**S E S S I O N   D E   2 0 0 4**

# concours externe
# de recrutement de professeurs certifiés
# et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

**section : mathématiques**

## deuxième composition de mathématiques

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.*

*Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

## Rappels et notations

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A\,[i,j]$ le coefficient de $A$ dont l'indice de ligne est égal à $i$ et l'indice de colonne est égal à $j$.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

**1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3**. Le produit scalaire de deux vecteurs $u$ et $v$ est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur $v$ est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée $d$. Si $u$ et $v$ sont deux vecteurs de $\mathbf{E}$, on a donc $d(u,v) = \|u - v\|$.

$\mathbf{E}$ est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{E} \mid \ \|v\| = 1\}$$

On note $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ l'application identique de $\mathbf{E}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{E})$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de $\mathbf{E}$.

Si $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$, on note $f\,g$ au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de $g$ et de $f$.

On rappelle que :

- Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à $-1$.
- Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ .
- $D$ étant une droite vectorielle de $\mathbf{E}$, on appelle demi-tour d'axe $D$ la symétrie orthogonale par rapport à $D$ ; il s'agit d'une rotation vectorielle.
- $\mathcal{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de $\mathbf{E}$ associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

**2. Ensembles dénombrables**

On rappelle que :

- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

**3. Partitions**

Soit $A$ un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de $A$ constitue une partition de $A$ si :

*(i) Aucun des sous-ensembles $A_i$ n'est vide.*

*(ii)* $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

*(iii)* $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

**4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie**

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement, $g$ étant un élément de $\mathbf{G}$, l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$ : $h \to g\,h$ est bijective. Si $\mathbf{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on note

$$g\,\mathbf{H} = \{g\,h \,|\, h \in \mathbf{H}\}$$

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement et $S$ un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on appelle sous-groupe engendré par $S$ le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant $S$; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de $\mathbf{G}$ qui contiennent $S$.

**5. Déplacements**

On note $\text{Dep}(\mathbf{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathbf{E}$ lorsque ce dernier est muni de sa sructure canonique d'espace affine euclidien sur lui même. On rappelle que $(\text{Dep}(\mathbf{E}), \circ)$ est un groupe.

## Préliminaires

Soit $\Omega$ un ensemble quelconque non vide. $A$ et $B$ étant deux sous-ensembles de $\Omega$, on note $A \setminus B$ l'intersection de $A$ et du complémentaire de $B$ ; en d'autres termes :

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$\mathfrak{S}(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de $\Omega$ sur lui-même.

Soit $f$ appartenant à $\mathfrak{S}(\Omega)$; si $A$ est un sous-ensemble de $\Omega$, on note $f(A)$ le sous-ensemble de $\Omega$ dont les éléments sont les images des éléments de $A$ :

$$f(A) = \{y \in \Omega \mid \exists x \in A,\, f(x) = y\}$$

*On rappelle que :*

*(i)* $f(A) = \emptyset$ *si et seulement si* $A = \emptyset$.

*(ii) Si* $A$ *et* $B$ *sont deux sous-ensembles de* $X$*, on a :*

$$A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B).$$

*(iii) Si* $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque de sous-ensembles de* $X$ *indexée par l'ensemble* $I$*, on a :*

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

*(iv) Si* $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque de sous-ensembles de* $X$ *indexée par l'ensemble* $I$*, on a :*

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

*(v) Si* $A$ *et* $B$ *sont deux sous-ensembles de* $X$*, on a :*

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

**1.** Démontrer les propriétés *(iv)* et *(v)*.

**2.** Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$ si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$

## Partie I : quelques propriétés des rotations de l espace $\mathbf{E}$

**1.** Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$.

**a)** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ ont le même axe.
Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$.

**b)** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours d'axes respectifs $D_1$ et $D_2$ orthogonaux. Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$ et déterminer cette rotation.

**2.** Réciproque :

Soit $\rho$ une rotation vectorielle distincte de $\text{Id}_{\mathbf{E}}$, d'axe $D = \mathbb{R}\omega$ où $||\omega|| = 1$.

**a)** Soit $\Delta$ une droite vectorielle distincte de $D$ et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que $D$ et $\Delta$ sont orthogonales et que $\rho$ est un demi-tour.

**b)** Soit $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles distinctes de $\text{Id}_{\mathbf{E}}$ dont les axes respectifs $D_1$ et $D_2$ sont distincts. Montrer que si $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$, alors $D_1$ est une droite invariante par $\rho_2$. En déduire que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

**c)** Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments $\rho_1$, $\rho_2$ de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$).

*Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{G}$ *le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\rho_1$ et $\rho_2$.*

**3.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont les rotations d'angles respectifs $\alpha_1, \alpha_2$ autour de la droite $D$ dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\omega$.

**a)** On note $\mathbf{H} = \{\rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2} \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

**b)** On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où $x, y, z$ sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un *unique* couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2}$.

**4.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux . Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

**5.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

**a)** Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

**b)** Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n[,\ s_i \neq s_{i+1} \tag{1}$$

*Cette décomposition n'est en général pas unique (si $\rho_1$ est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.*

## Partie II : Étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

*On pose dans ce qui suit* $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

*$I_3, R$ et $T$ sont les matrices de $\mathcal{SO}(3)$ définies par :*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

*$\rho$ et $\tau$ sont les rotations de* $\mathbf{E}$ de *matrices respectives $R, T$ dans la base $\mathcal{B}$.*

*$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$ engendré par $\{R, T\}$.* $\mathbf{G}$ *est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.*

*On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où $p$ et $q$ sont des entiers relatifs, signifie que $5$ divise $q - p$.*

**1.** Pour tout entier *relatif* $n$, on pose

$$a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha) \text{ et } b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha)$$

**a)** Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$$

**b)** Prouver que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n$$

**c)** Prouver que pour tout entier *relatif* $n$, $a_n$ et $b_n$ sont des entiers relatifs.

**d)** Montrer que si $n$ est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

**e)** Montrer que si $n$ est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$.

Montrer que si $n$ est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

**2.** *On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple $(i, j)$* de $[1, 3]^2$, on a :

$$M[i, j] \equiv M'[i, j] \bmod 5$$

*On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.*

**a)** Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si $A, B, C, D$ sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

**b)** Démontrer que pour tout entier $k$, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ 5^{|k|}R^k \equiv \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \varepsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \varepsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

Existe-t-il un entier relatif $k$ différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

**c)** Démontrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*2},\ 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

**d)** Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et $\beta$ appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum\limits_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$$

où $a, b, c, d$ sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

**e)** En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \tag{2}$$

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3 \tag{3}$$

**3.** Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et $\beta$ appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \tag{4}$$

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \tag{5}$$

**4.** Conclure que pour tout $g$ appartenant à $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$, il existe de *façon unique* un entier $n$ strictement positif, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*\,n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1],\ s_i \neq s_{i+1}$$

*On appelle terme de tête de $g$ l'élément $s_1$ lorsque $a_1 > 0$ et $s_1^{-1}$ lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.*

**5.** Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

**6.** Pour tout élément $\sigma$ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments $g$ de $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

**a)** Vérifier que

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\} \cup L(\rho) \cup L\left(\rho^{-1}\right) \cup L(\tau) \cup L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

**b)** Vérifier que :

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$.

De la même manière on a

$$
\begin{aligned}
&L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1}L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1}L(\tau) \cup \rho^{-1}L\left(\tau^{-1}\right) \\
&L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L\left(\rho^{-1}\right) \\
&L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1}L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1}L(\rho) \cup \tau^{-1}L\left(\rho^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

*On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.*

**c)** En déduire que

$$\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\tau) \cup \tau L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de **G.**

## Partie III : Étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. **G** est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$.

On considère l'ensemble

$$F = \{v \in \mathbf{S}^2 \ \mid \ \exists\, g \in \mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\},\ g(v) = v\}$$

et son complémentaire dans $\mathbf{S}^2$, soit $X = \mathbf{S}^2 \setminus F$.

**1.** Démontrer que l'ensemble $F$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. En déduire que $X$ n'est pas vide.

**2.** Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

**3.** Démontrer que si $g$ et $h$ sont deux éléments de **G** tels qu'il existe $v$ appartenant à $X$ vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

**4. a)** Démontrer que pour tout $g$ appartenant à **G,** la restriction de $g$ à $X$ induit une bijection de $X$ sur lui-même que l'on notera $g_X$.

**b)** Démontrer que l'application

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{G} & \rightarrow & \mathfrak{S}(X) \\
g & \mapsto & g_X
\end{array}
$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier **G** à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

**5.** On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur $X$ par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G},\ a = g(b)$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

*On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de $X$. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble $M$ de $X$ dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.*

**6.** Prouver que la famille $(g(M))_{g \in \mathbf{G}}$ constitue une partition de $X$.

**7.** On pose

$$X_0 = M,\ X_1 = \bigcup_{g \in L(\rho)} g(M),\ X_2 = \bigcup_{g \in L(\tau)} g(M),\ X_3 = \bigcup_{g \in L(\rho^{-1})} g(M),\ X_4 = \bigcup_{g \in L(\tau^{-1})} g(M)$$

**a)** Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de $X$.

**b)** Prouver que

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset \tag{6}$$

$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset \tag{7}$$

**8.** On note $\Lambda = \{(u,v) \in F \times F \mid u \neq v\}$.

**a)** Vérifier que $\Lambda$ est un ensemble dénombrable.

**b)** Si $(u,v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \{w \in \mathbf{S}^2 \mid \|w-u\| = \|w-v\|\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble?

**c)** Soit $\Gamma = \bigcup\limits_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans $\mathbf{S}^2$.

**Indication :** on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur $\mathbf{S}^2$ qui ne soit pas centré à l'origine.

**d)** Démontrer qu'il existe un élément $r$ de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$$

**e)** Soit $(u,v)$ appartenant à $F \times F$. Montrer que pour tout entier $k$ strictement positif, $r^k(u)$ est différent de $v$. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$.

En déduire que si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$$

**f)** On pose

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \ \text{ et } \ Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y$$

**g)** Démontrer que

$$r\,(Y) \cap Z = \emptyset \ \text{ et } \ \mathbf{S}^2 \setminus F = r\,(Y) \cup Z$$

## Partie IV : Équidécomposabilité

*Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de* **E**. *On dit que $A$ est équidécomposable à $B$ s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de $A$, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de $B$ et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de* **E** *telles que*

$$\forall i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini $I$). *On écrira alors $A \sim B$.*

**1.** Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que $\mathbf{S}^2$ est équidécomposable à $\mathbf{S}^2 \setminus F$

**2.** Soient $A_1, A_2, B_1, B_2$ des sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ \ A_1 \sim B_1,\ \ A_2 \sim B_2$$

**a)** Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

**b)** Généraliser.

**3.** Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$.

Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $\left(A'_j\right)_{j\in J}$ sont deux partitions de $A$, et que si l'on pose

$$K = \left\{(i,j) \in I \times J \mid A_i \cap A'_j \neq \emptyset\right\}$$

alors la famille $\left(A_i \cap A'_j\right)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de $A$.

**4.** On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection $\psi$ de $A$ sur $B$ telle que pour tout sous-ensemble non vide $C$ de $A$, on ait :

$$C \sim \psi\,(C)$$

*Soient $A$* et *$B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$. On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide $B^{'}$ de $B$ tel que $A \sim B^{'}$. En particulier, si $A \sim B$, alors $A \preccurlyeq B$.*

*La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$. Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si $A$ et $B$ sont des sous-ensembles non vides de $X$ tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.*

*On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :*

**Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.**

## Partie V : ensembles paradoxaux

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

Un sous-ensemble $A$ de $\mathbf{E}$ est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides $B, C$ de $A$ tels que

$$B \sim A, \quad C \sim A \quad \text{et} \quad B \cap C = \emptyset \tag{8}$$

**1.** Les notations étant celles de la partie III, vérifier que $X$ est paradoxal.

**2**. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ telles que $A \sim B$. Démontrer que si $A$ est paradoxal, alors il en est de même de $B$.
On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

**3.** Soit $A$ un sous-ensemble paradoxal de $\mathbf{E}$, $B, C$ deux sous-ensembles de $A$ non vides vérifiant les relations (8).

**a)** En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \setminus C) \sim A$.

**b)** En déduire qu'il existe une partition $(A_1, A_2)$ de $A$ telle que :

$$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A$$

**4.** Démontrer que $\mathbf{S}^2$ est paradoxal.

**5.** En déduire que si $\Sigma_1$ et $\Sigma_1$ sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$\mathbf{S}^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$