

SESSION 2026



**CAPES  
CONCOURS EXTERNE  
ET CAFEP CORRESPONDANT  
(BAC + 3)**

**SECTION : PHYSIQUE-CHIMIE**

**PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ**

L'épreuve consiste en plusieurs exercices. Elle vise à évaluer les connaissances et compétences disciplinaires en physique et en chimie, notamment la capacité à mettre en œuvre une démarche scientifique. Elle est constituée de deux parties :

- une première partie portant sur la discipline majeure ;
- une deuxième partie portant sur la discipline mineure.

Durée : 4 heures

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.  
L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Le candidat rendra une copie correspondant à son choix de majeure/mineure lors de son inscription.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.**

## PRÉAMBULE

### **Majeure chimie / Mineure physique :**

**Si lors de votre inscription, vous avez choisi la majeure chimie / mineure physique : vous devez obligatoirement traiter le sujet allant de la page 2/28 à la page 15/28.**

Majeure chimie : sur 14 points, de la page 2 à la page 10 ;

Mineure physique : sur 6 points, de la page 11 à la page 15.

### **Majeure physique / Mineure chimie :**

**Si lors de votre inscription, vous avez choisi la majeure physique / mineure chimie : vous devez obligatoirement traiter le sujet allant de la page 16/28 à la page 28/28.**

Majeure physique : sur 14 points, de la page 16 à la page 24 ;

Mineure chimie : sur 6 points, de la page 25 à la page 28.

### **Consignes et recommandations :**

- Votre copie devra reprendre le titre de chaque partie traitée du sujet (exemple : « MAJEURE PHYSIQUE »).
- Vous pouvez traiter les parties dans l'ordre de votre choix.
- Vous devrez débiter la deuxième partie (majeure ou mineure) en haut d'une nouvelle page.
- Il est recommandé d'accorder un temps de traitement pour chaque partie cohérent avec les nombres de points indiqués ; la note zéro à l'une des parties (majeure ou mineure) est éliminatoire.

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES de l'enseignement public :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
LBE	1500F	101	4061

► **Concours externe du CAFEP/CAPES de l'enseignement privé :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
LBF	1500F	101	4061



## MAJEURE CHIMIE

### Le bismuth (14 points)

Le bismuth est un élément chimique de numéro atomique 83. Contrairement à ses voisins, le plomb et le mercure, il est non toxique et est utilisé dans l'industrie pharmaceutique et cosmétique.

Ce sujet est constitué de cinq parties A à E indépendantes.

### Données

- Masses molaires atomiques :

$$M(\text{Pb}) = 207 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \qquad M(\text{Bi}) = 209 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Concentration standard :  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .
- Constante de Faraday :  $F = 96,5 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- À 25 °C,  $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,059 \text{ V}$ .
- Conversion entre degrés Celsius et kelvins :  $T(\text{K}) = 273,15 + \theta(^{\circ}\text{C})$ .
- Potentiels standard à 25 °C :

$$E^\circ(\text{Bi}^{3+}/\text{Bi}(\text{s})) = 0,290 \text{ V} \qquad E^\circ(\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})) = 0 \text{ V} \qquad E^\circ(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}(\text{s})) = -0,126 \text{ V}$$

- Données thermodynamiques à 25 °C :

Espèce	Bi(l)	Bi(s)	Bi <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (l)	Bi <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (s)	O <sub>2</sub> (g)
$T_{\text{fusion}} (^{\circ}\text{C})$	-	271	-	817	-
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	11	0	-545,4	-573,9	0
Entropie molaire standard absolue $S_m^\circ (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	77,0	56,8	177,6	151,5	205,0

- Propriétés acido-basiques à 25 °C :

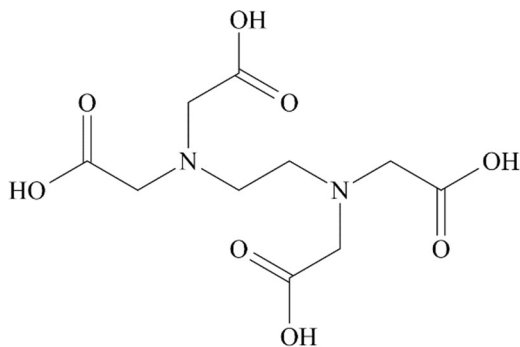
- Avec la notation H<sub>4</sub>Y pour la forme la plus acide de l'EDTA,

$$\text{pK}_{\text{a}1}(\text{H}_4\text{Y}/\text{H}_3\text{Y}^-) = 2,0 \qquad \text{pK}_{\text{a}2}(\text{H}_3\text{Y}^-/\text{H}_2\text{Y}^{2-}) = 2,7$$

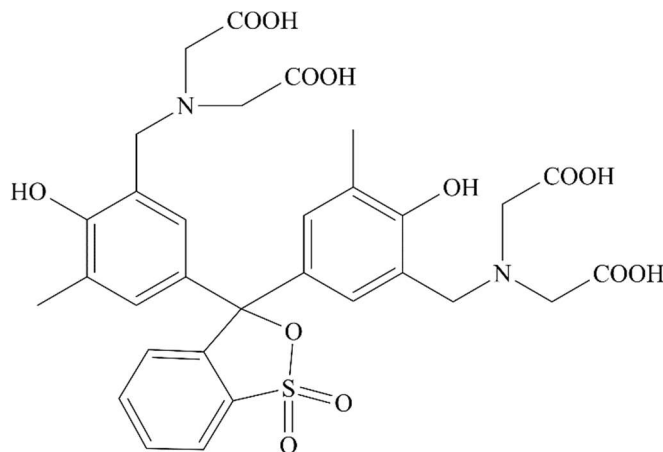
$$\text{pK}_{\text{a}3}(\text{H}_2\text{Y}^{2-}/\text{HY}^{3-}) = 6,2 \qquad \text{pK}_{\text{a}4}(\text{HY}^{3-}/\text{Y}^{4-}) = 10,3$$

- $\text{pK}_a$  de l'orangé de xylénol : 2,6 ; 6,4 ; 6,5 ; 10,5 ; 12,3.
- $\text{pK}_a(\text{RCOOH}/\text{RCOO}^-)$  : environ 5.

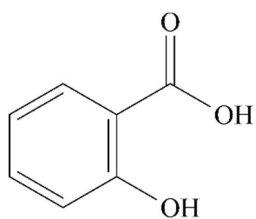
– Structures de molécules :



Forme acide  $H_4Y$  du ligand EDTA



Forme acide de l'orangé de xylénol notée  $H_4XO$

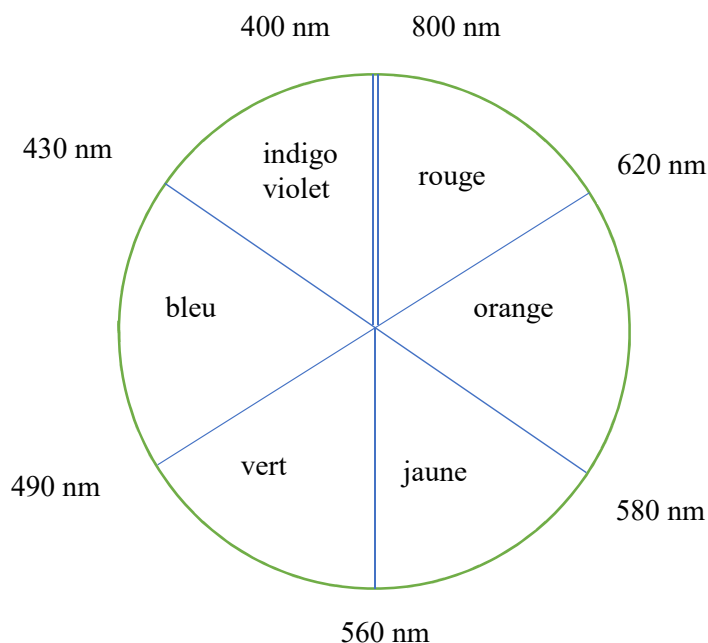


Acide salicylique


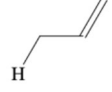

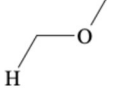

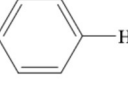

– Constantes de formation des complexes  $\beta = \frac{[ML] c^\circ}{[M][L]}$  correspondant à la réaction de formation d'un complexe avec un seul ligand  $L$  selon  $M(aq) + L(aq) = ML(aq)$  :

Complexe	Bismuth-EDTA $[BiY]^- (aq)$	Bismuth-orangé de xylénol $[Bi(XO)]^- (aq)$
$\log \beta$	27,8	5,45
Couleur en solution	Jaune	Rouge à rouge violacée

– Cercle chromatique :



– Table de RMN  $^1\text{H}$  ; gammes de déplacements chimiques :

Proton							
$\delta$ (ppm)	0,8 – 1,3	1,5 – 2,4	2,3 – 3,7	3,4 – 4,2	4,5 – 7,2	6,5 – 9,0	9,0 – 10,5

## A. Radioactivité du bismuth 209

Le bismuth est noté  $^{209}_{83}\text{Bi}$  dans la classification périodique.

**Q1.** Indiquer à quoi correspondent les deux valeurs 209 et 83 associées à l'atome de bismuth.

Pierre de Marcillac<sup>1</sup> et ses collègues de l'Institut d'astrophysique spatiale d'Orsay ont détecté fortuitement en 2003 la désintégration de l'isotope 209 du bismuth. Cet atome était pourtant considéré comme stable dans les tables les plus récentes des éléments périodiques. La désintégration alpha du bismuth donne le thallium  $^{205}\text{Tl}$ .

**Q2.** Donner la nature de la particule émise lors de la désintégration alpha.

**Q3.** Proposer alors l'équation de désintégration du bismuth 209.

La constante de vitesse de désintégration, notée  $k$ , est de l'ordre de  $1,093 \times 10^{-27} \text{ s}^{-1}$ . On note  $N(t)$  le nombre d'atomes de bismuth à l'instant  $t$  et  $N_0$  le nombre d'atomes à l'instant initial de l'étude.

**Q4.** Exprimer  $N(t)$  en fonction des données de l'énoncé et de  $N_0$ .

**Q5.** Définir et calculer le temps de demi-vie du bismuth 209. Commenter en relation avec la découverte très récente de sa radioactivité.

## B. Obtention du bismuth/métallurgie du bismuth

Le bismuth est un sous-produit de l'industrie de plomb par le procédé Betts<sup>2</sup>. Le plomb est obtenu à partir de sulfure de plomb, mais de manière impure et il contient beaucoup d'autres métaux dont le bismuth.

Le procédé Betts consiste à couler le plomb d'œuvre, après décuivrage et désétamage, sous forme d'anodes de 200 kg. La cathode est en plomb de 2 mm d'épaisseur. L'électrolyte est une solution concentrée d'acide fluosilicique ( $2 \text{ H}^+(\text{aq}), \text{SiF}_6^{2-}(\text{aq})$ ) contenant  $85 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  de plomb (II). La surface de la cathode en contact avec l'électrolyte est environ égale à un mètre carré. On réalise alors l'électrolyse pendant trois jours, à 40-50 °C et sous 0,4 à 0,6 V, avec une densité de courant de  $250 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

**Q6.** Indiquer les trois ions présents majoritairement dans l'électrolyte.

<sup>1</sup> De Marcillac P., Coron N., Dambier G., Leblanc J. & Moalic J. (2003). Experimental detection of  $\alpha$ -particles from the radioactive decay of natural bismuth. *Nature*, 422(6934), 876-878. <https://doi.org/10.1038/nature01541>

<sup>2</sup> Blazy P. & Hermant V. (10 septembre 2013). Métallurgie extractive du bismuth. Techniques de l'ingénieur. <https://doi.org/10.51257/a-v1-m2316>

Pour simplifier, on modélise cet électrolyseur par une anode impure contenant du plomb et du bismuth et une cathode en plomb pur, trempant dans l'électrolyte précédent. On assimile le potentiel rédox du couple  $\text{Bi}^{3+}(\text{aq})/\text{Bi}(\text{s})$  à sa valeur standard. La réduction des ions  $\text{H}^+(\text{aq})$  n'est pas considérée ici pour des raisons cinétiques.

- Q7.** Calculer le potentiel rédox du couple  $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})/\text{Pb}(\text{s})$  dans le milieu.
- Q8.** Identifier l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort présents dans le système et écrire à chaque électrode les demi-équations qui ont lieu. Conclure sur la réaction de fonctionnement de l'électrolyseur.
- Q9.** Faire un schéma de l'électrolyseur en indiquant la polarité, le nom des électrodes et le sens de circulation des différents porteurs de charge.

Le procédé s'appelle « à anode soluble ».

- Q10.** Expliquer cette dénomination et indiquer sous quelle forme le bismuth est récupéré en fin d'électrolyse.
- Q11.** Déterminer la charge totale qui circule dans l'électrolyseur durant les trois jours. Montrer que l'anode n'est pas entièrement consommée au bout des trois jours d'électrolyse.

Le bismuth se retrouve dans les boues anodiques. La phase métallique, obtenue après des traitements non étudiés, renferme le bismuth en présence d'un peu de plomb. Cette phase métallique est alors traitée, en présence d'air, dans un four à coupellation dont la température est d'environ 1000 °C. Le bismuth est alors récupéré sous forme d'oxyde  $\text{Bi}_2\text{O}_3(\text{l})$ .

- Q12.** Écrire la réaction d'obtention de l'oxyde de bismuth à partir du bismuth dans les conditions de température du four à coupellation, en ajustant le coefficient stœchiométrique de l'oxyde de bismuth à 1. On notera cette réaction **[a]**.
- Q13.** Justifier la valeur nulle pour les enthalpies standard de formation du dioxygène gazeux et du bismuth solide à 25 °C.
- Q14.** Déterminer l'enthalpie standard de réaction et l'entropie standard de réaction associées à la réaction **[a]**.

Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham, on considère que les enthalpies standard et entropies standard de réaction sont indépendantes de la température, en dehors de tout changement de phase. On fait également l'hypothèse que les liquides présents dans le milieu sont non miscibles et que la pression partielle du dioxygène dans l'air est égale à 0,2 bar.

- Q15.** Déterminer l'enthalpie libre de réaction de la réaction **[a]** à 1000 °C. Conclure quant au caractère spontané ou non de la réaction **[a]** dans les conditions envisagées.
- Q16.** Détailler les raisons du choix de la température modérée de 1000 °C pour cette réaction **[a]**.  
*Cette question est peu guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Il est demandé d'explicitement la démarche, les choix. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de cette question.*

Le bismuth est finalement obtenu à partir de l'oxyde  $\text{Bi}_2\text{O}_3$  par réduction.

### C. Utilisation du bismuth (0) en chimie organique

Le bismuth (0) peut être utilisé dans la synthèse du diosphénol (molécule **D<sub>2</sub>**, figure 1) qui est un terpénoïde présent dans l'huile essentielle de Buchu<sup>3</sup>. La figure 1 présente la synthèse à partir du (-)-menthol.

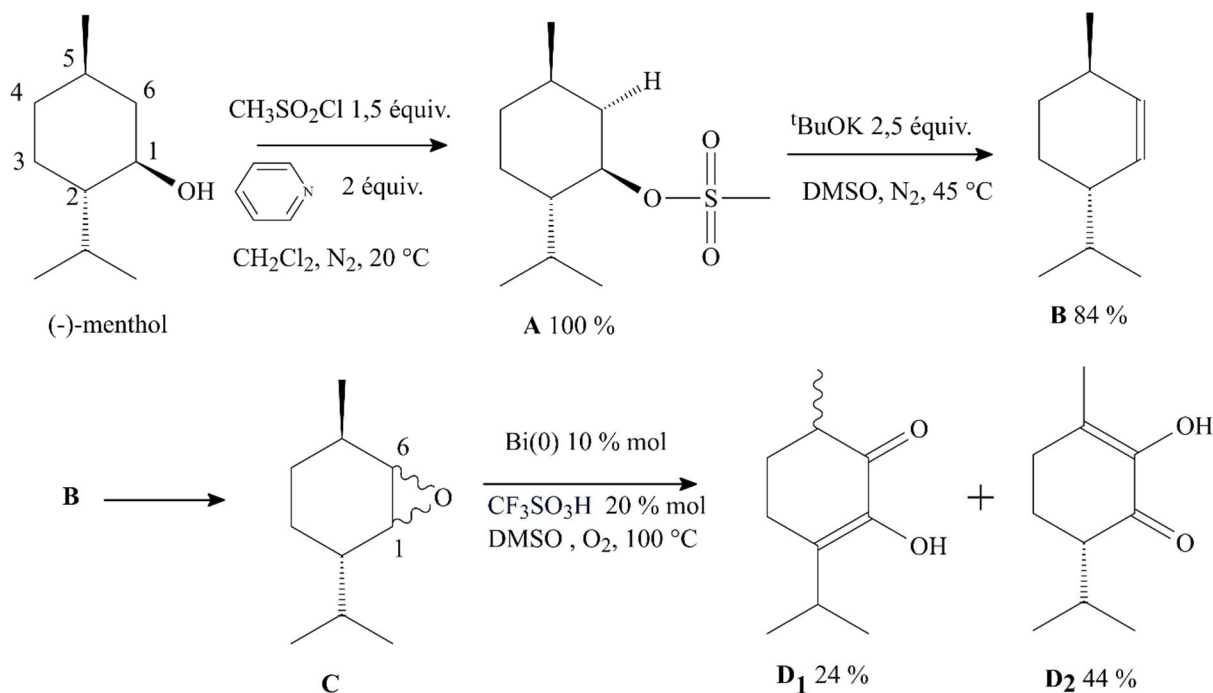


Figure 1 – Schéma de la synthèse du diosphénol à partir du (-)-menthol.

**Q17.** Indiquer la grandeur à laquelle fait référence le signe (-) qualifiant le menthol. Proposer un appareil pour déterminer cette grandeur.

**Q18.** Préciser, en justifiant, le descripteur stéréochimique du carbone 1 de la molécule de (-)-menthol.

Le groupe mésylate  $-\text{OSO}_2\text{CH}_3$  pourra être noté  $-\text{OMs}$  par la suite. L'étape permettant le passage de A à B utilise le tertiobutylate de potassium en excès qui joue le rôle de base forte dans le solvant diméthylsulfoxyde DMSO.

**Q19.** Proposer un mécanisme limite pour l'obtention du composé B à partir de A et expliquer la régiosélectivité de la réaction.

**Q20.** Expliquer l'intérêt de la transformation du groupe hydroxyle du (-)-menthol en groupe mésylate.

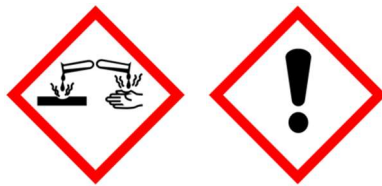
**Q21.** Proposer un réactif en explicitant sa structure pour former l'époxyde C.

Lors de la dernière étape, le bismuth est utilisé comme catalyseur afin d'obtenir les isomères **D<sub>1</sub>** et **D<sub>2</sub>**.

**Q22.** Calculer la variation des nombres d'oxydation des carbones numérotés 1 et 6 sur la figure 1 lors de la dernière étape de la synthèse pour passer de C à **D<sub>2</sub>**. En déduire la nature de cette étape.

<sup>3</sup> Antoniotti S. & Duñach E. (2004). Utilisations récentes de dérivés du bismuth en synthèse organique. *Comptes Rendus Chimie*, 7(6-7), 679-688. <https://doi.org/10.1016/j.crci.2004.03.008>

Lors de cette étape, l'acide trifluorométhanesulfonique est utilisée. Les pictogrammes de sécurité suivants y sont associés :



Q23. Donner un adjectif associé à chacun de ces pictogrammes et les précautions à prendre.

### D. Utilisation du bismuth (III) en chimie organique

Le bismuth au degré d'oxydation (III) peut être utilisé comme acide de Lewis dans de nombreuses réactions. Le bismuth se trouve dans la quinzième colonne et sur la sixième période de la classification périodique.

Q24. Préciser la configuration électronique de valence du bismuth dans son état fondamental et justifier la stabilité du degré d'oxydation (+III).

Q25. Définir un acide de Lewis et donner un exemple d'acide de Lewis utilisé comme catalyseur (autre que le bismuth).

La molécule BG9719, antagoniste des récepteurs de l'adénosine A1, est utilisée dans le traitement des thérapies rénales. BG9719 peut être synthétisée à partir de l'acide (2R,3R)-bicyclo[2.2.1]hept-5-ene-2,3-dicarboxylique (**figure 2**). Sa synthèse diastéréosélective peut être menée à partir du menthol et de dichlorure de l'acide fumarique **F** et est présentée sur la **figure 3** page suivante.

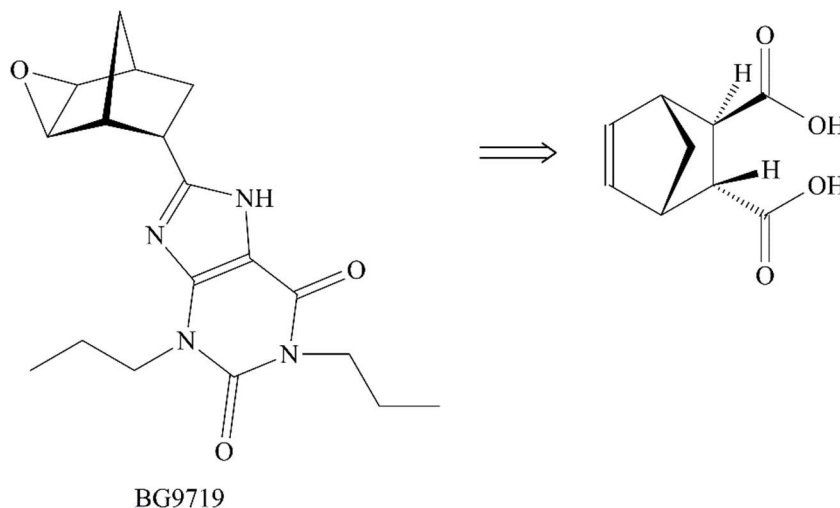
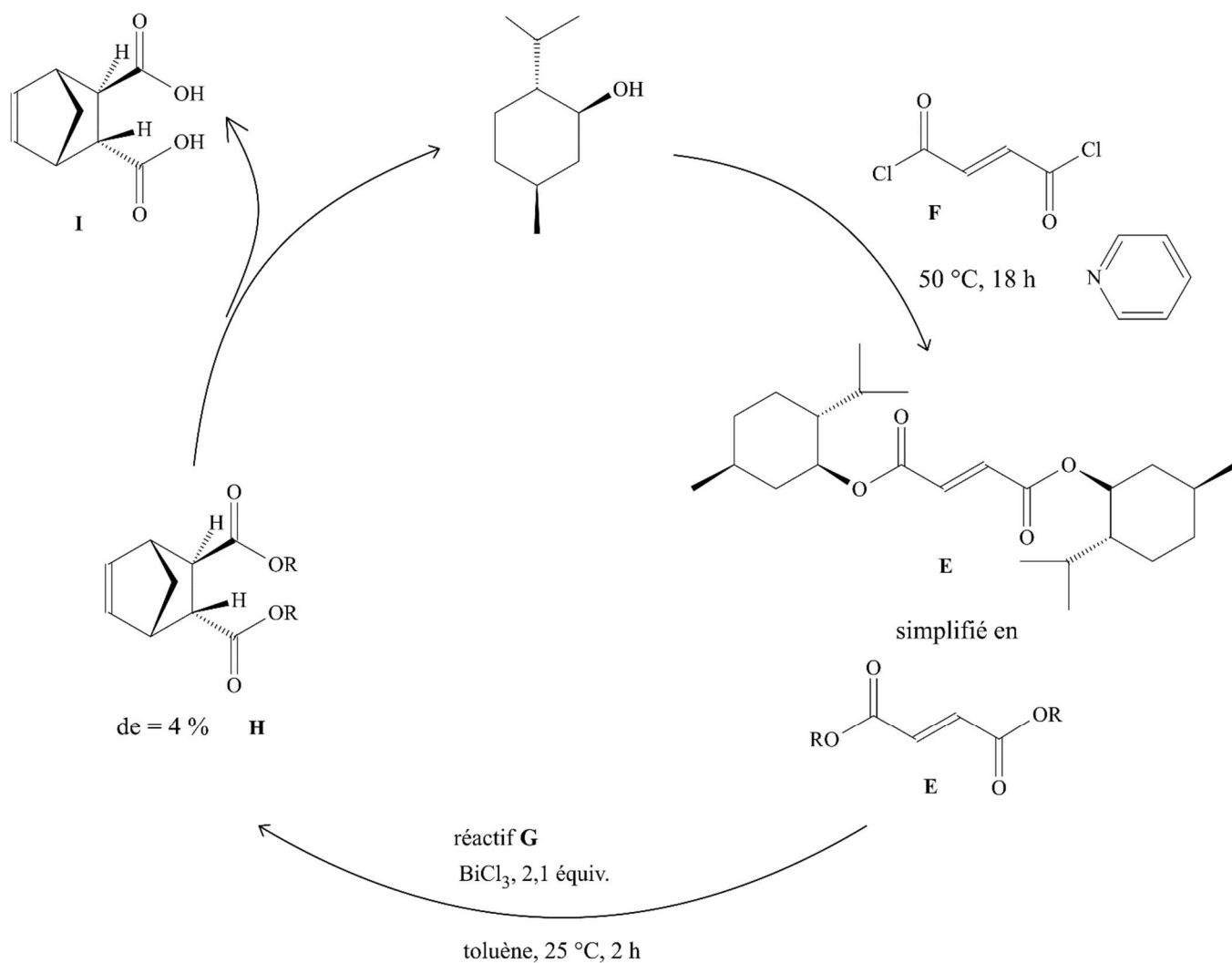


Figure 2 – Rétrosynthèse de l'antagoniste BG9719.

On étudie tout d'abord l'obtention du diester **E**. On notera R le groupe (+)-menthyl pour simplifier les structures.

Q26. Proposer un mécanisme pour l'obtention du composé **E** à partir du dichlorure de l'acide fumarique **F** dans la pyridine. On pourra simplifier judicieusement toute structure pour alléger l'écriture du mécanisme.



**Figure 3** – Synthèse de l'acide (2*R*,3*R*)-bicyclo[2.2.1]hept-5-ene-2,3-dicarboxylique noté **I**, d'après Kiesman & Petter<sup>4</sup>.

Lors de l'étape suivante de la synthèse, la réaction de Diels-Alder est menée en présence de chlorure de bismuth dans le toluène pour obtenir **H** à partir de **E** purifié. Le chlorure de bismuth joue ici un rôle de catalyseur.

On définit l'excès diastéréomérique *de* comme étant la valeur absolue de la différence entre les quantités relatives des deux diastéréoisomères produits dans une réaction :

$$de = \frac{|P_1 - P_2|}{P_1 + P_2}$$

**Q27.** Donner un réactif **G** adapté pour obtenir **H** par la réaction de Diels-Alder.

Un autre composé minoritaire **H'** est obtenu lors de cette étape.

**Q28.** Représenter **H'** et indiquer sa relation d'isomérisie avec la molécule **H**. Calculer la quantité relative de chacun deux isomères **H** et **H'**. Commenter.

<sup>4</sup> Kiesman W. F. & Petter R. C. (2002). Lewis-acid catalysis of the asymmetric Diels-Alder reaction of dimethyl fumarate and cyclopentadiene. *Tetrahedron Asymmetry*, 13(9), 957-960. [https://doi.org/10.1016/s0957-4166\(02\)00213-6](https://doi.org/10.1016/s0957-4166(02)00213-6)

Le produit **H** a été caractérisé par RMN  $^1\text{H}$  ( $\text{CDCl}_3$ , 270 MHz) et présente, entre autres, deux signaux caractéristiques à 6,25 ppm (doublet dédoublé, 1H) et à 6,05 ppm (doublet dédoublé, 1H).

**Q29.** Attribuer les deux signaux, autant que possible, et justifier leur multiplicité.

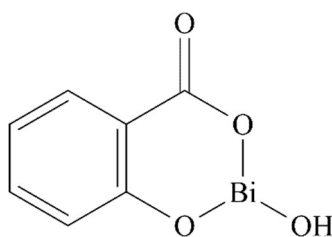
Lors de la dernière étape, on forme à partir de **H** l'acide carboxylique souhaité.

**Q30.** Proposer une ou plusieurs étapes de synthèse et les conditions opératoires associées pour l'obtention de l'acide carboxylique **I** à partir de **H**.

**Q31.** Expliquer l'intérêt de l'utilisation du (+)-menthol dans cette synthèse.

## E. Utilisation en pharmacologie

Le sous-salicylate de bismuth (**figure 4**) est utilisé comme médicament pour soulager les malaises gastriques et les diarrhées.



**Figure 4** – Structure du sous-salicylate de bismuth.

On se propose de déterminer la masse de bismuth dans un comprimé de Pepto Bismol par un titrage complexométrique avec l'EDTA. La structure de l'EDTA est détaillée dans les données. La notice du médicament indique 262 mg de bismuth par comprimé.

Le protocole de dosage ci-dessous est proposé<sup>5</sup> :

Un comprimé de masse 1,180 g est écrasé dans un mortier. On introduit 0,150 g de la poudre obtenue dans un erlenmeyer de 250 mL dans lequel on ajoute 10 mL d'acide nitrique ( $\text{H}^+(\text{aq}), \text{NO}_3^-(\text{aq})$ ) à  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Après avoir homogénéisé le mélange, on ajoute 40 mL d'eau distillée et on porte le mélange à ébullition pendant 15 minutes. On transvase quantitativement le contenu dans une fiole jaugée de 100 mL et on ajuste au trait de jauge avec de l'eau distillée. On appelle S la solution ainsi obtenue.

Cette solution S est finalement titrée par une solution d'EDTA de concentration  $C = 0,0100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  en présence d'orangé de xylénol qui sert d'indicateur coloré. Le volume équivalent obtenu est de 15,9 mL.

Lors de la mise en solution en milieu acide, on admet que le sous-salicylate de bismuth est transformé de manière quantitative en ion  $\text{Bi}^{3+}$  et en acide salicylique. De plus, l'acide nitrique ajouté est en large excès par rapport au sous-salicylate de bismuth.

**Q32.** Calculer le pH de la solution S, avant qu'elle ne soit titrée.

<sup>5</sup> Steinert R. M., Heikes M. E., Mitchell-Koch J. T., Baker G. A. & Mitchell-Koch K. R. (2022). Complexometric titration of bismuth in over-the-counter stomach relief products. *Journal Of Chemical Education*, 99(11), 3723-3730. <https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.2c00764>

**Q33.** Tracer le diagramme de prédominance en pH du ligand EDTA. Conclure sur la forme prédominante de ce ligand dans le domaine de pH utilisé dans le protocole.

**Q34.** En s'appuyant sur les données fournies, écrire l'équation de la réaction support du titrage et calculer sa constante d'équilibre. Conclure.

L'orangé de xylénol est utilisé ici comme indicateur coloré. Sa structure est fournie dans les données en début d'énoncé. En solution acide (pH inférieur à 6,7), il possède un maximum d'absorption autour de 435 nm. Les complexes formés avec l'ion  $\text{Bi}^{3+}$  sont de couleur rouge à violacée.

**Q35.** Indiquer la couleur de l'orangé de xylénol en solution acide en absence d'ion bismuth, puis en présence d'ions bismuth et expliquer le changement de couleur attendu lors du dosage.

L'incertitude-type  $u(m)$  sur la masse de bismuth déterminée par le titrage d'un comprimé complet est estimée par une simulation Monte-Carlo codée en langage Python. L'exécution du script renvoie :  $u(m) = 3,3134715376757486$  mg.

**Q36.** Exploiter le titrage pour déterminer la masse de bismuth dans un comprimé complet. Présenter le résultat muni de son incertitude-type. Comparer avec les données fournies par la notice du médicament.

## MINEURE PHYSIQUE

### Histoire de la première mesure de la célérité de la lumière dans le vide : Ole Rømer et les éclipses de Io (6 points)

Ce problème s'intéresse à la première mesure historique de la célérité de la lumière dans le vide. Cette célérité, notée  $c$  dans tout le sujet, est fixée aujourd'hui à  $299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le Système International d'unités.

L'astronome Ole Rømer est le premier à démontrer que la célérité de la lumière est finie en utilisant une méthode basée sur les modifications des périodes apparentes du mouvement du satellite Io autour de Jupiter. Il publie ses résultats en 1676 dans le *Journal des Sçavans*.

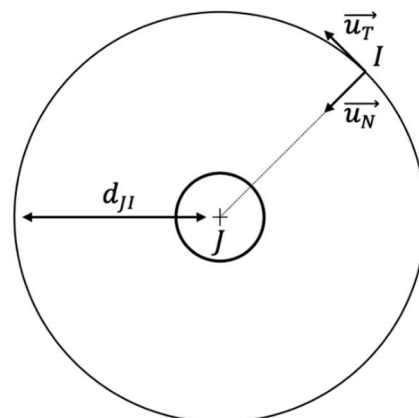
On propose dans ce problème de reconstituer le principe de cette méthode avec des mesures plus modernes.

#### Données

- Masse de Jupiter :  $M_J = 1,90 \times 10^{27}\text{ kg}$ .
- Masse de Io :  $M_I = 8,93 \times 10^{22}\text{ kg}$ .
- Masse du Soleil :  $M_S = 1,99 \times 10^{30}\text{ kg}$ .
- Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{ USI}$ .
- Distance Jupiter-Io :  $d_{JI} = 4,22 \times 10^8\text{ m}$ .
- Distance Soleil-Jupiter :  $d_{SJ} = 7,78 \times 10^{11}\text{ m}$ .
- Distance Soleil-Terre :  $d_{ST} = 1,50 \times 10^{11}\text{ m}$ .

#### A. Le système Jupiter-Io

On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}_J$  centré sur le centre de Jupiter  $J$  que l'on suppose galiléen. Le satellite Io de masse  $M_I$  est assimilé à un point matériel  $I$  ayant une trajectoire circulaire de centre  $J$  et de rayon  $d_{JI}$  (**figure 1**). On note  $v$  la vitesse de Io dans  $\mathcal{R}_J$ . On a également représenté sur ce schéma le repère de Frenet lié à Io avec les vecteurs unitaires  $\vec{u}_T$  tangent à la trajectoire de Io autour de Jupiter et  $\vec{u}_N$ , centripète, normal à la trajectoire.



**Figure 1** – Représentation de la trajectoire circulaire de Io ( $I$ ) autour de Jupiter ( $J$ ).

- Q1.** Donner les expressions des vecteurs vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  de Io en orbite circulaire de rayon  $d_{JI}$  autour de Jupiter dans le repère de Frenet en fonction de la vitesse  $v$ ,  $\frac{dv}{dt}$  et  $d_{JI}$ .

- Q2.** Donner l'expression, dans le repère de Frenet, de la force gravitationnelle exercée par Jupiter sur Io en fonction de la constante de gravitation  $G$ , de la masse de Jupiter  $M_J$ , de la masse de Io  $M_I$  et de la distance Io-Jupiter  $d_{JI}$ . On parle aussi de loi de gravitation universelle de Newton.
- Q3.** Déterminer l'unité de la constante de gravitation  $G$  dans le système d'unités de base du Système International en explicitant précisément le raisonnement suivi.
- Q4.** Montrer que le mouvement est uniforme et déterminer la vitesse  $v$  de Io en orbite circulaire autour de Jupiter en fonction de  $G$ ,  $M_J$  et  $d_{JI}$ .
- Q5.** En déduire la relation suivante vérifiée par la période de révolution  $T$  de Io autour de Jupiter :

$$\frac{T^2}{d_{JI}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}.$$

- Q6.** Donner le nom de cette relation.
- Q7.** Réaliser l'application numérique pour  $T$  et l'exprimer dans une unité adaptée.

## B. Le système Soleil-Terre-Jupiter

Les orbites de Jupiter et de la Terre sont supposées circulaires uniformes dans le même sens autour du Soleil et dans le même plan. On note  $T_T$  la période de révolution de la Terre autour du Soleil et  $T_J$  la période de révolution de Jupiter autour du Soleil telle que  $T_J = 11,8$  ans. On note aussi  $d_{ST}$  la distance Terre-Soleil et  $d_{SJ}$  la distance Soleil-Jupiter.

On considère, à l'instant  $t = 0$ , que le Soleil, la Terre et Jupiter sont alignés dans cet ordre-là. À la date  $\Delta t$ , on a pour la première fois une nouvelle situation d'alignement dans le même ordre.

- Q8.** Faire un schéma représentant la position de la Terre et de Jupiter sur leurs orbites dans le référentiel héliocentrique aux instants  $T_T$  et  $\Delta t$ .
- Q9.** Montrer que l'instant  $\Delta t$  s'écrit :

$$\Delta t = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T}.$$

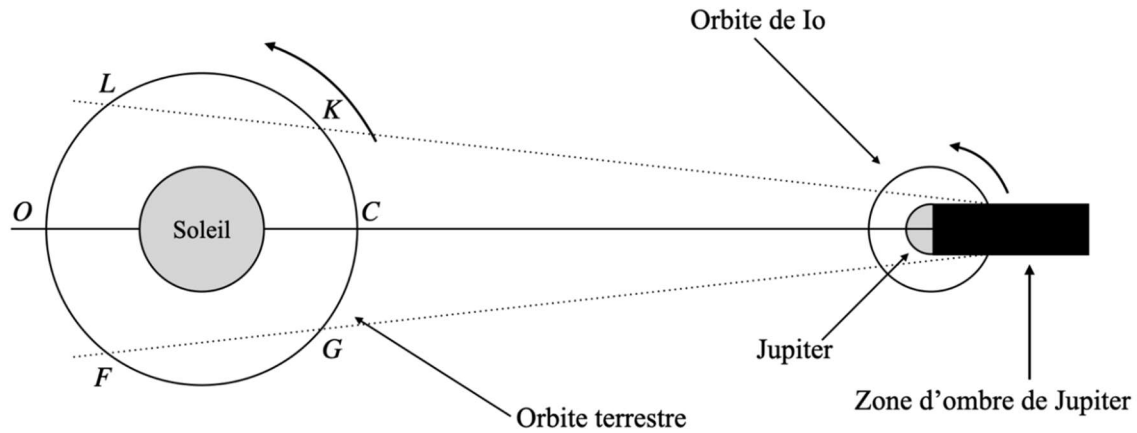
Réaliser l'application numérique pour  $\Delta t$  et l'exprimer en jours.

## C. Le Principe de la mesure de Rømer

Rømer observe les éclipses de Io depuis la Terre et note leurs périodes apparentes pour différentes positions de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Pour comprendre le principe de la mesure de Rømer, on se place dans le référentiel dans lequel le Soleil et Jupiter sont fixes (appelé référentiel synodique). La Terre orbite autour du Soleil dans le sens trigonométrique sur la trajectoire circulaire représentée sur la **figure 2** (page suivante). Ce mouvement circulaire autour du Soleil se fait avec la période  $\Delta t$  déterminée précédemment aussi appelée année synodique.

Io orbite autour de Jupiter sur sa trajectoire circulaire uniforme dans le même plan que celui de rotation de la Terre et de Jupiter autour du Soleil. Les distances de la **figure 2** ne sont pas à l'échelle et la distance Soleil-Jupiter est bien plus grande en réalité de sorte que la zone d'ombre de Jupiter est quasiment cylindrique. Dans le référentiel synodique, on admet que la période propre de rotation

de Io autour de Jupiter est  $T$ . On remarque qu'elle correspond à la durée entre deux entrées successives de Io dans la zone d'ombre, mais aussi à la durée entre deux sorties successives de la zone d'ombre.



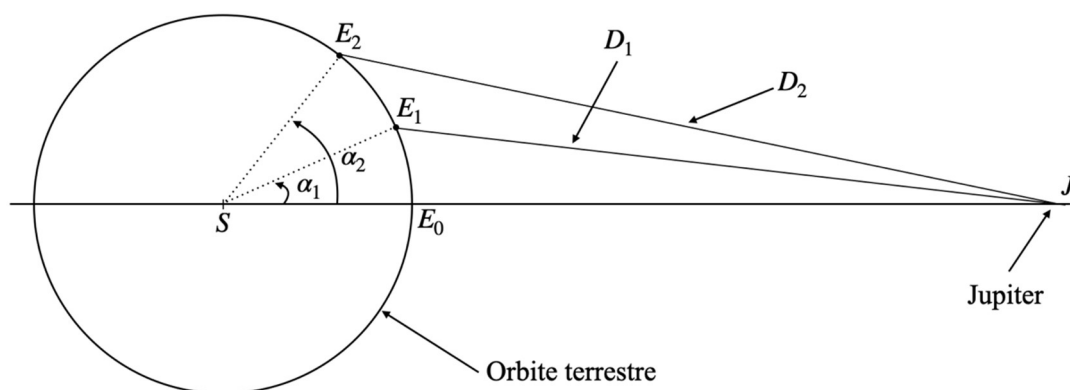
**Figure 2** – Schéma de principe du protocole utilisé par Ole Rømer<sup>6</sup>.

En observant les éclipses de Io depuis la surface terrestre, Rømer note que leur période apparente  $T_{app}$  depuis la Terre est plus grande lorsque la Terre est située sur l'arc de son orbite contenant  $KL$  que quand les mesures sont effectuées lorsque la Terre se trouve sur l'arc de son orbite contenant  $FG$ .

**Q10.** Expliquer qualitativement ces observations et montrer comment elles ont permis à Rømer de conclure au caractère fini de la célérité de la lumière ; on pourra s'aider d'un schéma représentant notamment la position de la Terre sur son orbite à un instant  $t$  et sa position à un instant  $t + T$ .

*Le candidat est invité à expliciter son raisonnement, même non abouti, pour prise en compte lors de l'évaluation.*

On peut aller plus loin que Rømer et mesurer cette célérité de la lumière à partir de résultats plus récents en s'aidant d'une simulation numérique. L'analyse est conduite à partir de la **figure 3**.



**Figure 3** – Géométrie du système Soleil-Terre-Jupiter entre deux orbites de Io successives. La distance parcourue par la Terre entre  $E_1$  et  $E_2$  est délibérément exagérée pour plus de visibilité.

<sup>6</sup> D'après Shea J. H. (1998). Ole Rømer, the speed of light, the apparent period of Io, the Doppler effect, and the dynamics of Earth and Jupiter. *American Journal Of Physics*, 66(7), 561-569. <https://doi.org/10.1119/1.19020>

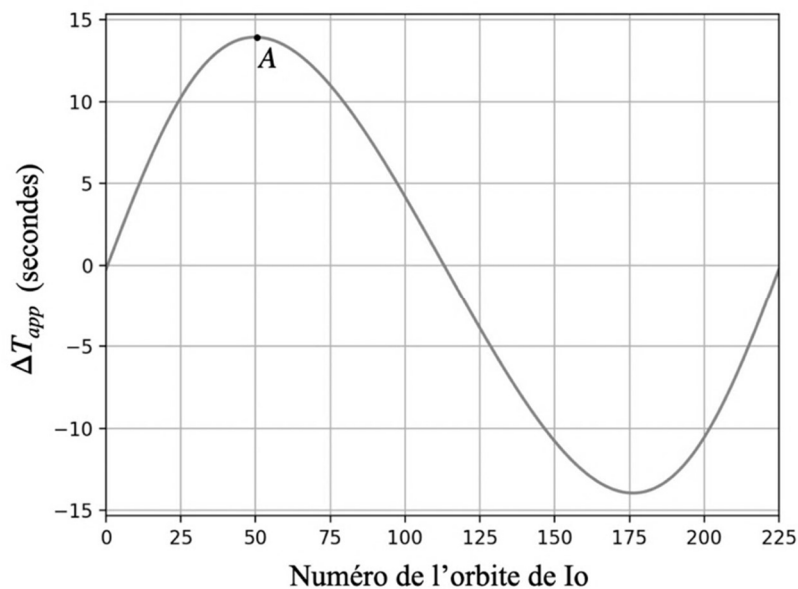
La Terre se trouve en  $E_1$  (repérée par  $\alpha_1$  sur la **figure 3**) lorsque Io sort de la zone d'ombre de Jupiter. La Terre est en  $E_2$  (repérée par  $\alpha_2$ ) lorsque Io sort à nouveau de l'ombre après un tour autour de Jupiter. On note  $D_1 = E_1J$  la distance Terre-Jupiter lorsque la Terre se trouve en  $E_1$  (confondue avec la distance Terre-Io tant  $d_{JI}$  est faible devant les autres distances en jeu ici) et  $D_2 = E_2J$ .

Lorsque la Terre est en  $E_i$ , on initie une mesure de la période apparente de sortie de Io et la mesure s'arrête lorsque la Terre est en  $E_{i+1}$  : on note cette période apparente  $T_{app}(E_i)$ . On définit  $\Delta T_{app}(E_i)$  telle que

$$\Delta T_{app}(E_i) = T_{app}(E_i) - T.$$

**Q11.** Exprimer  $T_{app}(E_1)$  en fonction de  $T$ ,  $D_2$ ,  $D_1$  et la célérité de la lumière dans le vide  $c$ , puis  $\Delta T_{app}(E_1)$  en fonction de  $D_2$ ,  $D_1$  et  $c$ .

On voit donc, dans cette dernière relation, que la mesure de  $\Delta T_{app}$  connaissant la différence de distance entre  $D_1$  et  $D_2$  permettrait de remonter à la valeur de  $c$ . Les résultats de la **figure 4** sont obtenus en mesurant  $\Delta T_{app}$  sur 225 périodes de rotation de Io autour de Jupiter et donc sur 225 points  $E_i$  différents.



**Figure 4** – Variation (en secondes) de la période apparente de Io durant une année synodique de 225 orbites de Io.

**Q12.** En utilisant les résultats des questions précédentes et sachant que la période de rotation de Io autour de Jupiter est  $T = 1,53 \times 10^5$  s, expliquer pourquoi le graphe de la **figure 4** est tracé pour 225 périodes de rotation de Io autour de Jupiter.

**Q13.** Recopier l'allure de la courbe de la **figure 4** sur la copie et placer les points correspondant aux instants où la Terre se trouve aux points  $C$  et  $O$  de la **figure 2**. Justifier soigneusement.

**Q14.** Sur un schéma représentant le Soleil, Jupiter et l'orbite terrestre comme sur la **figure 3**, placer le point  $A$  sur l'orbite terrestre correspondant à la position où  $\Delta T_{app}$  est maximal.

**Q15.** Exprimer la distance  $\Delta L$  parcourue par la Terre sur son orbite dans le référentiel synodique pendant une période propre  $T$  de Io en fonction de  $T$ ,  $d_{TS}$  et de la durée d'une année synodique  $\Delta t$ .

**Q16.** À partir du point *A* de la **figure 4** et en approchant l'arc de cercle parcouru par la Terre sur son orbite à un segment de droite, estimer la valeur de la célérité  $c$  de la lumière dans le vide. Commenter.

Le principe de cette méthode basée sur l'observation des variations de la période apparente causées par le mouvement relatif de la Terre et de Io porte aujourd'hui le nom d'un phénomène qui ne sera découvert que 166 ans après la publication de Rømer.

**Q17.** Donner le nom de ce phénomène, le décrire et donner au moins une autre de ses manifestations.

## MAJEURE PHYSIQUE

### Une histoire de la mesure de la célérité de la lumière dans le vide (14 points)

Ce problème, constitué de trois parties A, B et C indépendantes, s'intéresse à la mesure de la célérité de la lumière dans le vide à travers différentes expériences historiques. Cette célérité, notée  $c$  dans tout le sujet, est fixée aujourd'hui à  $299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le Système International d'unités.

#### A. Mesure de $c$ par utilisation de circuits électriques : Rosa & Dorsey (1907)

Avant 1900, de nombreuses expériences se sont succédées pour déterminer la célérité  $c$  (Galilée, Rømer, Fizeau, Foucault, etc.), mais toujours basées sur la mesure d'une distance et d'un temps, ce qui rend la mesure délicate tant la valeur de  $c$  est grande. Au début du XX<sup>e</sup> siècle, après l'émergence des travaux de Maxwell sur l'électromagnétisme, l'idée est venue de mesurer  $c$  sans mesurer de distance et de temps, mais à partir des constantes électromagnétiques fondamentales<sup>7</sup> : la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  et la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$ .

*Les sous-parties A.1, A.2.a et A.2.b sont indépendantes.*

#### Données pour la partie A

- Vecteurs unitaires associés à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
- Équations de Maxwell relatives aux champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

où  $\rho$  désigne la densité volumique de charges et  $\vec{j}$  la densité volumique de courant.

- Relation d'analyse vectorielle où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

#### A.1. La théorie électromagnétique de Maxwell

- Q1.** Simplifier les équations de Maxwell relatives aux champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  dans le cas d'un espace vide de charge et de courant.
- Q2.** En déduire que les équations de propagation des champs (ou équations d'onde) peuvent s'écrire :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

<sup>7</sup> Rosa E. B. & Dorsey N. E. (1907). A new determination of the ratio of the electromagnetic to the electrostatic unit of electricity. *Bulletin Of The Bureau Of Standards*, 3(3), 433. <https://doi.org/10.6028/bulletin.070>

On cherche des solutions de ces équations en coordonnées cartésiennes sous la forme d'onde électromagnétique :

$$\begin{cases} \vec{E} = E \left( t - \frac{z}{c} \right) \vec{e}_x \\ \vec{B} = B \left( t - \frac{z}{c} \right) \vec{e}_y \end{cases}$$

**Q3.** Montrer en quelques lignes qu'il s'agit d'une onde progressive en précisant la direction et le sens de propagation, ainsi que la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.

On choisit des fonctions particulières pour  $E$  et  $B$  en prenant des solutions sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right) \vec{e}_x \\ \vec{B} = B_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right) \vec{e}_y \end{cases}$$

**Q4.** Expliquer pourquoi l'onde est plane, harmonique, transverse et polarisée rectilignement.

**Q5.** En utilisant la forme des solutions données, simplifier l'équation d'onde électrique et déterminer la relation liant  $c$ ,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  en justifiant rigoureusement le raisonnement.

Les travaux de Maxwell permettent d'assimiler la lumière à une onde électromagnétique (dont la longueur d'onde se situe dans une certaine gamme). La célérité de cette onde  $c$  est reliée au produit  $\mu_0 \epsilon_0$ , ce que l'on va mettre à profit dans une méthode électrocinétique de détermination de  $c$ .

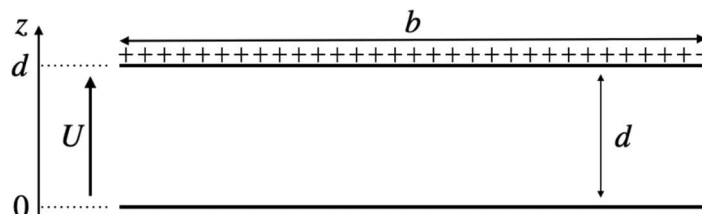
## A.2. Le principe de la mesure électrocinétique

Une mesure de  $c$  basée sur un circuit  $LC$  peut être effectuée dans un laboratoire de lycée. Le protocole suivi dans cette partie correspond à celui publié en 2014 par Doran *et al.*<sup>8</sup>.

### A.2.a. Le condensateur

On considère d'abord un condensateur formé de deux plaques carrées d'étain, parallèles, de côté  $b$ , de surface d'aire  $A_c$ , se faisant face, distantes d'une distance  $d$  telle que  $d \ll b = \sqrt{A_c}$  et séparées par de l'air dont la permittivité est égale à celle du vide  $\epsilon_0$  (**figure 1**).

Soumis à une différence de potentiel constante  $U$ , sa plaque supérieure se charge positivement avec la charge  $+Q > 0$  et sa plaque inférieure se charge négativement avec une charge opposée  $-Q$ .



**Figure 1** – Modélisation du condensateur plan unitaire. Les plaques d'étain sont suffisamment fines pour qu'on puisse les modéliser correctement par des plans.

<sup>8</sup> Doran P., Hawk W. & Siegel P. B. (2014). Measuring  $c$  with an LC Circuit. *The Physics Teacher*, 52(6), 368-370. <https://doi.org/10.1119/1.4893095>

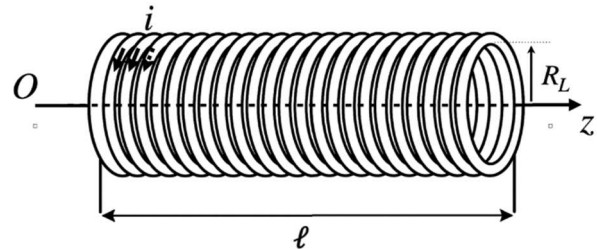
- Q6.** En négligeant les effets de bord, déterminer la direction du champ électrique  $\vec{E}$  créé par le condensateur ainsi formé et préciser son sens.
- Q7.** Déterminer l'expression du champ électrique créé par le plan infini inférieur (plan  $z = 0$ ) supposé seul en tout point de l'espace en fonction de  $Q$ ,  $A_C$  et  $\epsilon_0$ . Justifier rigoureusement le raisonnement en précisant notamment le théorème utilisé.
- Q8.** En déduire le champ électrique  $\vec{E}$  créé par le condensateur en tout point de l'espace.
- Q9.** Après avoir rappelé la définition de la capacité d'un condensateur, déterminer l'expression de la capacité du condensateur plan, notée  $C_u$ , en fonction de  $A_C$ ,  $\epsilon_0$  et  $d$ .

On s'intéresse désormais au condensateur du circuit  $LC$  qui peut être fabriqué en plaçant  $n$  paires identiques de plaques carrées d'étain en parallèle.

- Q10.** Montrer que la capacité  $C_n$  d'un tel condensateur est égale à la somme des capacités des  $n$  condensateurs unitaires en parallèle et exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ ,  $A_C$ ,  $\epsilon_0$  et  $d$ .

### A.2.b. La bobine

On étudie désormais la bobine obtenue en réalisant un solénoïde par enroulement d'un fil de cuivre autour d'un tube rigide. On obtient ainsi un solénoïde de longueur  $\ell$ , de section  $A_L$  constitué d'un enroulement de  $N$  spires jointives circulaires, de rayon  $R_L$  et de même axe  $Oz$  (**figure 2**).



**Figure 2** – Représentation de la bobine fixant notamment le sens du courant dans les spires.

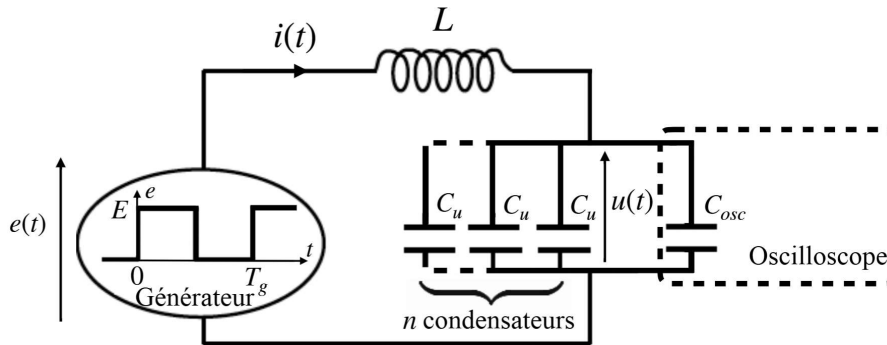
Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité  $i$  indépendante du temps. Il est considéré comme suffisamment long ( $\ell \gg \sqrt{A_L}$ ) de manière à négliger les effets de bord et on suppose le champ magnétique nul à l'extérieur du solénoïde. On néglige de plus la largeur des fils constituant les spires de rayon  $R_L$ .

- Q11.** Déterminer la direction et le sens du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde pour  $i > 0$ .
- Q12.** Énoncer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique.
- Q13.** Déterminer l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde en tout point intérieur à celui-ci en précisant soigneusement la démarche suivie.
- Q14.** Rappeler la relation entre le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers les  $N$  spires du solénoïde, le coefficient d'auto-induction  $L$  et l'intensité  $i$  du courant qui traverse le solénoïde. Cette relation définit le coefficient d'auto-induction  $L$  du solénoïde.
- Q15.** En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction  $L$  de la bobine en fonction de  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $A_L$  et  $\ell$ .

On se place dorénavant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) en considérant que les résultats démontrés ici en statique restent valable lorsque l'intensité  $i$  dépend du temps.

### A.2.c. Le circuit LC

Le circuit électrique considéré est un circuit constitué du condensateur formé des  $n$  condensateurs unitaires en parallèle de capacité totale  $C_n$  de la sous-partie A.2.a (en parallèle avec le condensateur de capacité  $C_{osc}$  de l'oscilloscope), de la bobine d'inductance  $L$  de la sous-partie A.2.b et d'un générateur de tension créneau carrée  $e(t)$  qui délivre  $E = 3,2$  V pendant une demi-période  $\frac{T_g}{2}$  de  $750$   $\mu$ s et  $0$  V pendant l'autre demi-période de  $750$   $\mu$ s (**figure 3**). Ce temps est choisi assez grand pour permettre la charge totale du condensateur.



**Figure 3** – Schéma du circuit électrique de l'expérience<sup>9</sup>.

On note  $C$  la capacité équivalente de l'ensemble des  $n$  condensateurs unitaires et du condensateur  $C_{osc}$  de l'oscilloscope en parallèle.

**Q16.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u(t)$  mesurée par l'oscilloscope pour les instants  $t \in \left[\frac{T_g}{2}, T_g\right]$  où le générateur délivre une tension nulle.

**Q17.** En déduire que  $u(t)$  est de forme sinusoïdale et déterminer sa période  $T$  en fonction de  $L$  et  $C$ .

**Q18.** En utilisant les sous-parties A.2.a et A.2.b, montrer que :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 N^2 A_L \mu_0}{\ell} \left( \frac{\epsilon_0 A_C}{d} n + C_{osc} \right).$$

Les dimensions choisies pour le condensateur sont telles que  $A_C = 0,067$  m<sup>2</sup> et  $d = 3$  mm. Les caractéristiques choisies pour la bobine sont : nombre de spires  $N = 700$ , rayon des spires  $R_L = 2,5$  cm et longueur de la bobine  $\ell = 19$  cm.

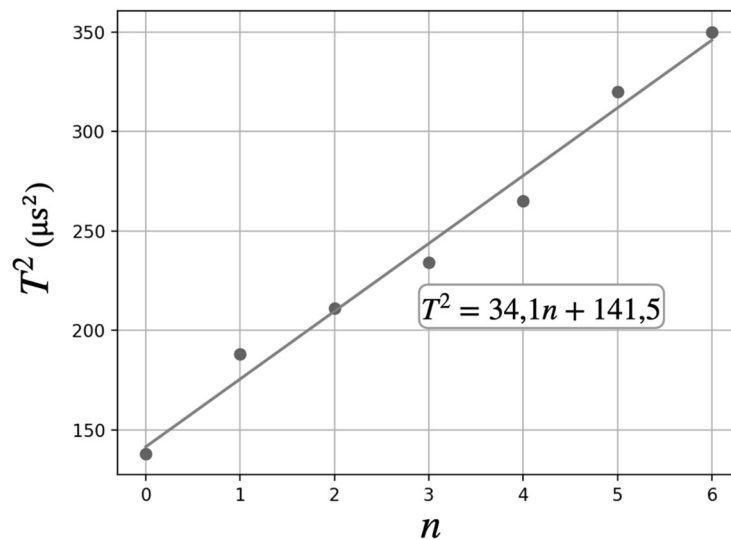
Lors de l'expérience, on fait varier  $n$  et on mesure, pour chaque valeur de  $n$ , la période  $T$  des oscillations propres du circuit. On trace  $T^2$  en fonction de  $n$  (**figure 4**, page suivante).

**Q19.** Déterminer la célérité de la lumière dans le vide  $c$  à partir des résultats de cette expérience.

La principale source d'incertitude est la mesure de la distance  $d$  entre les plaques d'étain du condensateur (on néglige notamment l'incertitude sur la pente de la régression linéaire). On considère que l'incertitude-type sur la distance  $d$  est  $u(d) = 1$  mm.

**Q20.** Déterminer l'incertitude-type sur la mesure de  $c$  en négligeant toutes les autres sources d'incertitude et commenter la valeur obtenue en calculant notamment l'écart normalisé (ou z-score).

<sup>9</sup> D'après Doran P., Hawk W. & Siegel P. B., *op. cit.*



**Figure 4** – Graphe représentant  $T^2$  en fonction du nombre de condensateurs unitaires  $n$  en parallèle. Les points correspondent aux mesures brutes. Le résultat de la régression linéaire est donné<sup>10</sup>.

## B. Mesure de $c$ par utilisation de cavités électromagnétiques : la cavité cylindrique d'Essen & Gordon-Smith (1948)

Les ondes électromagnétiques ne peuvent pas se propager dans un métal parfait : elles sont réfléchies. Ainsi, si on réalise une boîte creuse en métal, on peut confiner des ondes à l'intérieur. Un tel système constitue une cavité électromagnétique.

La détermination de la célérité de la lumière peut être réalisée grâce à l'utilisation de cavités électromagnétiques de différentes géométries avec des ondes électromagnétiques de fréquence de l'ordre du GHz (cavité cylindrique en cuivre : Essen & Gordon-Smith en 1948<sup>11</sup> ; cavité parallélépipédique : Scofield en 1990).

### Données pour la partie B

- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- Permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- Unité imaginaire :  $i$  telle que  $i^2 = -1$ .
- Vecteurs unitaires associés à un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .
- Expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques pour un vecteur de la forme  $\vec{A} = A_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$  :

$$\Delta \vec{A} = \left( \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta.$$

Dans ce problème, on considère une cavité électromagnétique réalisée avec un cylindre creux en cuivre, d'axe  $Oz$ , de rayon intérieur  $a$  et de hauteur  $h$ , fermé suivant ses deux bases (**figure 5**, page suivante). L'air placé à l'intérieur de la cavité a les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide.

<sup>10</sup> D'après Doran P., Hawk W. & Siegel P. B., *op. cit.*

<sup>11</sup> Essen L. & Gordon-Smith A. C. (1948). The velocity of propagation of electromagnetic waves derived from the resonant frequencies of a cylindrical cavity resonator. *Proceedings Of The Royal Society Of London A Mathematical And Physical Sciences*, 194(1038), 348-361. <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0085>

On recherche les modes du champ électrique dans la cavité qui s'écrivent en notation complexe sous la forme :

$$\vec{E} = \underline{E}(r, z, t) \vec{e}_\theta = E_0(r) g(z) e^{i\omega t} \vec{e}_\theta$$

où  $\omega$  désigne la pulsation réelle du champ électrique et  $E_0(r)$  et  $g(z)$  sont des fonctions réelles. Le champ électrique réel est alors tel que

$$\vec{E}(M, t) = \text{Re}(\vec{E}(r, z, t))$$

où  $\text{Re}$  désigne la partie réelle.

Dans ce modèle, les parois imposent la nullité de la composante tangentielle du champ électrique à sa surface pour une interface air-métal.

**Q21.** Déterminer les valeurs de  $r$  (respectivement  $z$ ) pour lesquelles  $E_0(r)$  (respectivement  $g(z)$ ) s'annule compte tenu des conditions aux parois.

**Q22.** Sachant que le champ électrique vérifie l'équation d'onde dans le vide déterminée à la **question Q2** de la partie A, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\underline{E}(r, z, t)$ , puis celle reliant  $E_0(r)$ ,  $g(z)$  et leurs dérivées, en utilisant l'expression de l'opérateur laplacien fournie dans les données.

**Q23.** Effectuer une séparation des variables et montrer que  $g(z)$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 g}{dz^2} = \beta g(z)$$

où  $\beta$  est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question. Dédire de la **question Q21** que le signe de  $\beta$  est nécessairement négatif.

**Q24.** Dédire de la question précédente et de la **question Q21** que seuls certains modes peuvent exister pour  $g$ , que l'on notera  $g_p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) et que l'on écrira à une constante multiplicative  $A_p$  près que l'on ne cherchera pas à déterminer.

**Q25.** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $E_0$  se met, pour  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé, sous la forme :

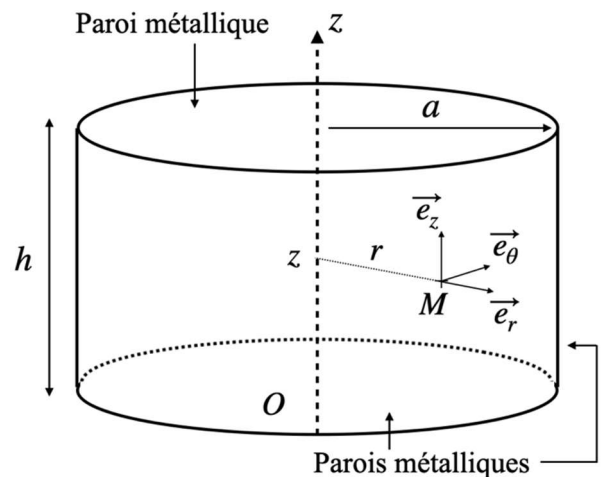
$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_0}{dr} - \frac{E_0(r)}{r^2} = E_0(r) \left( p^2 \frac{\pi^2}{h^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right).$$

**Q26.** Mettre cette équation sous la forme suivante :

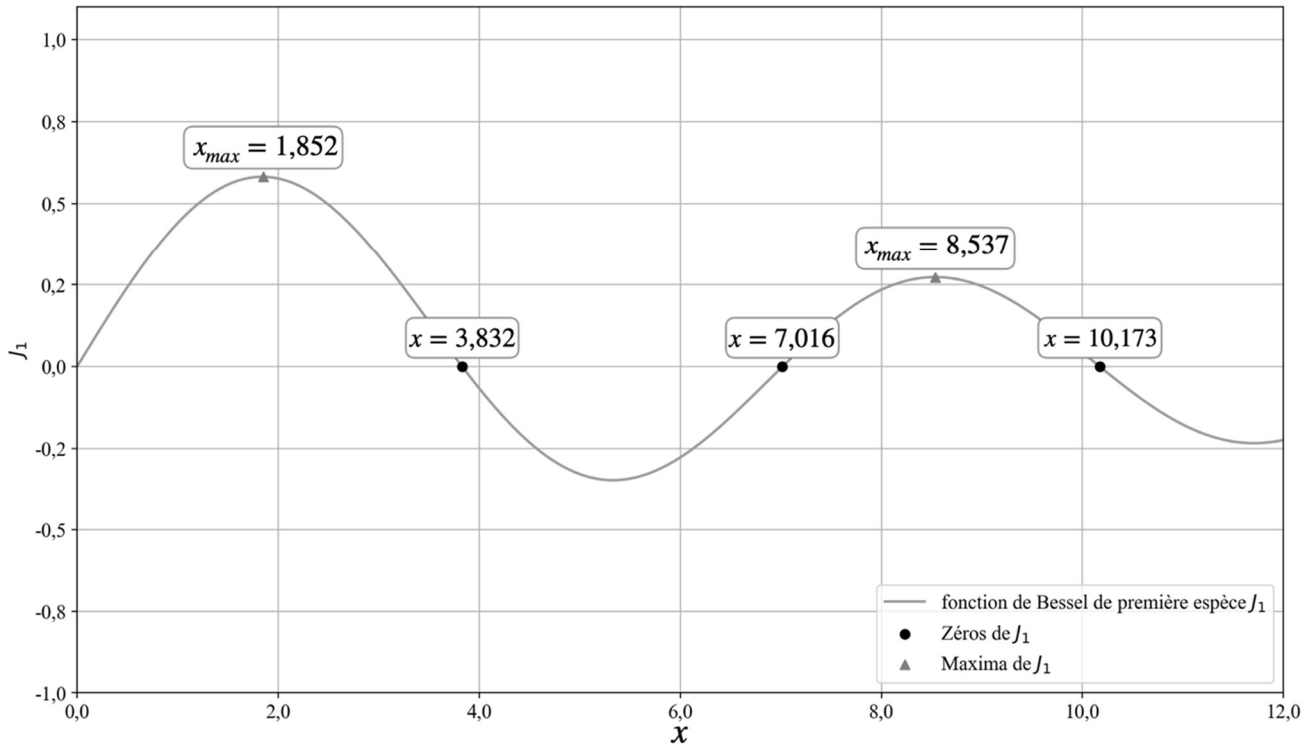
$$x^2 \frac{d^2 \tilde{E}_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\tilde{E}_0}{dx} + (x^2 - 1)\tilde{E}_0(x) = 0$$

avec  $\tilde{E}_0(x) = E_0(r)$  et en précisant l'expression de  $x$ , grandeur adimensionnée, en fonction de  $\omega$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $p$  et  $r$ .

La solution d'une telle équation dans ces conditions est appelée fonction de Bessel de première espèce  $J_1(x)$  et est tracée sur la **figure 6** (page suivante).



**Figure 5** – Cavité cylindrique et définition des coordonnées cylindriques (rapportées à l'axe  $Oz$  du cylindre ; l'origine  $O$  est au centre du disque inférieur).



**Figure 6** – Tracé de la fonction de Bessel de première espèce  $J_1$  sur lequel apparaît aussi la position de zéros et de maxima de la fonction avec indication des abscisses correspondantes.

**Q27.** À partir du tracé de la **figure 6** et de la **question Q21**, déduire que seuls certains modes peuvent exister pour  $E_0$ , que l'on notera  $E_{0,n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On notera  $x_n$  l'abscisse du  $n$ -ième zéro de la fonction de Bessel de première espèce  $J_1$ .

**Q28.** Écrire le champ électrique  $\underline{E}_{n,p}(r, z, t)$  pour le mode  $(n, p)$  à une constante multiplicative près que l'on ne cherchera pas à déterminer. On utilisera pour cela les résultats des **questions Q24** et **Q27** et on fera apparaître  $J_1\left(\frac{x_n r}{a}\right)$  dans l'expression du champ électrique.

**Q29.** Montrer alors que la fréquence du mode  $(n, p)$  précédent de la cavité s'écrit :

$$f_{n,p} = c \sqrt{\frac{x_n^2}{4\pi^2 a^2} + \frac{p^2}{4h^2}}.$$

Dans leur article, Essen et Gordon-Smith utilisent une cavité cylindrique en cuivre de hauteur 8,558 cm et de diamètre 7,398 cm. Lorsqu'ils excitent la cavité avec le mode  $(n = 1, p = 1)$ , ils mesurent une fréquence  $f_{1,1} = 5,244$  GHz.

**Q30.** Calculer la célérité de la lumière dans le vide  $c$  à partir des résultats expérimentaux d'Essen et Gordon-Smith. Commenter.

### C. Mesure de $c$ par utilisation des battements entre les deux modes longitudinaux d'un laser Hélium-Néon : D'Orazio *et al.* (2010)

L'invention du laser et la démocratisation de son utilisation à la fin du XX<sup>e</sup> siècle ont permis à D'Orazio et son équipe de déterminer la célérité de la lumière dans le vide à partir des battements entre les deux modes longitudinaux d'un laser Hélium-Néon<sup>12</sup>.

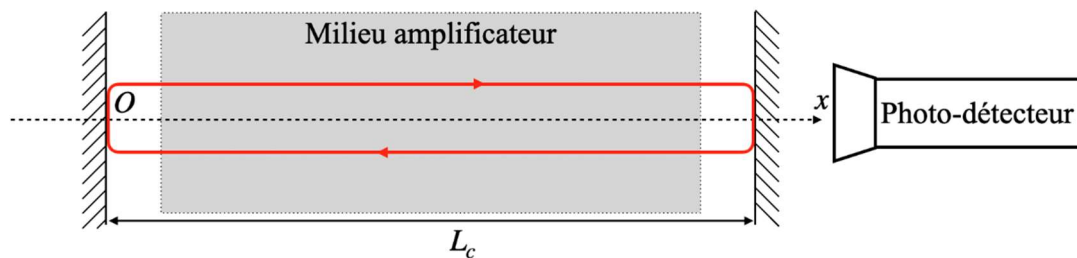
#### Données pour la partie C

- Indice de l'air :  $n_{air} = 1,00024$ .
- Relation trigonométrique :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2}.$$

On considère un miroir de coefficient de réflexion  $R_g = 1$  situé à gauche en  $x = 0$  sur la **figure 7**. À une distance  $L_c$  de celui-ci, on place un miroir de coefficient de réflexion  $R_d = 0,99$ . L'ensemble constitue une cavité Fabry-Pérot à une dimension. À l'intérieur de la cavité, on place un milieu amplificateur de lumière dont on pourra assimiler l'indice optique à  $n_{air}$ .

Une onde électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda$  effectue des aller-retours dans la cavité. La cavité entre en résonance lorsqu'une onde ayant fait un aller-retour dans la cavité se trouve en phase avec l'onde initiale.



**Figure 7** – Représentation de la cavité laser.

**Q31.** Déterminer la relation entre  $\lambda$  et  $L_c$  pour que la cavité entre en résonance. On introduira un entier naturel  $m$  pour écrire la relation. En déduire la fréquence  $f_m$  associée aux ondes à  $m$  fixé.

Dans la pratique, seulement deux valeurs particulières de  $m$ , notées  $q \in \mathbb{N}$  et  $q + 1$ , sont observées dans cette cavité. Ainsi, la vibration lumineuse en sortie de la cavité s'écrit :

$$s(t) = E_q \cos(2\pi f_q t) + E_{q+1} \cos(2\pi f_{q+1} t).$$

On place en sortie de la cavité un photodétecteur qui mesure l'intensité lumineuse

$$I(t) = \langle s(t)^2 \rangle_{\tau_d}$$

où  $\langle \cdot \rangle_{\tau_d}$  représente la moyenne temporelle pendant une durée  $\tau_d$ .

**Q32.** Déterminer la grandeur instantanée  $s(t)^2$ , ainsi que les fréquences présentes dans son spectre.

<sup>12</sup> D'Orazio D. J., Pearson M. J., Schultz J. T., Sidor D., Best M. W., Goodfellow K. M., Scholten R. E. & White J. D. (2010). Measuring the speed of light using beating longitudinal modes in an open-cavity HeNe laser. *American Journal Of Physics*, 78(5), 524-528. <https://doi.org/10.1119/1.3299281>

Les conditions sont telles que les inégalités suivantes sont respectées :

$$\tau_d \ll \frac{1}{f_{q+1} - f_q} \quad ; \quad \tau_d \gg \frac{1}{f_q + f_{q+1}} \quad ; \quad \tau_d \gg \frac{1}{f_q} \quad ; \quad \tau_d \gg \frac{1}{f_{q+1}} .$$

**Q33.** Montrer que le spectre de  $I(t)$  ne contient qu'une seule fréquence non nulle. On nomme cette fréquence la fréquence des battements  $f_b$  que l'on exprimera en fonction de  $f_q$  et  $f_{q+1}$ .

**Q34.** Montrer finalement que :

$$f_b = \frac{c}{2n_{air}L_c} .$$

L'expérience proposée par D'Orazio et son équipe<sup>13</sup>, puis par Taim & Kuder<sup>14</sup>, revient à faire varier la largeur  $L_c$  de la cavité de  $\Delta L_c$  et à mesurer les fréquences de battement  $f_b$  pour chaque valeur de  $\Delta L_c$ . On obtient alors le tableau suivant :

$\Delta L_c$ (en mm)	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000	7,0000
$f_b$ (en MHz)	372,333	371,410	370,492	369,577	368,669	367,764	366,864

**Q35.** Déterminer la célérité de la lumière dans le vide  $c$  à partir de ces résultats expérimentaux. Commenter.

*Cette question est peu guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Il est demandé d'explicitement la démarche, les choix et de les illustrer par un schéma le cas échéant. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de cette question.*

<sup>13</sup> D'Orazio D. J., Pearson M. J., Schultz J. T., Sidor D., Best M. W., Goodfellow K. M., Scholten R. E. & White J. D., *op. cit.*

<sup>14</sup> Taim M. & Kuder N. (2021). Determination of the speed of light from the longitudinal modes beat frequencies of an open-cavity helium-neon laser. *arXiv (Cornell University)*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2105.03476>

## MINEURE CHIMIE

### Exercices de chimie (6 points)

Les deux parties, A et B, sont indépendantes.

#### Données

- Constantes acido-basiques à 25 °C :

$$pK_a(\text{CO}_2(\text{aq})/\text{HCO}_3^-(\text{aq})) = 6,4$$

$$pK_a(\text{HCO}_3^-(\text{aq})/\text{CO}_3^{2-}(\text{aq})) = 10,3$$



$$pK_a(\text{NH}_4^+(\text{aq})/\text{NH}_3(\text{aq})) = 9,2$$

$$pK_e = 14$$

- Numéros atomiques :

C	N	O	Al	S	Ag
6	7	8	13	16	47

- Indicateurs colorés :

Indicateur coloré	Pictogramme	Teinte acide	Zone de virage	Teinte basique
Hélianthine		rouge	3,1 – 4,4	jaune
Rouge de méthyle	-	rouge	4,4 – 6,2	jaune
Rouge de crésol	-	jaune	7,2 – 8,8	violet
Phénolphtaléine		incolore	8,2 – 10,0	rose

### A. Étude du nettoyage de l'argenterie

L'argent est noté  $^{108}_{47}\text{Ag}$  dans la classification périodique.

**Q1.** Indiquer à quoi correspondent les deux valeurs 108 et 47 associées à l'atome d'argent.

Des traces de sulfure d'hydrogène  $\text{H}_2\text{S}(\text{g})$  présentes dans l'air sont responsables de la formation de dépôts noirs à la surface des objets en argent. En effet, l'argent est oxydé par le dioxygène de l'air en présence de sulfure d'hydrogène pour former le sulfure d'argent  $\text{Ag}_2\text{S}(\text{s})$  noir et très stable. L'équation de la réaction **[1]** modélisant la transformation est<sup>15</sup> :

<sup>15</sup> Wu Q., Zhou H., Bertrand L., Stols-Witlox M., Brambilla L. & Joseph E. (2025). Natural and artificial aging methods for silver mock-ups in recent conservation and heritage studies: a short review. *Chemistry - Methods*. <https://doi.org/10.1002/cmt.202400055>



Sa constante d'équilibre  $K^\circ$  est égale à  $10^{140}$  à 25 °C.

**Q2.** Donner la structure de Lewis du sulfure d'hydrogène, où l'atome de soufre est l'atome central. Interpréter la géométrie dite « coudée » de cette molécule.

**Q3.** Déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  présents dans l'équation bilan [1].

Dans le cas étudié, on définit le quotient de réaction à l'aide des fractions molaires (notées  $x$ ) des espèces gazeuses, pour une pression totale égale à 1 bar :

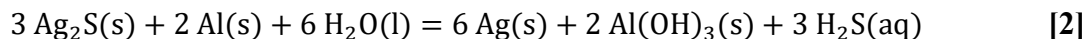
$$Q_r = \frac{x(\text{H}_2\text{O})^b}{x(\text{H}_2\text{S})^2 x(\text{O}_2)} .$$

L'air contient 20,9 % de dioxygène, 78,1 % de diazote et 1,0 % de vapeur d'eau environ. La quantité de sulfure d'hydrogène est estimée à 2 ppm (partie par million).

**Q4.** Calculer le quotient de réaction de [1] et comparer à la constante d'équilibre. Conclure.

On s'intéresse à présent à une « recette de grand-mère » de nettoyage de l'argenterie noircie par  $\text{Ag}_2\text{S(s)}$ . Cette recette est dite « avec un bain de sel ». Elle consiste à prendre une feuille d'aluminium et à la disposer dans une cuvette (non métallique) contenant de l'eau chaude et du gros sel ( $\text{Na}^+(\text{aq}), \text{Cl}^-(\text{aq})$ ). On dépose ensuite l'objet à nettoyer dans la cuvette *en contact* avec l'aluminium et on laisse agir une heure. On rince et on sèche avec un chiffon doux<sup>16</sup>.

L'aluminium est un métal très réducteur qui réagit avec le sulfure d'argent pour reformer l'argent. L'aluminium se transforme alors en hydroxyde d'aluminium. L'équation de la réaction [2] modélisant la transformation est donnée ci-dessous :



**Q5.** Identifier les deux couples d'oxydo-réduction mis en jeu ici et écrire les demi-équations rédox correspondantes, équilibrées en milieu acide.

On est ici en présence d'une pile constituée des deux solides  $\text{Ag}_2\text{S(s)}$  et  $\text{Al(s)}$  en contact.

**Q6.** Donner la configuration électronique à l'état fondamental de l'atome d'aluminium, ainsi que celle de son ion le plus stable formé par départ de tous ses électrons de valence.

**Q7.** Proposer un schéma de cette pile en précisant quels sites constituent respectivement l'anode et la cathode. Indiquer sur le schéma le sens de circulation des électrons entre les deux solides.

**Q8.** Préciser quel est le rôle du sel dans ce dispositif. Juger alors de la pertinence de la dénomination « nettoyage de l'argenterie avec un bain de sel ».

**Q9.** Commenter le choix de l'eau chaude pour ce procédé.

---

<sup>16</sup> Brénon F. (s. d.). Nettoyer l'argenterie par « une recette de grand-mère » : comment ça marche ? Mediachimie. <https://www.mediachimie.org/ressource/nettoyer-l'argenterie-par-«-une-recette-de-grand-mère-»-comment-ça-marche>

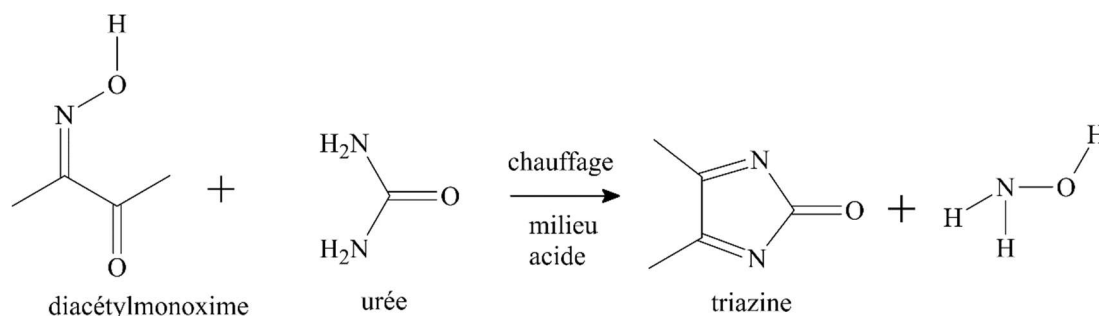
## B. Dosage de l'urée

L'urée, de formule  $\text{NH}_2\text{-CO-NH}_2$ , est un solide incolore qui est le produit majoritaire issu de la dégradation des acides aminés chez l'humain. Cette substance est présente dans le sang et les urines. En tant que substance déchet du métabolisme humain, le dosage de l'urée est une indication importante de l'état de santé d'un patient.

Lorsque le taux d'urée est supérieur à  $8,3 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$  chez l'adulte et  $4,2 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$  chez le nourrisson, il est considéré comme anormal et peut être à l'origine d'une maladie sous-jacente. On se propose ici d'étudier deux types de dosages de l'urée.

### B.1. Dosage colorimétrique

Cette méthode s'appuie sur le fait que l'urée réagit avec le diacétylmonoxime de manière quantitative en milieu acide pour former un composé coloré. La **figure 1** présente le bilan de la réaction entre l'urée et le diacétylmonoxime en solution aqueuse. La triazine formée est rouge et peut être détectée en spectroscopie UV-visible<sup>17</sup> à la longueur d'onde d'absorption maximale de 520 nm.



**Figure 1** – Réaction de l'urée et du diacétylmonoxime.

**Q10.** Reproduire la **figure 1** et la compléter en ajoutant les doublets non liants.

**Q11.** Nommer et expliciter la loi qui relie la grandeur mesurée en spectroscopie UV-visible et la concentration en triazine. Préciser les unités de chaque terme.

**Q12.** Proposer un protocole à mettre en œuvre pour la détermination de la concentration en urée par la méthode de dosage par étalonnage.

### B.2. Dosage pH-métrique<sup>18</sup>

L'urée est un acide trop faible pour être titré directement par une base. On réalise une hydrolyse quantitative de l'urée en ions carbonate et ammonium en utilisant un catalyseur enzymatique : l'uréase. La **figure 2** présente l'équation bilan de la réaction d'hydrolyse.



**Figure 2** – Hydrolyse de l'urée en présence d'uréase.

<sup>17</sup> Notice d'un kit de dosage : Urea colorimetric assay kit. (s. d.). MyBioSource. <https://www.mybiosource.com/assay-kits/urea-colorimetric/2556560>

<sup>18</sup> Hierso J.-C., Collange E. & Lucas D. (juillet 2002). Le dosage de l'urée : méthode enzymatique. *L'actualité chimique*, 258, 24-27. <https://new.societechimiquedefrance.fr/numero/le-dosage-de-luree-methode-enzymatique-p24-n258>

**Q13.** Rappeler les caractéristiques d'un catalyseur.

On réalise l'hydrolyse d'un prélèvement de  $V_0 = 25$  mL d'urée dans l'eau, à la concentration inconnue notée  $C_0$ , en présence d'uréase. À cette solution hydrolysée, on ajoute  $V_a = 30$  mL de solution d'un monoacide fort ( $H^+(aq), A^-(aq)$ ) de concentration  $C = 0,01 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ . On admet que cet ajout correspond à un très large excès d'acide fort par rapport aux autres réactifs (trois équivalents par rapport à l'espèce réagissant).

**Q14.** Identifier l'espèce qui réagit avec l'acide fort introduit en excès, écrire la réaction et justifier qu'elle est quantitative.

**Q15.** Proposer un exemple d'acide fort qui peut convenir.

**Q16.** Réaliser un tableau d'avancement en quantité de matière pour caractériser l'état du système avant le dosage en déterminant les quantités de matière des espèces en solution en fonction de  $C$ ,  $C_0$ ,  $V_0$  et  $V_a$ .

L'excès d'acide fort est titré par une solution d'hydroxyde de sodium ( $Na^+(aq), OH^-(aq)$ ) de concentration  $C_b = 0,01 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ . On détecte l'équivalence à l'aide d'un indicateur coloré adapté, le rouge de méthyle, et un volume de 10,2 mL est obtenu à l'équivalence.

**Q17.** Exploiter le dosage en déterminant la concentration en urée dans la solution initiale. Conclure sur la teneur en urée dans l'échantillon et l'état pathologique ou non de la personne traitée.

*Cette question est peu guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Il est demandé d'explicitement clairement la démarche, les choix. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de cette question.*