Notations et présentation du sujet

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a < b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Il se compose de quatre parties. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines du polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

1) **Exemple numérique**

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i, a_1 = -3 - 5i, a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

1.1) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

1.2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$

1.3) Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2) **Étude du cas général**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r_i\}$$

2.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1.a) Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leqslant r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

2.1.b) En déduire que : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

2.2) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associée la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P, et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.a) Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det\big(M_P - zI_n\big) = (-1)^n P(z)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

2.2.b) En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

PARTIE B : La borne de Cauchy

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1) **Un résultat préliminaire**

Soient $(c_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

1.1) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

1.3) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

1.4) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

2) **Une application**

On considère un entier $m \geqslant 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que a_i soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. On pose $\gamma = \max_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

2.1) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X-\gamma)F(X)$, montrer que

$$|\zeta| \leqslant \gamma$$

2.2) On pose $\gamma' = \min_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$. Montrer que :

$$\gamma' \leqslant |\zeta|$$

3) **La borne de Cauchy**

Soit $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

3.1) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

3.2) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leqslant \rho(f)$$

3.3) Soit $(\zeta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leqslant |\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant \rho(f)$$

3.3.a) Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leqslant \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binômial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3.3.b) En déduire que :

$$\rho(f)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

3.3.c) En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(f) \leqslant |\zeta_n|$$

3.3.d) On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose $g(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leqslant |\zeta_1| \leqslant \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(g)}$$

3.4) En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1) de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 3.2), et 3.3.c).

4) **Un raffinement de la borne de Cauchy**

On considère toujours $f(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

On pose

$$f_1(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$$

On se propose de montrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant \rho(f_1)\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \rho(f_1)\right\}$$

et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

4.1) Montrer que $\rho(f_1) \leqslant \rho(f)$.

4.2) Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leqslant \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1)$$

4.3) Conclure.

PARTIE C : un théorème de Lucas

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si pour tout couple (A, B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à Γ. (*En particulier, l'ensemble vide est convexe*).

1) **Préliminaires**

1.1) Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée **l'enveloppe convexe** de P.

1.2) Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

2) Soit $f(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé. Soit $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

2.1) Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$, on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

2.2) Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2,$\cdots$,M_m d'affixes respectives r_1, r_2,$\cdots$, r_m.

2.3) Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*)

2.4) Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1) de la partie A.

PARTIE D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

- ◇ *des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral*
- ◇ *du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$ s'il équilatéral.*

1) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1.1) Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω.

1.2) Conclure.

2) **Une propriété de la tangente à l'ellipse**

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$. On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a$$

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t) \in (\mathcal{E})$, on note $\vec{\tau}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right)$ un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ et on pose

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{M(t)F}\,\overrightarrow{M(t)F} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(t) = \frac{1}{M(t)F'}\,\overrightarrow{M(t)F'}$$

2.1) Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right)$$

2.2) Montrer que le produit scalaire $\left(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)\right).\vec{\tau}(t)$ est nul.

2.3) En déduire que la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F), (M(t)F'))$.

3) **Un théorème de Poncelet**

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (c'est à dire un point P tel que $PF + PF' > 2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à $(\mathcal{E})$ et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

3.1) Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1). Montrer que $F'F_1 = 2a$.

3.2) On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2). Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

3.3) On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1), (PF))$ et $((PF'), (PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note $\mathcal{S}_D$ la réflexion d'axe D.

3.3.a) Déterminer $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$.

3.3.b) Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ et conclure.

4) **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral**

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral.

On note w et w' (avec $w \neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w'.

4.1) Justifier qu'il existe une ellipse $(\mathcal{E})$ de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1M_2]$.

4.2)

4.2.a) Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité :

$$3(X-w)(X-w') = (X-r_1)(X-r_2) + (X-r_2)(X-r_3) + (X-r_3)(X-r_1)$$

4.2.b) En déduire que :

$$12\,\frac{w - \dfrac{r_1+r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \dfrac{r_1+r_2}{2}}$$

puis que la droite (M_1M_2) est tangente à $(\mathcal{E})$.

4.3)

4.3.a) Montrer que :

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3\frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}$$

4.3.b) En déduire que (M_1M_3) est la deuxième tangente à $(\mathcal{E})$ issue de M_1.

4.4) Conclure.

FIN