictement positif k, on note A_k l'événement « la k-ième boule tirée est rouge ». En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$P(A_{k+1})=\sum_{i=0}^{k}\frac{r-i}{N}P(Y_k=i).$$

2. Exprimer $P(A_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$ et en déduire une expression de $P(A_{k+1})$ en fonction de r, k et N.

IV. **1.** En utilisant la question B. II. 2. et le théorème du transfert, montrer que, pour tout entier n strictement positif,

$$E\left(Y_n(Y_n-1)\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k(k-1)(N-2)+2(r-1)k}{N}\right)P(Y_{n-1}=k).$$

2. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$E\left(Y_n(Y_n-1)\right) = \left(1-\frac{2}{N}\right) E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right) + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$E\left(Y_n(Y_n-1)\right) = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).$$

4. Exprimer $V(Y_n)$ en fonction de $E(Y_n(Y_n-1))$ et de $E(Y_n)$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

V. **1.** Calculer $\lim_{n\to+\infty} V(Y_n)$.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout réel α strictement positif,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geqslant \alpha) = 0.$$

3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geqslant \alpha) = 0.$$

4. On rappelle que n_0 est introduit dans la question B.II.4.b. On fixe $\alpha = \frac{1}{2}$. Montrer que si $n \geqslant n_0$, alors :

$$P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geqslant \alpha) = P(Y_n \neq r).$$

5. Conclure.