Problème 1 : applications du plan affine

Notations

– On désigne par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels.
– Soit un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Les coordonnées dans ce repère des points de $\mathscr{P}$ sont notées sous forme de matrices colonnes éléments de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On dira que f vérifie *la condition des droites* si :

1. f est bijective.
2. Pour toute droite D de $\mathscr{P}$, $f(D)$ est aussi une droite de $\mathscr{P}$.

Le but du problème est de trouver toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Partie A : conséquences de la condition des droites et exemples

1. Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.
   1.1. Soient M et N deux points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que l'image par f de la droite (MN) est la droite $(f(M)f(N))$.
   1.2. Soient D et D' deux droites distinctes de $\mathscr{P}$. Montrer que $f(D) \cap f(D') = f(D \cap D')$.
   1.3. Montrer que les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles si et seulement si les droites D et D' sont parallèles.
   1.4. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f(M)$, $f(N)$ et $f(P)$ sont alignés.
   1.5. Soient M, N, P et Q quatre points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme.
2. Soient $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application $f_{A,B}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $AX + B$.
   2.1. Montrer que $f_{A,B}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
   2.2. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f_{A,B}(M)$, $f_{A,B}(N)$ et $f_{A,B}(P)$ sont alignés.
   2.3. Montrer que $f_{A,B}$ vérifie la condition des droites.
3. Soient O', I', J' trois points non alignés de $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O) = O'$, $f_{A,B}(I) = I'$ et $f_{A,B}(J) = J'$.

Partie B : endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$

Soit ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour pour tous nombres réels x et y :

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y),\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \text{ et } \phi(1) = 1\,.$$

1. Montrer que $\phi(0) = 0$ et que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y)$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel non nul y, $\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\phi(n) = n$.
4. Montrer que pour tout nombre rationnel r, $\phi(r) = r$.
5. Soient a et b deux nombres réels, tels que $a \leqslant b$. Montrer que $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. On pourra utiliser l'égalité $b - a = (\sqrt{b-a})^2$.
6. Soit x un nombre réel et soit ε un nombre réel strictement positif.

6.1. Montrer l'existence de deux nombres rationnels x' et x'' tels que $x-\varepsilon \leqslant x' \leqslant x \leqslant x'' \leqslant x+\varepsilon$.

6.2. En déduire que $x-\varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant x+\varepsilon$.

6.3. En déduire que $\phi = Id_{\mathbb{R}}$.

Partie C : un cas particulier

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites et telle que $f(O)=O$, $f(I)=I$ et $f(J)=J$.

1. Justifier l'existence de deux applications ϕ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tous nombres réels x et y, les images par f des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\phi(0)=\psi(0)=0$ et que $\phi(1)=\psi(1)=1$.
3. 3.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   3.2. En déduire que pour tous nombres réels x et y, l'image par f du point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
4. 4.1. Soit x un nombre réel non nul. Soient A et B les points de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Montrer que $(f(A)f(B))$ est parallèle à (IJ).

   4.2. En déduire que pour tout nombre réel x, $\phi(x)=\psi(x)$.
5. 5.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   5.2. Montrer que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$.
6. 6.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$. Montrer que les droites (AC) et (IB) sont parallèles.

   6.2. Montrer que les droites $(f(A)f(C))$ et $(If(B))$ sont parallèles.

   6.3. En déduire que pour tous nombres réels x et y, $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.
7. Montrer que $f = Id_{\mathscr{P}}$.

Partie D : cas général

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.

1. Montrer que $f(O)$, $f(I)$ et $f(J)$ ne sont pas alignés.
2. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O)=f(O)$, $f_{A,B}(I)=f(I)$ et $f_{A,B}(J)=f(J)$.
3. Montrer que $f_{A,B}^{-1} \circ f = Id_{\mathscr{P}}$.
4. Donner toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Problème 2 : équations différentielles

Après avoir étudié la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre particulières.

Notations et rappels

1. Pour une équation différentielle appelée E, on note :
   – EH l'équation homogène associée ;
   – $\mathrm{Sol}(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation E ;
   – $\mathrm{Sol}(EH)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EH.
2. On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles du second ordre, selon lequel :
   étant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, a, b et c des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction y, définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I qui vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0' \end{cases} .$$

Partie A : généralités

Soit E l'équation différentielle définie sur un intervalle I :

$$E : \; y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

où a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et y une application de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.
2. Soit t_0 un réel de l'intervalle I. On considère l'application φ_{t_0}, de $\mathrm{Sol}(EH)$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall y \in \mathrm{Sol}(EH), \quad \varphi_{t_0}(y) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} .$$

   Démontrer que φ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. En déduire que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.
4. *Expression des solutions de E.*
   Soit (y_1, y_2) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(EH)$ et p une solution particulière de E.
   Démontrer que les solutions de l'équation E sont les fonctions y qui s'écrivent sous la forme $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + p$, où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.
5. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation EH. On note w l'application définie sur I par :

$$t \mapsto w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) .$$

5.1. Démontrer que w est une fonction dérivable sur l'intervalle I et que w est solution sur I de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad w'(t) + a(t)w(t) = 0\,.$$

5.2. En déduire que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
- w est identiquement nulle, c'est-à-dire que $\forall t \in I, w(t) = 0\,.$
- w s'annule au moins une fois, c'est-à-dire que $\exists t_0 \in I, w(t_0) = 0\,.$

5.3. Dans cette question, on souhaite démontrer que si (y_1, y_2) est une base de $\mathrm{Sol}(EH)$, alors w ne s'annule pas sur I.
Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $w = 0$ et on considère $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) \neq 0$.
On définit la fonction z sur I par :

$$z : t \mapsto y_1(t_0)y_2(t) - y_2(t_0)y_1(t)\,.$$

Démontrer que z est solution de l'équation différentielle EH avec les conditions initiales $z(t_0) = 0$ et $z'(t_0) = 0$ et en déduire que la famille (y_1, y_2) est liée.
Conclure.

Partie B : solutions bornées d'une équation différentielle à coefficients constants

Soient b un réel et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$E : \quad y''(t) + by(t) = f(t)\,.$$

1. *Étude de l'équation homogène* EH : $y''(t) + by(t) = 0$

   1.1. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sol}(EH)$ suivant les valeurs de b.

   1.2. Déterminer les valeurs du réel b pour lesquelles toutes les fonctions de $\mathrm{Sol}(EH)$ sont bornées.

2. *Étude de l'équation avec second membre*
   On suppose dans cette question que $b = 1$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto g(x) = \int_0^x f(t)\sin(x - t)\mathrm{d}t\,.$$

   Démontrer que g est une solution particulière de E et en déduire la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. *On pourra transformer l'expression* $\sin(x - t)$.

Partie C : étude de quelques propriétés des solutions d'une équation différentielle

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y''(t) + b(t)y(t) = 0$, où b désigne une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. On appelle zéro de la fonction y tout réel t tel que $y(t) = 0$. On souhaite démontrer que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $\mathbb{R}$, le nombre de zéros de y dans $[\alpha, \beta]$ est fini.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y qui possède un nombre infini de zéros dans $[\alpha, \beta]$.

   1.1. Démontrer qu'il existe dans $[\alpha, \beta]$ une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de y deux à deux distincts convergeant vers un réel $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

   1.2. Démontrer que $y(\gamma) = 0$.

1.3. Démontrer que, à partir d'un certain rang, le quotient $T_n = \dfrac{y(z_n) - y(\gamma)}{z_n - \gamma}$ est bien défini et que $y'(\gamma) = 0$.

1.4. En déduire que la solution y est nécessairement identiquement nulle et conclure.

1.5. En déduire que pour une solution y non identiquement nulle, on peut toujours trouver un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}$ dans lequel y ne s'annule pas.

2. On suppose dans cette question que b est une fonction strictement négative sur $\mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'une solution y non identiquement nulle ne peut avoir plus d'un zéro sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, on raisonne à nouveau par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y non identiquement nulle possédant au moins deux zéros.

2.1. *Un résultat préliminaire*
Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et f une fonction convexe deux fois dérivable sur $[\alpha, \beta]$, non identiquement nulle sur $[\alpha, \beta]$ et telle que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Démontrer que nécessairement $f < 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

2.2. Démontrer qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur lequel y est soit convexe, soit concave.

2.3. En déduire une contradiction et conclure.