ministère Éducation nationale

BEV1-23N
Repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2008

CONCOURS EXTERNE ET TROISIÈME CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS CERTIFIÉS ET CONCOURS D'ACCÈS À DES LISTES D'APTITUDE (CAFEP) CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES
BRETON
TAHITIEN

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Fonctions à variations bornées

Introduction

Dans ce problème, on s'intéresse aux *fonctions à variations bornées*. Cette notion a été introduite en 1881 par Jordan [1] pour étendre un théorème de Dirichlet [2] sur la convergence des séries de Fourier [3]. Il est composé de sept parties A, B, C, D, E, F et G.

Dans la partie A on établit quelques propriétés élémentaires relatives aux fonctions à variations bornées. En introduction de la partie B, on définit une notion de longueur bornée et de longueur pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Son objectif est d'établir des propriétés générales sur cette notion : une inégalité triangulaire, une relation de Chasles... Dans la partie C on établit l'équivalence entre "être de longueur bornée sur tout segment" et "être à variations bornées". La partie D se consacre au cas des fonctions de classe C^1. On y démontre qu'elles sont toujours de longueur bornée et on donne une formule pour calculer leur longueur. La partie E s'intéresse au cas des fonctions périodiques. La partie F est consacrée à l'étude d'un exemple. Dans la partie G, on étend les définitions et les propriétés présentées précédemment aux cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sauf mentions contraires explicitées dans le texte, les parties de ce sujet ne sont pas *a priori* indépendantes.

Notations et définition

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ et $B \subseteq A$, $f|_B$ désigne la restriction de f à B.

• Dans tout le problème, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

• **Pour $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est à variations bornées lorsqu'il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$.**

A. Premières propriétés

A1 Établir que toute fonction monotone définie sur I est à variations bornées.

A2a Montrer que l'ensemble des fonctions à variations bornées définies sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

A2b Établir que ce sous-espace est engendré par l'ensemble des fonctions croissantes sur I.

Dans la fin de cette partie, on considère $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction à variations bornées, et a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

A3 Soit $\alpha \in I$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ croissante et $l \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décroissante telles que $f = k + l$ et $k(\alpha) = 0$.

[1] Camille Marie Ennenmond Jordan, mathématicien français, Lyon 1838 – Paris 1922.
[2] Gustav Peter Dirichlet, mathématicien allemand, Düren 1805 – Göttingen 1859.
[3] Joseph Jean-Baptiste Fourier, mathématicien français, Auxerre 1768 – Paris 1830.

A4 On écrit $f = g+h$ avec g croissante sur I et h décroissante sur I. Prouver que :

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant h(b) - h(a).$$

A5 Montrer que f est bornée sur le segment $[a, b]$.

A6 Établir qu'en tout point intérieur à I, la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche.

B. Fonctions de longueur bornée

Soient a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On rappelle qu'une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie, strictement croissante, qu'on peut noter $(\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$.

Pour $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{i=p} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a, b]$ on ait $\ell(\sigma, f) < \Lambda$. Si f est de longueur bornée sur $[a, b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma} \{ \ell(\sigma, f) \mid \sigma \textbf{ est une subdivision de } [a, b] \}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a, b, c trois éléments de I tels que $a < c < b$.

B1 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$L_a^b(f) \geqslant 0.$$

B2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant L_a^b(f).$$

B3 On suppose que f et g sont de longueur bornée sur $[a, b]$. Établir que $f + g$ est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f + g) \leqslant L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

B4 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On considère une subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de $[a, b]$ et on pose :

$$\begin{cases} q = \max\{ j \in \{0, \cdots, p\} \mid \sigma_j < c \} \\ r = \min\{ j \in \{1, \cdots, p\} \mid \sigma_j > c \} \end{cases}$$

B4a Justifier l'existence de q et de r.

On définit alors les suites finies σ' et σ'' par :

$$\begin{cases} \sigma'_j = \sigma_j \text{ si } j \in \{0, \ldots, q\} \\ \sigma'_{q+1} = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma''_0 = c \\ \sigma''_j = \sigma_{j+r-1} \text{ si } j \in \{1, \ldots, p-r+1\} \end{cases}$$

B4b Montrer que σ' est une subdivision de $[a, c]$ et que σ'' est une subdivision de $[c, b]$.

B4c Montrer que $\ell(\sigma, f) \leqslant \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f)$.

B4d Prouver que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et on considère une subdivision quelconque σ' de $[a, c]$ et une subdivision quelconque σ'' de $[c, b]$.

B5a Démontrer qu'il existe une subdivision de $[a, b]$, notée σ, telle qu'on ait

$$\ell(\sigma, f) = \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f).$$

B5b Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \geqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B6 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I, établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

C. Lien entre "être de longueur bornée" et "être à variations bornées"

On considère $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

C1 Soient a et b dans I avec $a < b$.

C1a Soit $q \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction monotone. Prouver que q est de longueur bornée sur $[a, b]$ et qu'on a :

$$L_a^b(q) = |q(b) - q(a)|.$$

C1b On suppose que f est une fonction à variations bornées. Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$.

C2 On suppose que f est de longueur bornée sur tout segment de I. On choisit λ dans I et on définit alors les fonctions g et h, pour tout $t \in I$, par :

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + L_\lambda^t(f)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - L_\lambda^t(f)\right)$$

Prouver que g est croissante sur I et que h est décroissante sur I.

C3 En déduire que f est à variations bornées si et seulement si f est de longueur bornée sur tout segment de I.

D. Cas des fonctions de classe C^1

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de classe C^1 sur I. *Le but de cette partie est de montrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I et que pour tous α et β dans I on a*

$$L_\alpha^\beta(f) = \int_\alpha^\beta |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

D1 Soient u et v dans I avec $u < v$, établir que $|f(u) - f(v)| \leqslant \displaystyle\int_u^v |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.

D2 Soient a et b dans I avec $a < b$.

D2a Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que $\ell(\sigma, f) \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.

D2b Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que

$$L_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

D3 Soient a et b dans I avec $a < b$, et soit un réel $\varepsilon > 0$.

D3a Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$, tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout x et y éléments de $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ on ait

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

D3b Prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ il existe $c_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ tel que

$$|f'(c_i)|(\sigma_i - \sigma_{i-1}) = |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

D3c En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})| \geqslant \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} |f'(t)|\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1})}{b - a}.$$

D3d Établir que

$$\ell(\sigma, f) \geqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t - \varepsilon.$$

D4 Conclure.

D5 Établir que f est à variations bornées.

E. Cas des fonctions périodiques

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions périodiques à variations bornées. On y utilise certains résultats de la partie A. Par ailleurs, les résultats de cette partie ne sont pas utilisés dans les autres parties.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

On rappelle également que la fonction partie entière est croissante. On considère $T \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la fonction p sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left[\dfrac{x}{T}\right]$.

E1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x - p(x)T \in [0, T[$.

E2 Pour a et b deux réels tels que $a \leqslant b$, établir que :

$$p(a) = p(b) \quad \text{ou} \quad p(a) + 1 \leqslant p(b).$$

E3 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction périodique de période T. On suppose que $f|_{[0,T]}$ est à variations bornées. On peut donc écrire $f|_{[0,T]} = k + l$ avec $k \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ croissante, $l \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ décroissante et $k(0) = 0$ (d'après A3). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned} g(x) &= p(x)k(T) + k\left(x - p(x)T\right) \\ h(x) &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

E3a Justifier que les fonctions g et h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

E3b Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que $g(a) \leqslant g(b)$.

E3c Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = -p(x)k(T) + l\big(x - p(x)T\big)$.

E3d Montrer que pour tout $u \in [0, T]$ on a $l(0) \geqslant l(u) \geqslant l(0) - k(T)$.

E3e Prouver finalement que f est à variations bornées.

E4 On considère la fonction

$$\psi : x \longmapsto \frac{1}{x - [x] - 1}$$

E4a Montrer que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 1.

E4b Parmi les trois fonctions $\psi|_{[0,1[}$, $\psi|_{[0,1]}$ et ψ, quelles sont celles qui sont à variations bornées ? On justifiera chacune des réponses.

Dans la fin de cette partie, on considère la fonction φ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = |\sin x| + \sin x.$$

E5 Donner, sans justification, la représentation graphique de $\varphi|_{[-2\pi, 2\pi]}$ dans un repère qu'on choisira.

E6 Montrer que φ est à variations bornées.

E7 D'après A3 et E6, on peut écrire $\varphi = g + h$ avec $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante vérifiant $g(0) = 0$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ décroissante.

E7a Établir que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(2n\pi) + 2 \leqslant g\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
(Indication : On pourra utiliser A4.)

E7b En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n\pi) \geqslant n$.

E7c Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$?

E7d En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

F. Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

Les premières questions de cette partie peuvent se traiter indépendamment des parties précédentes.

On étudie dans cette partie certaines propriétés de la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

F1a Étudier la parité de f.

F1b Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.

F1c La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

F1d Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

F1e En déduire que f est bornée.

F2 Montrer que la série de terme général $\ln \left(\dfrac{4n+1}{4n-1} \right)$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3 On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{(2n-1)\pi}}$

F3a Vérifier que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et est de limite nulle.

F3b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$

F3c Prouver alors que la série de terme général $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| \mathrm{d}t$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3d En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{u_1} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| \mathrm{d}t$ est divergente.

F4a Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

F4b Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 |f'(t)| \, \mathrm{d}t$?

F5 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $ab \leqslant 0$. Prouver que f n'est pas de longueur bornée sur $[a, b]$.

F6 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Démontrer que l'application $f|_J$ est à variations bornées si et seulement si $0 \notin J$.

G. Généralisation au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée est donc définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}.$$

On peut prolonger la définition introduite au début de la partie B, de fonction de longueur bornée aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

Etant données a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, pour $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{i=p} \|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})\|.$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a, b]$ on ait $\ell(\sigma, f) < \Lambda$. Si f est de longueur bornée sur $[a, b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma} \{\, \ell(\sigma, f) \mid \sigma \textbf{ est une subdivision de } [a, b] \,\}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère deux éléments a et b de I tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note f_i la i-ième composante de f. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ (on remarquera que $f_i \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).

G1 Soit R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est de longueur bornée sur $[a, b]$ alors $R \circ f$ l'est aussi sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(R \circ f) = L_a^b(f).$$

G2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f_i est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f_i) \leqslant L_a^b(f).$$

G3 On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est de longueur bornée sur $[a, b]$. Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} L_a^b(f_i).$$

G4 Démontrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est à variations bornées.

G5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I. Établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

Dans toute la suite, on suppose que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 sur I et on rappelle que :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \big(f_1'(t), \dots, f_n'(t)\big).$$

G6 Prouver que f est de longueur bornée sur tout segment de I.

G7 Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $T \circ f$ est de classe C^1 sur I et que $(T \circ f)' = T \circ f'$.

G8 On définit la fonction w, pour $x \in I$, par $w(x) = L_a^x(f)$ et on considère $t \in I$.

G8a Montrer qu'il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $f'(t) = \|f'(t)\|\,\vec{u}$.

G8b Prouver qu'il existe R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$R(\vec{u}) = (1, 0, \dots, 0).$$

On pose alors $g = R \circ f$ et $(g_1, \dots, g_n) = g$.

G8c Montrer que g est de classe C^1 sur I et établir que :

$$g_1'(t) = \|f'(t)\| \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \dots, n\},\ g_i'(t) = 0.$$

G8d Montrer que g est de longueur bornée sur tout segment de I.

G8e Soit $v \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + v \in I$, prouver que

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(g_1) \leqslant \frac{1}{v} L_t^{t+v}(f) \leqslant \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{i=n} L_t^{t+v}(g_i).$$

G8f En déduire que w est dérivable en t et que $w'(t) = \|f'(t)\|$.

G9 Établir que :

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10 Soit $h \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^n)$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h'(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. On veut montrer que h est de longueur bornée sur $[a, b]$ et exprimer $L_a^b(h)$. On considère $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

G10a Prouver que $h|_{[a,b[}$ admet une limite finie en b. On notera H cette limite.

G10b Soit $x \in [a, b]$. Montrer que :

$$\|h(x) - h(b)\| \leqslant \|H - h(b)\| + \int_x^b \|h'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10c Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que :

$$\ell(\sigma, h) \leqslant \|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10d Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$\|H - h(b)\| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|h(d) - h(b)\| - \int_d^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10e Montrer qu'il existe une subdivision σ' de $[a, d]$ telle que :

$$\int_a^d \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell(\sigma', h).$$

G10f Montrer qu'il existe une subdivision, σ'' de $[a, b]$ telle que :

$$\|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \ell(\sigma'', h).$$

G10g Conclure.

G11 Soit $h \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^n)$ telle que h soit de classe C^1 sur $[a, b[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h'(t) \, \mathrm{d}t$ ne soit pas absolument convergente. Soit $A \in \mathbb{R}$.

G11a Démontrer qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t > A + 1$.

G11b Montrer qu'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $\ell(\sigma, h) > A$.

G11c Prouver que h n'est pas de longueur bornée sur $[a, b]$.

FIN DE L'ÉPREUVE