Problème 1 : étude de points fixes

Dans ce problème, on étudie la méthode du point fixe, permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation.
Après avoir abordé les questions d'existence et d'unicité d'une solution, on construit des suites convergeant vers cette solution et on précise leur vitesse de convergence.

Définitions

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
– Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe pour f si $f(x) = x$.
– On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$.
– On dit que f est contractante sur I s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$, appelé coefficient de contraction, tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \gamma |x - y| .$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
– On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement, ou à une vitesse géométrique, vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}$, avec $0 < k < 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha| .$$

– On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 (ou a une convergence quadratique) vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|^2 .$$

On suppose connu le théorème des valeurs intermédiaires.

Partie A : quelques études d'existence et d'unicité

Dans cette partie, pour montrer qu'une hypothèse n'est pas nécessaire ou n'est pas suffisante, on pourra se contenter de fournir un contre-exemple graphique.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs reélles définie sur l'intervalle $I = [a, b]$.
   1.1. La continuité de la fonction f est-elle une condition nécessaire à l'existence d'un point fixe ?
   1.2. La continuité de la fonction f est-elle une condition suffisante à l'existence d'un point fixe ?
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $I = [0, 1]$. On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ telle que $f([a, b]) = [a, b]$.
   3.1. Démontrer que f possède un point fixe sur $[a, b]$.
   3.2. Dans cette question, on suppose de plus que f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?
   3.3. Dans cette question, on suppose maintenant que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?

Partie B : étude d'une suite convergeant vers un point fixe

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \alpha$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\alpha}{t}\right)$.
   1.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Justifier l'équivalence : x_0 est un point fixe de g si et seulement si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
   1.2. Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$.
   Après avoir déterminé l'équation de la tangente T_t à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse t, démontrer que le réel $g(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
   1.3. En vue de la préparation d'une activité à présenter devant une classe de terminale scientifique, interpréter graphiquement le résultat précédent pour construire une suite convergeant vers la solution positive de l'équation $x^2 - \alpha = 0$.
2. On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right).$$

   2.1. Démontrer que si $u_0 = \sqrt{\alpha}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et que si $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > \sqrt{\alpha}$. Dans la suite, on suppose $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$.
   2.2. En déduire que pour tout entier naturel n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(u_n, f(u_n))$ avec l'axe des abscisses.
   2.3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du deuxième terme.
   2.4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le réel $\sqrt{\alpha}$.
   2.5. Dans cette question, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le réel $\sqrt{\alpha}$ dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
   Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2.$$

   En déduire la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C : un théorème du point fixe

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a, b]$.
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :
$H1$: l'intervalle I est stable par f,
$H2$: f est contractante, de coefficient de contraction γ.

1. Démontrer que la fonction f étant contractante sur I, elle est nécessairement continue sur I.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   2.1. Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ?
   2.2. Démontrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j \, |u_1 - u_0|$$

   et en déduire que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0| .$$

   2.3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans I.
3. Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I.
4. Énoncer le théorème du point fixe ainsi démontré.
5. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème 2 : intégrale de Gauss et loi normale

La loi normale figure au programme de la classe terminale des différentes séries du lycée. Ce problème a pour objet d'établir plusieurs résultats essentiels pour l'étude de cette loi, dont certains dépassent ce niveau d'enseignement.
Les parties A et B visent à démontrer, grâce à l'étude d'une suite, la convergence de l'intégrale de Gauss.
La partie C consiste à justifier la validité de la définition de la loi normale et à calculer les principaux paramètres relatifs à cette loi.

Partie A : intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n\,.$$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$$1 \leqslant \frac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}\,.$$
4. Montrer que la suite $\left(\dfrac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer u_n pour tout entier naturel n.
6. Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,W_n^2$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,W_n$.

Partie B : calcul de l'intégrale de Gauss

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :
$$\ln(x+1) \leqslant x\,.$$
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\forall t \in \left[0,\sqrt{n}\right]\,,\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\cos(u)$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}(u)$.

5. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}\,.$$

6. Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

Partie C : loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Pour tout réel k, on considère la fonction φ_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_k(x) = k\, e^{-x^2/2}\,.$$

1. 1.1. Rappeler les conditions que doit vérifier une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour être une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

   1.2. Déterminer k pour que φ_k soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. On considère une variable aléatoire X ayant pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,.$$

   2.1. Démontrer que la variable aléatoire X a une espérance et déterminer sa valeur.

   2.2. Démontrer que la variable aléatoire X a une variance et déterminer sa valeur.

On dit qu'une variable aléatoire ayant pour densité la fonction φ suit la *loi normale centrée réduite.*

3. Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Soit Z une variable aléatoire telle que la variable $X = \dfrac{Z-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

   3.1. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.

   3.2. Déterminer la densité de probabilité f de la variable aléatoire Z.

On dit alors que la variable Z suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$.

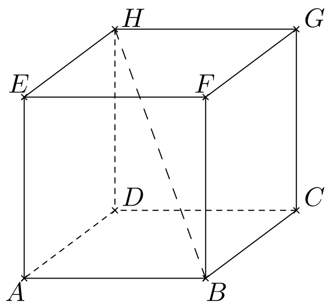
   4.1. Donner l'espérance de la variable aléatoire Y et démontrer que la variance de cette variable aléatoire vaut 2.

   4.2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Cette variable aléatoire suit-elle une loi normale ?

Problème 3 : géométrie

Dans tout le problème ABC désigne un triangle non aplati.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.
2. Montrer que les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ne peuvent pas être perpendiculaires.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les hauteurs issues des sommets B et C soient perpendiculaires.
4. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
   - 4.1. Démontrer, avec les outils du collège, que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G situé au $\dfrac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.
   - 4.2. Démontrer que :
   $$c^2 + b^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(théorème de la médiane)}\,.$$
   - 4.3. En déduire que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si :
   $$c^2 + b^2 = 5a^2\,.$$
5. On considère un cube $ABCDEFGH$.



En utilisant le résultat de la question 4.3, expliquer comment, sur la figure précédente, on peut construire uniquement à l'aide de la règle le point A' projeté orthogonal du point A sur la droite (BH).