Problème 1 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.

   Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

   4.1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < \mathrm{e} < v_q$$

   4.2. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

1.

   1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.

   1.2. Calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} \left|P_n(x)\right|$ en fonction de a, b et n.

   1.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n > 0$$

1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.
En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$

2.2. $n \leqslant k \leqslant 2n$

2.3. $k \geqslant 2n+1$

Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geqslant 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \ldots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.
Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera $x = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$.

2. Soit $x \in \,]0,1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \quad \text{où E désigne la fonction partie entière.}$$

2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

2.2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geqslant 2$.

2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \ldots a_n}$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geqslant 2$, $b_0 \geqslant 2$ et :

$$[a_0, \ldots, a_n, \ldots] = [b_0, \ldots, b_n, \ldots]$$

On pose $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \neq b_n\right\}$

3.1. Démontrer que $[a_{n_0}, \ldots, a_n, \ldots] = [b_{n_0}, \ldots, b_n, \ldots]$.

3.2. Démontrer que si $x = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots]$ alors $\alpha_0 x - 1 \leqslant x$ et en déduire que $\alpha_0 = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0,1]$.

4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :
   4.1. une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c $(c \geqslant 2)$.
   4.2. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n+2$.
   4.3. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = (2n+1)(2n+2)$.
5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 2$.
6. Démontrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes , choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la "vraie position" et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, ..., x_n)$, un n-uplet de réels.
On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$
$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$$

1. **Minimisation de G**
   1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
   1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?
2. **Minimisation de L**
   On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :
   $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$
   2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
   $n = 3$, $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$
   2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
   $n = 4$, $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$
   2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
   On distinguera les cas n pair et n impair.
   2.4. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.3 ?

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Étant donné un entier naturel non nul n, on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, ..., A_n\}$ de probabilités respectives $(p_1, ...p_n)$ toutes non nulles.
On définit l'**entropie** de ce système par le nombre :

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. **Deux exemples**

   On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : *Le cheval numéro i remporte la course*. Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

   1.1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

   1.2. $p_1 = \dfrac{1}{8}, p_2 = \dfrac{1}{8}, p_3 = \dfrac{1}{4}, p_4 = \dfrac{1}{2}$

   On va à présent établir la propriété générale suivante :

   l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. **Cas** $n = 2$

   On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.

   On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.

   Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont équiprobables.

3. **Cas général**

   3.1. **Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen**

   Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si :

   $$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

   On considère une fonction f convexe sur I, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

   Démontrer que :

   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

   On pourra procéder par récurrence sur n, en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$ *:*

   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$$

3.2. On admet le théorème suivant :

si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0,1[$.

3.3. Démontrer que $H(A) \leqslant \ln n$. Conclure.

Partie C : théorie de l'information, le cas continu

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Lorsqu'en plus $f \ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x))\,\mathrm{d}x$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. **Deux exemples**

   On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.

   1.1. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

   1.2. h définie par $h(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ si $t \geqslant 0$, $h(t) = 0$ sinon, où λ est un réel strictement positif.

2. **Deux résultats préliminaires**

   2.1. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :

   $$x \ln y \leqslant x \ln x + y - x \text{ et } x \ln y = x \ln x + y - x \Leftrightarrow x = y$$

   2.2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

   On pourra procéder par contraposition.

3. **Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance**

   On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathscr{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :

   - $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle
   - $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.

   On appelle $\mathscr{N}$ cet ensemble.

   3.1. Démontrer que $g \in \mathscr{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1.1

   3.2. Soit f un élément de $\mathscr{N}$. Démontrer que :

   $$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x))\,\mathrm{d}x = H(g)$$

   3.3. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :

   - $H(f) \leqslant H(g)$
   - $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$