

SESSION 2014

---

**CAPES  
CONCOURS EXTERNE  
ET CAFEP**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation des résultats obtenus. Il est rappelé en particulier qu'une application numérique doit comporter un nombre de chiffres significatifs adapté et une unité.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

A

## Transmission de signaux numériques

Le problème est découpé en trois parties totalement indépendantes. Les parties I et III contiennent chacune de nombreuses questions indépendantes entre elles.

- Partie I : Modes de transmission de signaux numériques : principes physiques et limitations
- Partie II : Transfert de données numériques
- Partie III : Géolocalisation par transmission de données : le système GPS

### Partie I : MODES DE TRANSMISSION DE SIGNAUX NUMERIQUES : PRINCIPES PHYSIQUES ET LIMITATIONS

La transmission de signaux numériques peut s'effectuer en espace libre ou bien par l'intermédiaire d'un guide. Cette première partie aborde successivement, et de façon totalement indépendante, les guides de type ligne bifilaire électrique, puis les guides de type fibre optique.

#### A) Ligne bifilaire en cuivre

Les lignes téléphoniques, installées depuis de nombreuses décennies, initialement pour assurer la transmission des signaux analogiques de la téléphonie, contribuent aujourd'hui beaucoup à la transmission de signaux numériques, pour l'internet, la télévision et la téléphonie numérique. Elles sont constituées de deux fils de cuivre, formant en général une paire torsadée.

##### 1°) Equation de propagation dans le cas idéal

Un tronçon de ligne élémentaire, de longueur  $dx$ , peut être modélisé par le schéma de la figure 1.  $\Lambda$  est l'inductance linéique et  $\Gamma$  la capacité linéique de la ligne. On donne  $\Lambda = 250 \text{ nH.m}^{-1}$  et  $\Gamma = 100 \text{ pF.m}^{-1}$ .

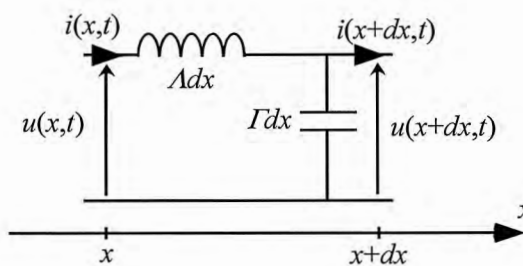


Figure 1

- ◆ **1a-** En utilisant la loi des nœuds, établir la relation  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ .
- ◆ **1b-** En utilisant la loi des mailles, établir la relation  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ .
- ◆ **1c-** En déduire que la tension  $u(x,t)$  vérifie une équation de propagation de d'Alembert et donner l'expression de la célérité  $c$  des ondes en fonction de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Calculer numériquement  $c$  puis commenter.

##### 2°) Prise en compte des faibles pertes

Afin de prendre en compte les dissipations d'énergie sous forme d'effet Joule le long de la ligne, on peut modifier le modèle en ajoutant une résistance en série avec la bobine, conformément à la figure 2.

$R$  représente la résistance linéique de la ligne.

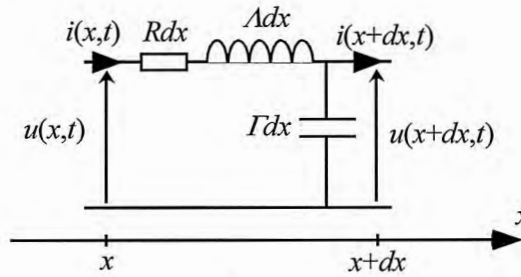


Figure 2

- ♦ **2a-** On montre que la nouvelle équation de propagation de la tension est :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ . En cherchant une solution en notation complexe de la forme  $\underline{u} = U_m e^{j(\omega t - kx)}$ , avec  $j^2 = -1$ , établir la relation de dispersion, reliant  $\underline{k}$  à la pulsation  $\omega$  de la tension.
- ♦ **2b-** Montrer que dans le cas de faibles pertes, c'est-à-dire pour  $R \ll \Lambda \omega$ ,  $\underline{k}$  peut se mettre sous la forme  $\underline{k} = k' - jk''$ , avec les expressions approchées suivantes :  $k' \simeq \frac{\omega}{c}$  et  $k'' \simeq \frac{R}{2\Lambda c}$ .
- ♦ **2c-** On considère une portion de ligne de longueur  $\ell$ . Soit une onde de tension progressive se propageant dans le sens des  $x$  croissants. On note  $U_0$  son amplitude à l'entrée de la ligne, et  $U_\ell$  celle au bout de la distance  $\ell$ . Etablir la relation :  $U_\ell = U_0 e^{-k'' \ell}$ .
- ♦ **2d-** En déduire l'atténuation en dB après un parcours d'une distance  $\ell$  dans la ligne, en fonction de  $k''$  et  $\ell$ .

### 3°) Evaluation de l'atténuation

On cherche à justifier l'évolution de l'atténuation dans une ligne en fonction du diamètre  $a$  du fil de cuivre utilisé, telle qu'elle apparaît dans le tableau suivant, pour une fréquence donnée, égale à 1,1 MHz :

Diamètre $a$ du fil (en mm)	Coefficient d'atténuation $Att$ (en dB/km)
0,40	15
0,50	12,4
0,60	10,3

Compte tenu du 2°), le coefficient d'atténuation  $Att$  dans la ligne, exprimée en dB/m peut s'écrire :  $Att = \frac{10R \log(e)}{\Lambda c}$ .

On rappelle que la résistance électrique d'un cylindre de résistivité  $\rho$ , de section  $S$  et de longueur  $L$  est  $r = \frac{\rho L}{S}$ .

En régime sinusoïdal, la densité volumique de courant n'est pas uniforme dans un fil, en raison de l'effet de peau. On rappelle l'expression de l'épaisseur de peau, à une fréquence  $f$ , dans un milieu de résistivité  $\rho$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu_0 f}}$$

- ♦ **3a-** En admettant qu'en première approximation, le courant circule dans une épaisseur  $\delta \ll a$  à la périphérie du fil, évaluer la section  $S_{utile}$  du fil effectivement parcourue par un courant en fonction du diamètre  $a$  et de l'épaisseur de peau  $\delta$ .
- ♦ **3b-** En déduire que la résistance linéique effective de la ligne (fils aller et retour) peut s'écrire :

$$R = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\rho \mu_0 f}{\pi}}$$

- ♦ **3c-** Montrer que les valeurs du tableau ci-dessus sont cohérentes avec celles du coefficient d'atténuation linéique en fonction du diamètre du fil que l'on peut déduire du 3b. Comparer les ordres de grandeur obtenus à partir des valeurs expérimentales du tableau ou d'une évaluation directe.

On donne la résistivité du cuivre :  $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  et on rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ .

## B) Fibre optique

Les fibres optiques sont de plus en plus utilisées dans le domaine des télécommunications. Elles permettent en effet des transmissions à grande distance. Après une étude générale des fibres à saut d'indice, puis une mise en équation simplifiée des modes de propagation, deux sources de limitation dans l'utilisation des fibres sont successivement analysées : la dispersion et l'atténuation.

Considérons une fibre optique dont le cœur est un cylindre circulaire d'axe Oz, de rayon  $R_1$  et d'indice optique  $n_1$ . O est le centre de la face d'entrée de la fibre. La gaine est également d'axe Oz, d'indice  $n_2$ , de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ . Les indices vérifient l'inégalité  $n_1 > n_2$ . Une telle fibre est dite à saut d'indice.

Soit un rayon lumineux arrivant en O à l'entrée du cœur de la fibre. Dans l'air, il est incliné d'un angle  $\theta_0$  par rapport à l'axe Oz. Après réfraction dans le cœur de la fibre, le rayon arrive à l'interface entre le cœur et la gaine, avec un angle d'incidence  $i_1$  par rapport à la normale au dioptre formé par le cœur et la gaine.

Tous les angles intervenant dans cette partie sont compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

L'indice de l'air est considéré égal à 1. On peut se référer à la figure 3, réalisée dans le plan d'incidence, qui est un plan de symétrie pour la fibre.

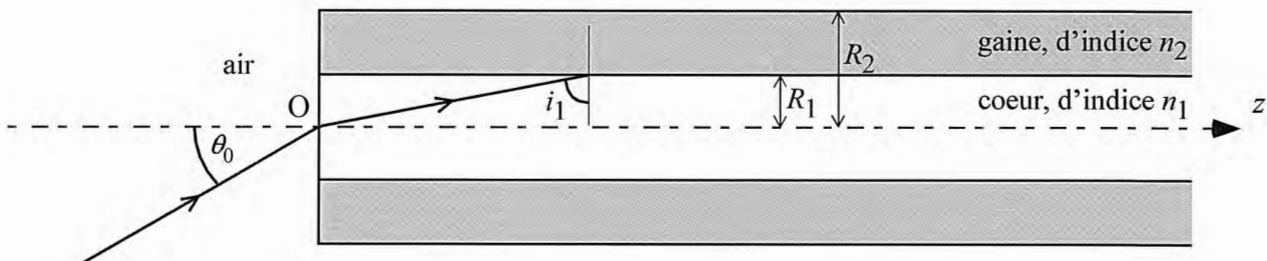


Figure 3

### 1°) Notions d'ouverture numérique et de mode

- ◆ **4a-** Etablir une relation entre les angles  $i_1$ ,  $\theta_0$  et les indices des milieux.
- ◆ **4b-** Quelle est la condition portant sur  $\sin i_1$  et les indices des milieux pour qu'il y ait réflexion totale à l'interface entre le cœur et la gaine ?
- ◆ **4c-** On appelle *ouverture numérique* de la fibre la quantité  $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ . Quelle est, en fonction de  $ON$ , la valeur maximale  $\theta_{0max}$  de l'angle  $\theta_0$  au-delà de laquelle il n'y a plus réflexion totale à l'interface cœur-gaine ? Calculer numériquement  $\theta_{0max}$  pour  $n_1 = 1,48$  et  $n_2 = 1,46$ .

La détermination des différents modes de propagation des ondes électromagnétiques dans une fibre optique fait appel aux équations de Maxwell et aux équations de propagation qui en découlent. Les solutions rigoureuses s'écrivent au moyen de fonctions de Bessel.

Il est toutefois possible d'obtenir des solutions approchées, et d'appréhender la notion de modes avec un formalisme allégé, en s'appuyant sur des considérations simples d'optique ondulatoire.

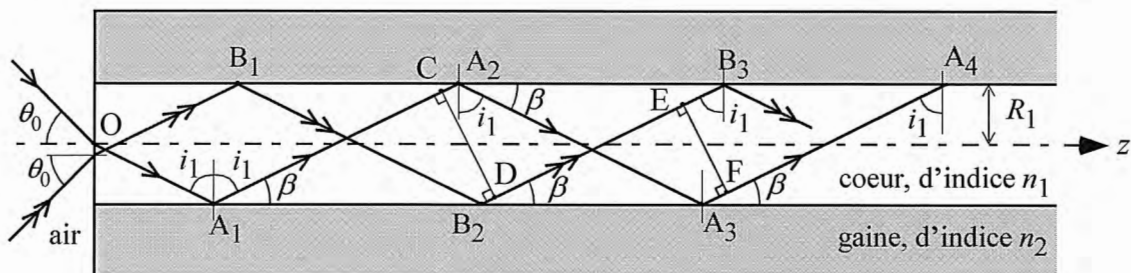


Figure 4

Considérons un plan de symétrie de la fibre contenant l'axe Oz. Soient deux rayons lumineux se propageant dans ce plan, au sein du cœur de la fibre optique, l'un repéré par une simple flèche, l'autre par une double flèche. Les ondes associées à ces deux rayons sont supposées monochromatiques, cohérentes, de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Elles subissent des réflexions totales aux interfaces entre le cœur de la fibre et la gaine, c'est-à-dire aux points  $A_1, A_2, A_3$ , etc pour le rayon repéré par une simple flèche, et aux points  $B_1, B_2$ , etc pour le rayon repéré par une double flèche. On note  $\beta$  l'angle d'inclinaison de chacune des portions rectilignes de ces rayons par rapport à l'axe Oz de la fibre.

Toutes ces notations sont illustrées par la figure 4.

Soient C et D les points des rayons  $A_1A_2$  et  $B_2B_3$  se trouvant dans un même plan orthogonal aux deux rayons. Soient E et F les points des rayons  $A_3A_4$  et  $B_2B_3$  se trouvant dans un même plan orthogonal aux deux rayons.

- ◆ **5a-** Dans un premier temps, on ne prend pas en compte les éventuels déphasages dus aux réflexions. En utilisant les points apparaissant sur cette figure 4, exprimer la différence de chemin optique  $\delta$  entre les deux rayons allant du plan contenant C et D au plan E et F. La différence sera choisie de telle sorte que  $\delta$  soit positif.
- ◆ **5b-** Soient  $A'_2$  et  $A'_3$  les projetés orthogonaux respectifs des points  $A_2$  et  $A_3$  sur le rayon  $B_2B_3$ . Exprimer la différence de marche  $\delta$  en fonction de  $A_2A_3$ ,  $A'_2A'_3$  et  $n_1$ .
- ◆ **5c-** Montrer que cette différence de marche peut encore s'écrire :  $\delta = 4R_1 \sin \theta_0$ .
- ◆ **5d-** On suppose que, pour que la propagation soit possible, cette différence de marche doit être égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde  $\lambda$ . Commenter cette hypothèse et en déduire la condition (C1) associée en introduisant un entier naturel  $m$ , que l'on nommera « indice du mode ».

On notera  $\theta_{0m}$  et  $\beta_m$  les angles  $\theta_0$  et  $\beta$  associés au mode  $m$ .

- ◆ **6a-** Quelle inégalité doit vérifier  $m$  compte tenu de l'ouverture numérique  $ON$  de la fibre ?
- ◆ **6b-** Application numérique : pour  $n_1 = 1,48$ ,  $n_2 = 1,46$ ,  $R_1 = 25,0 \mu\text{m}$  et  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , combien y a-t-il de modes possibles ?
- ◆ **6c-** Montrer que pour  $n_1 = 1,447$ ,  $n_2 = 1,443$ ,  $R_1 = 3,50 \mu\text{m}$  et  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , seul le mode  $m = 0$  est possible. La fibre est alors dite monomode.
- ◆ **6d-** On tient compte à présent des déphasages dus aux réflexions. Lorsqu'une onde lumineuse se propageant dans un milieu d'indice  $n_a$  rencontre un dioptre séparant le milieu d'indice  $n_a$  d'un milieu d'indice  $n_b$ , à quelle condition la réflexion sur le dioptre s'accompagne-t-elle d'un déphasage de  $\pi$  ?
- ◆ **6e-** La condition (C1) est-elle modifiée si l'on prend en compte le déphasage éventuel lié à la réflexion ? Une réponse justifiée est attendue.

## 2°) Dispersion

Il existe plusieurs types de dispersion au sein d'une fibre optique. Nous allons nous intéresser successivement à la dispersion intermodale puis à la dispersion intramodale.

### Dispersion intermodale

On considère une fibre optique multimode d'axe Oz, de longueur  $L$ , avec un cœur de rayon  $R_1$  et d'indice optique  $n_1$ , et une gaine d'indice  $n_2 < n_1$ . Supposons qu'une diode laser émette une impulsion lumineuse de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  pendant une durée  $\tau_0$ . Les caractéristiques de la fibre sont telles qu'il existe  $N+1$  modes, d'indices compris entre 0 et  $N$ . Pour le mode d'indice  $m$ ,  $\beta_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{4n_1R_1}\right)$ .

- ◆ **7a-** Montrer que pour une fibre optique de longueur  $L$ , la distance parcourue par la lumière pour le mode  $m$  est  $\frac{L}{\cos \beta_m}$ . En déduire l'expression du chemin optique dans la fibre pour le mode  $m$ .
- ◆ **7b-** Quel est l'indice du mode dont la durée de la propagation le long de la fibre est le plus court ?

- ◆ **7c-** On note  $\Delta t_m$  la durée de la propagation des signaux lumineux le long de la fibre de longueur  $L$  pour le mode  $m$ , et  $c$  la célérité de la lumière dans le vide. Exprimer  $\Delta t_m$  en fonction notamment de  $\beta_m$ .
- ◆ **7d-** On note respectivement  $\Delta t_{Min}$  et  $\Delta t_{Max}$  les durées de propagation correspondant aux modes pour lesquels cette durée est respectivement la plus courte et la plus longue. Exprimer  $\Delta t_{Min}$  et  $\Delta t_{Max}$  en fonction de  $L, n_1, R_1, N, \lambda$  et  $c$ .

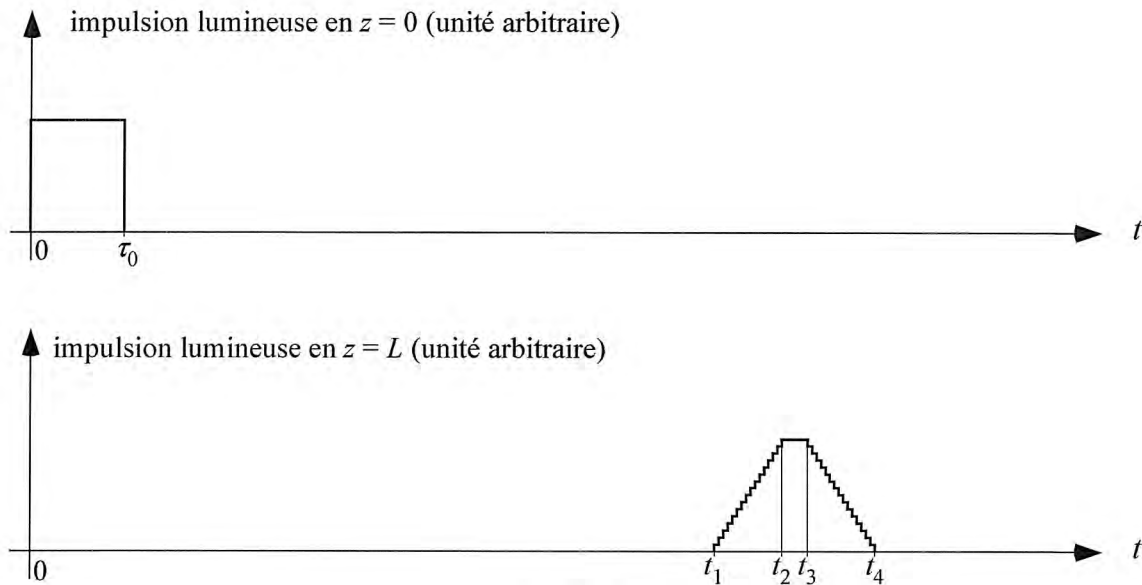


Figure 5

La figure 5 illustre de façon schématique la notion de dispersion intermodale : une impulsion lumineuse rectangulaire de durée  $\tau_0$  est émise en  $z = 0$ , entre  $t = 0$  et  $t = \tau_0$ . En raison de l'existence des  $N+1$  modes, lorsque l'impulsion arrive au bout de la fibre en  $z = L$ , elle est allongée et déformée : elle démarre à  $t = t_1$ , atteint sa valeur maximale à  $t = t_2$ , garde cette valeur jusqu'à  $t = t_3$ , puis prend fin à  $t = t_4$ . On suppose ici qu'il n'y a aucune autre source de dispersion.

- ◆ **8a-** Interpréter la forme de l'impulsion en  $z = L$ .
- ◆ **8b-** Exprimer le « temps de montée »  $t_m = t_2 - t_1$  en fonction de  $\Delta t_{Min}$  et  $\Delta t_{Max}$ .
- ◆ **8c-** Exprimer les instants  $t_3$  et  $t_4$  puis le « temps de descente »  $t_d = t_4 - t_3$  en fonction de  $\Delta t_{Min}$ ,  $\Delta t_{Max}$  et  $\tau_0$ .
- ◆ **8d-** On note  $\tau_L$  la durée de l'impulsion en bout de fibre. On définit l' « élargissement de l'impulsion par unité de longueur »  $\frac{\Delta\tau}{L}$  par  $\frac{\Delta\tau}{L} = \frac{\tau_L - \tau_0}{L}$ . Montrer que cette quantité a pour expression :

$$\frac{\Delta\tau}{L} = \frac{n_1}{c} \left( \frac{4R_1 n_1}{\sqrt{(4R_1 n_1)^2 - (N\lambda)^2}} - 1 \right)$$

- ◆ **8e-** Cette quantité est souvent donnée en  $\text{ns.km}^{-1}$ . Donner sa valeur numérique exprimée dans cette unité pour  $n_1 = 1,48$ ,  $N = 15$ ,  $R_1 = 25,0 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  et  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

L'élargissement des impulsions impose une limite pour le débit lors de la transmission d'informations numériques par fibre optique. En effet, si la période d'horloge, c'est-à-dire la durée entre chaque bit, est  $T_H$ , l'information est impossible à récupérer en bout de fibre si l'élargissement des impulsions devient comparable à  $T_H$ .

- ◆ **9a-** En utilisant les valeurs numériques données à la question précédente, et en prenant comme critère de transmissibilité de l'information un élargissement d'impulsion inférieur ou égal à  $T_H/4$ , calculer en Mbit/s le débit maximal admissible  $Q_{max}$  dans une fibre optique de longueur  $L = 1,00 \text{ km}$ .
- ◆ **9b-** Soit  $Q'_{max}$  le débit maximal admissible dans une fibre optique de longueur  $L = 20,0 \text{ km}$ , toutes choses étant égales par ailleurs. Quel est le lien entre  $Q'_{max}$  et  $Q_{max}$  ?

En pratique, la dispersion intermodale limite l'utilisation de fibres optiques multimodes à saut d'indice aux réseaux locaux. Les liaisons nationales ou internationales à haut débit nécessitent des fibres à gradient d'indice ou des fibres à saut d'indice monomodes.

### Dispersion intramodale

Dans les fibres monomodes, utilisées pour les liaisons à haut débit sur des grandes distances, la dispersion est due, d'une part au phénomène de guidage dans le cœur, et d'autre part à la dépendance de l'indice du milieu constituant le cœur de la fibre, vis-à-vis de la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse.

La dispersion due au guidage, dans une fibre monomode, fait appel à un traitement mathématique lourd, et ne peut pas s'expliquer avec un modèle utilisant des rayons lumineux.

Notons  $D$  le coefficient de dispersion intramodale dans une fibre monomode. Ce coefficient est défini par  $D = \frac{1}{L} \frac{dt_g}{d\lambda}$  où  $t_g(\lambda)$  est la durée de propagation dans la fibre de longueur  $L$ , à la vitesse de groupe  $v_g$ , pour la longueur d'onde  $\lambda$ .

En notant respectivement  $D_{gd}$  et  $D_m$  les coefficients de dispersion dus au guidage et au milieu, on peut écrire  $D = D_{gd} + D_m$ . La figure 6 donne un exemple de l'allure de l'évolution de chacun de ces deux coefficients de dispersion en fonction de la longueur d'onde dans le vide.

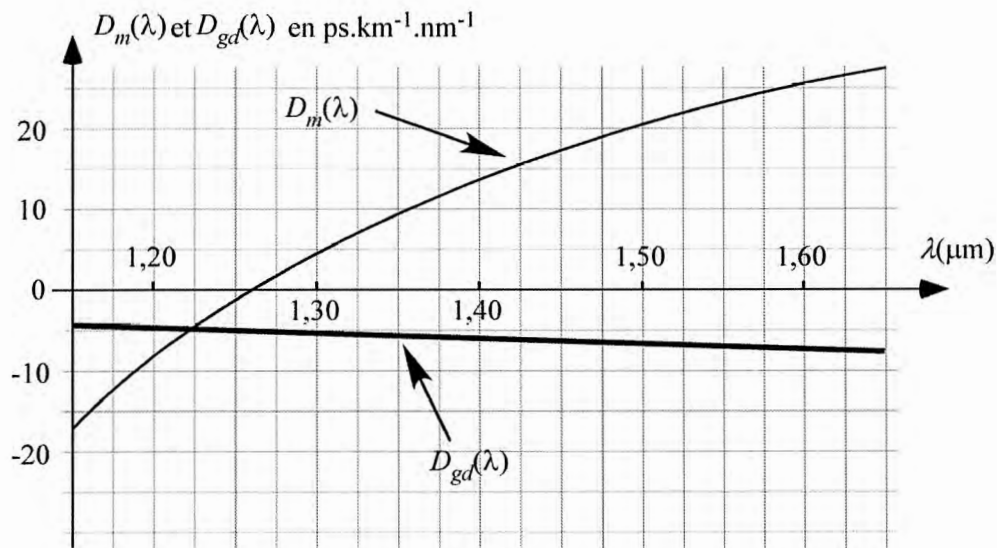


Figure 6

- ♦ **10a-** A l'aide de la figure 6, montrer qu'il existe une longueur d'onde particulière  $\lambda_1$  pour laquelle la dispersion intramodale est nulle. Evaluer graphiquement sa valeur numérique.
- ♦ **10b-** Pour une longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , évaluer graphiquement la valeur de la dispersion intramodale. En déduire l'écart  $\Delta t_g$  de durée de propagation dans une fibre de longueur 100 km, si la source lumineuse utilisée a une longueur d'onde centrale  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , et une largeur spectrale  $\Delta\lambda = 1,00 \text{ nm}$ .
- ♦ **10c-** Si on considère que l'information est convenablement transmise tant que  $\Delta t_g$  est inférieur ou égal au quart de la durée  $T_H$  d'une période d'horloge, calculer en Mbit/s le débit maximal admissible  $Q''_{max}$  dans cette fibre optique de longueur  $L = 100 \text{ km}$ .

En pratique, il est possible d'ajuster la longueur d'onde pour laquelle la dispersion intramodale est quasiment nulle, en donnant à la fibre un profil d'indice particulier. Toutefois, il existe un autre phénomène de dispersion, appelé dispersion de polarisation, qu'on ne peut parvenir à éliminer, et qui limite les débits des propagations à très grandes distances.

### 3°) Atténuation

Après avoir étudié comment la dispersion limite la longueur des fibres optiques pour un débit d'informations donné, intéressons-nous à présent à une seconde cause de la limitation de la longueur : l'atténuation. Celle-ci provient à la fois de l'absorption et de la diffusion des ondes lumineuses par la matière qui constitue les fibres.

La plupart des fibres sont réalisées en silice, relativement pure, dont l'absorption ne devient sensible que pour des longueurs d'ondes supérieures à  $1,6 \mu\text{m}$ . Les impuretés, quasiment impossible à éliminer, contiennent généralement des liaisons OH. Rappelons que la liaison OH présente un pic d'absorption dans l'infra-rouge, pour une longueur d'onde d'environ  $1,4 \mu\text{m}$ . La silice se présente dans les fibres sous forme amorphe. Les irrégularités qui en résultent sont responsables d'une diffusion de la lumière, de type « diffusion Rayleigh ». Rappelons que la diffusion Rayleigh est responsable de la couleur bleue du ciel et de la couleur rouge-orangée du Soleil couchant : lorsqu'un rayon lumineux venant du Soleil rencontre l'atmosphère terrestre, une partie de la lumière est diffusée latéralement, beaucoup plus dans le domaine du bleu que dans le domaine du rouge, qui est ainsi mieux transmis.

La figure 7 donne l'allure de l'atténuation (en  $\text{dB.km}^{-1}$ ) en fonction de la longueur d'onde lumineuse pour une fibre optique ordinaire.

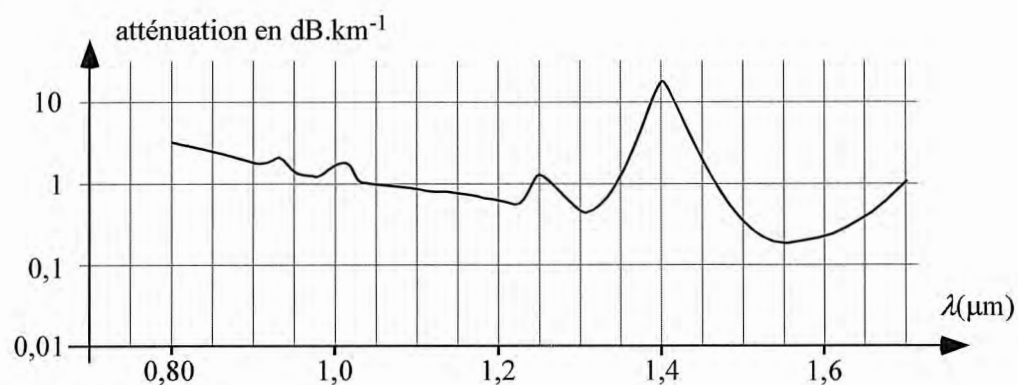


Figure 7

- ◆ **11a-** En utilisant les informations du paragraphe précédent, interpréter la forme de cette courbe.
- ◆ **11b-** Evaluer en le justifiant quelles sont les deux longueurs d'onde les plus appropriées à la transmission d'informations dans cette fibre ordinaire.
- ◆ **11c-** Pour une longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , l'atténuation est de  $0,2 \text{ dB.km}^{-1}$ . Quel pourcentage de la puissance injectée à l'entrée de la fibre parvient à une distance de 100 km ?

## Partie II : TRANSFERT DE DONNEES NUMERIQUES

*Les données numériques font aujourd'hui partie de notre univers quotidien. Cette partie a pour objet l'estimation de la durée d'un envoi de fichier par internet.*

*On notera la spécificité de cette partie, qui relève de la résolution de problèmes. L'explicitation des étapes du raisonnement et des approximations utilisées et la qualité de la démarche et de sa présentation y seront particulièrement valorisées.*

Alice souhaite transmettre à Bob un fichier de 100 Mo stocké sur un DVD. Son ordinateur est connecté par Wi-Fi, sur une distance de 10 m, à un modem, relié au central téléphonique par une liaison ADSL de 1 km de long. Une fibre optique assure la transmission des données en direction du central téléphonique de Bob, situé à 5000 km de celui d'Alice. L'ordinateur de Bob est relié à un modem par un câble Ethernet 100 de 5 m de long. Le modem de Bob communique avec le central téléphonique par une liaison ADSL de 1,5 km analogue à celle d'Alice. Bob souhaite stocker directement sur une clef USB 2.0 le fichier en provenance d'Alice.

- ◆ **12** En prenant appui sur les différents documents rassemblés ci-dessous, estimer la durée du transfert du fichier dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire sans tenir compte d'éventuels retards dus à des erreurs de transmission ou bien à des multiplicités de tâches effectuées par les ordinateurs et les organes de transmission. La réponse finale attendue est une valeur numérique.

Données :

Les ordinateurs de Bob et Alice sont identiques ; ci-dessous apparait un extrait de leurs caractéristiques techniques.

- Processeur : Processeur Intel® Core™ i5-3337U de 3e génération (3 Mo de mémoire cache)
- Écran : Écran rétroéclairé 17,3" avec technologie TrueLife et résolution HD+ (1 600 x 900)
- Mémoire : SDRAM DDR3 8 Go à 1600 MHz
- Disque dur : Disque dur Serial ATA de 1 TB (5400 tr/min)
- Carte vidéo : AMD Radeon™ HD 7670M 1G DDR3
- Lecteur optique : Lecteur DVD+/-RW 8X

Le lecteur DVD est relié à l'unité centrale par un bus SATA III.

La liaison Wi-Fi d'Alice est de type 802.11g.

La fibre optique a une capacité de transmission de 1Gb/s.

Un modem est un dispositif permettant de convertir des signaux contenant des informations en signaux transmissibles sur un réseau et inversement.

Documents :

A) Extrait des caractéristiques techniques d'un lecteur/graveur de DVD :

Taux de transfert de données

- Ecriture DVD+R 8x (10,8 Mo/s)
- Lecture DVD+R 8x (10,8 Mo/s)
- Ecriture DVD+R double couche 6x (8,1 Mo/s)
- Lecture DVD+R double couche 8x (10,8 Mo/s)

B) Extrait du site internet « Le guide du stockage » :

En informatique, beaucoup d'interfaces utilisent le codage 8b/10b, qui consiste à transformer chaque séquence de 8 bits en mot de 10 bits. En clair, pour déplacer 100 Mo, il faut en fait transférer 125 Mo.

	Débit en bits/s	Débit en octets/s
Wifi 802.11b	11 Mbps	1,37 Mo/s
Wifi 802.11g	54 Mbps	6,75 Mo/s
Ethernet 100 (box ADSL)	100 Mbps	12,5 Mo/s
USB 2.0	480 Mbps	60 Mo/s

C) Extrait de Wikipedia sur les bus Sata

La norme **Serial ATA** ou **SATA** (Serial Advanced Technology Attachment), permet de connecter à une carte mère tout périphérique compatible avec cette norme (mémoire de masse, lecteur de DVD, etc.). Elle spécifie notamment un format de transfert de données et un format de câble.

Les premiers modèles de *Serial ATA*, apparus en 2003 permettent un débit théorique de 1,5 Gbit/s, mais ont été conçus pour aller bien plus vite. Le *Serial ATA II* double sa vitesse à 3 Gbit/s puis le SATA III à 6 Gbit/s est apparu en 2009.

Le débit théorique de 1,5 Gbit/s correspond à 187,5 Mo/s ; en pratique, on ne dépasse pas les 150 Mo/s.

Revision #	Débit théorique Gbit/s	Débit théorique Mo/s	Débit pratique Mo/s
SATA I ou SATA 150	1,5	187,5	150
SATA II ou SATA 300	3	375	280
SATA III ou SATA 600	6	750	600

Le *Serial ATA* utilise le codage 8b/10b pour effectuer des transferts, permettant de travailler sur des meilleures fréquences

D) Extrait de Wikipedia sur les liaisons Wi-Fi

La norme IEEE 802.11 est la norme initiale offrant des débits de 1 ou 2 Mbit/s (Wi-Fi est un nom commercial, et c'est par abus de langage que l'on parle de « normes » Wi-Fi). Des révisions ont été apportées à la norme originale afin d'améliorer le débit (c'est le cas des normes 802.11a, 802.11b, 802.11g et 802.11n, appelées normes 802.11 physiques) ou de spécifier des détails de sécurité ou d'interopérabilité. La norme 802.11g offre un haut débit (54 Mbit/s théoriques, 25 Mbit/s réels) sur la bande de fréquences des 2,4 GHz. La norme 802.11g a une compatibilité ascendante avec la norme 802.11b, ce qui signifie que des matériels conformes à la norme 802.11g peuvent fonctionner en 802.11b.

E) Synthèse de documents sur les liaisons ADSL, notamment Wikipedia

L'*Asymmetric Digital Subscriber Line* (ADSL) est une technique de communication numérique de la famille xDSL. Elle permet d'utiliser une ligne téléphonique pour transmettre et recevoir des données numériques de manière indépendante du service téléphonique conventionnel.

La ligne téléphonique qui relie le domicile d'un abonné à l'autocommutateur public qui dessert son quartier (le « central téléphonique ») est constituée d'une paire de fils de cuivre, en général continue entre ces deux points (la boucle locale). Les signaux utilisés pour la téléphonie classique (sonnerie, numérotation multifréquences, voix) occupent une bande de fréquences qui s'étend entre 25 et 3 400 Hz environ. Le principe de l'ADSL consiste à exploiter une autre bande de fréquence, située au-dessus de celle utilisée pour la téléphonie, pour échanger des données numériques en parallèle avec une éventuelle conversation téléphonique.

L'ADSL fait appel à la notion de sous-porteuses : la bande de fréquences comprise entre 0 Hz et environ 1,1 MHz est divisée en 255 intervalles de 4,3125 kHz. À chaque frontière d'intervalle est associée une sous-porteuse, qui est un signal modulé. La n-ième sous-porteuse est donc matérialisée sous la forme d'un signal dont la fréquence de base vaut  $[n \times 4,3125 \text{ kHz}]$ . Un modem ADSL peut donc être considéré comme la mise en parallèle d'un grand nombre de modems analogiques, chacun transmettant sur une fréquence différente : 4,3125 kHz pour le premier, 8,6250 kHz pour le second, 12,9375 kHz pour le troisième, et ainsi de suite.

L'ADSL est qualifié d'*asymétrique* : le nombre de sous-porteuses affectées au sens descendant (de l'abonné vers le central téléphonique) est plus élevé que le nombre de sous-porteuses affectées au sens montant (du central téléphonique vers l'abonné).

## Capacité de trafic

### Sens descendant

En supposant que la qualité de la ligne le permette, chaque sous-porteuse peut utiliser des symboles de 15 bits, et transmet 4 000 symboles par seconde. Pour le sens descendant, on dispose de 223 sous-porteuses pour transporter des données utilisateur (ce sont les sous-porteuses 32 à 255, moins la sous-porteuse pilote 64). Les 223 sous-porteuses sont utilisées simultanément pour transférer les données dans le sens descendant.

Dans la pratique, ce débit est moindre en raison de la structure du codage.

### Sens montant

Le même calcul s'applique aux 24 sous-porteuses (ce sont les sous-porteuses 7 à 31, moins la sous-porteuse pilote 16), qui sont toutes utilisées simultanément pour transporter les données dans le sens montant.

## Partie III : GEOLOCALISATION PAR TRANSMISSION DE DONNEES LE SYSTEME GPS

Aujourd'hui, le GPS est un outil incontournable pour se positionner que l'on soit à pied, en vélo, en bateau ou en voiture.

Il s'agit d'un système de géolocalisation par satellite développé par l'armée américaine et mis à la disposition des civils.

Il fonctionne par l'intermédiaire de trois « maillons » :

- un segment espace : une constellation de satellites en orbite quasi circulaire ;
- un segment de contrôle et de commande : stations fixes sur terre ;
- un segment utilisateur : les récepteurs.

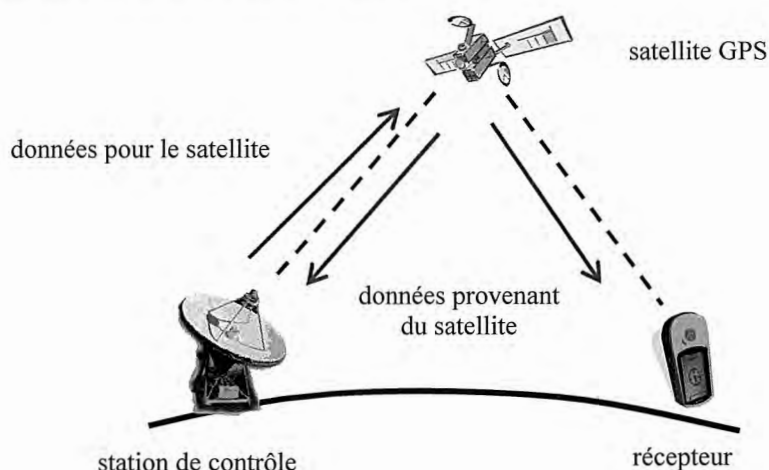


Figure 8

Il comprend un réseau de 24 satellites et permet de déterminer les coordonnées géographiques de n'importe quel point à la surface du globe terrestre.

Le principe de fonctionnement repose sur la mesure de la distance d'un récepteur par rapport à plusieurs satellites. Chaque satellite émet un signal numérique contenant l'information précise de sa date d'émission. Le récepteur mesure la date de réception et décode le signal émis pour connaître la date d'émission. Un calculateur, intégré au récepteur, permet de déterminer avec précision la distance parcourue par le signal grâce à son temps de vol. La réception des signaux de quatre satellites permet au récepteur de calculer sa position.

Nous allons, au cours de cette partie, aborder quelques aspects de ce système.

### A) Satellites en orbite circulaire

On se propose d'étudier le mouvement des satellites autour de la Terre dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Sauf mention contraire, on considère la Terre comme une sphère homogène de rayon  $R_T$ , de centre  $O$ , de masse  $M_T$ . On note  $G$  la constante de gravitation universelle.

On repère un point  $M$  par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dans le référentiel géocentrique. Le trièdre local associé à ces coordonnées est noté  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

- ◆ **13-** Situer l'époque à laquelle le premier satellite artificiel a été lancé.
- ◆ **14a-** Déterminer à l'aide de considérations de symétrie la direction du champ gravitationnel  $\vec{g}_{terre}(M)$  créé par la Terre en un point quelconque  $M$  de l'espace.
- ◆ **14b-** Justifier de même que la norme de ce champ gravitationnel ne dépende que de  $r$ .

- ◆ **14c-** Énoncer le théorème de Gauss relatif à la gravitation.
- ◆ **14d-** En déduire l'expression du champ de gravitation créé par la Terre en un point extérieur à celle-ci.
- ◆ **15a-** Quelle est la force exercée par la Terre sur un satellite de masse  $M_S$  en orbite autour de la Terre ?
- ◆ **15b-** En déduire que la trajectoire du satellite est plane.

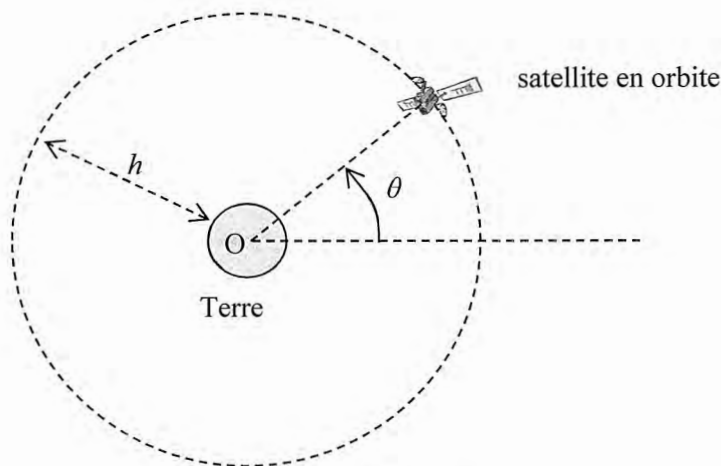


Figure 9

On suppose que l'orbite du satellite est circulaire de centre O et que le satellite est situé à une altitude  $h = 20,2 \cdot 10^3$  km.

On repère dans ces conditions le satellite par des coordonnées polaires  $(r = R_T + h, \theta)$  dans le plan de la trajectoire. On peut se référer à la figure 9.

- ◆ **16a-** Exprimer les composantes de l'accélération du satellite en coordonnées polaires en fonction de la norme  $v$  de sa vitesse, de sa dérivée par rapport au temps  $\frac{dv}{dt}$  et du rayon  $R_T + h$  de sa trajectoire.
- ◆ **16b-** Montrer que le mouvement du satellite est nécessairement uniforme.
- ◆ **16c-** Déterminer la norme  $v$  de sa vitesse, en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $R_T$  et  $h$ .
- ◆ **17a-** En un point de la surface de la Terre, on assimile le champ de pesanteur, d'intensité  $g$ , au champ de gravitation. Exprimer  $v$  en fonction de  $g$ ,  $R_T$  et  $h$ .
- ◆ **17b-** Calculer numériquement  $v$  pour  $R_T = 6,37 \cdot 10^3$  km et  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup>.
- ◆ **18a-** Relier la période de rotation du satellite,  $T$ , aux paramètres  $G$ ,  $M_T$  et  $R_T + h$ .
- ◆ **18b-** La relation de la question **18a-** est semblable à la troisième loi de Kepler. Énoncer cette loi et situer l'époque où a vécu Johannes Kepler.
- ◆ **18c-** On souhaite que la période de révolution des satellites du système GPS soit égale à la moitié de la durée du jour solaire, notée  $T_0$ . Évaluer l'altitude des satellites de la constellation GPS.
- ◆ **19a-** Montrer que la force de gravitation calculée en **15a-** est conservative.
- ◆ **19b-** Exprimer l'énergie potentielle de gravitation  $E_p$  dont dérive la force qui s'exerce sur le satellite en fonction de  $G$ ,  $M_S$ ,  $M_T$  et  $R_T + h$  avec la convention d'une énergie potentielle nulle à l'infini.
- ◆ **19c-** Soit  $E_c$  l'énergie cinétique du satellite ; vérifier que :  $2E_c + E_p = 0$  (ce résultat est connu sous le nom de théorème du viriel).

D'un point Q, situé sur Terre, dans le plan de l'orbite du satellite P, on ne peut observer ce satellite P que pendant l'intervalle de temps  $\tau$  entre son apparition à l'horizon, en A et sa disparition, en B (voir figure 10).

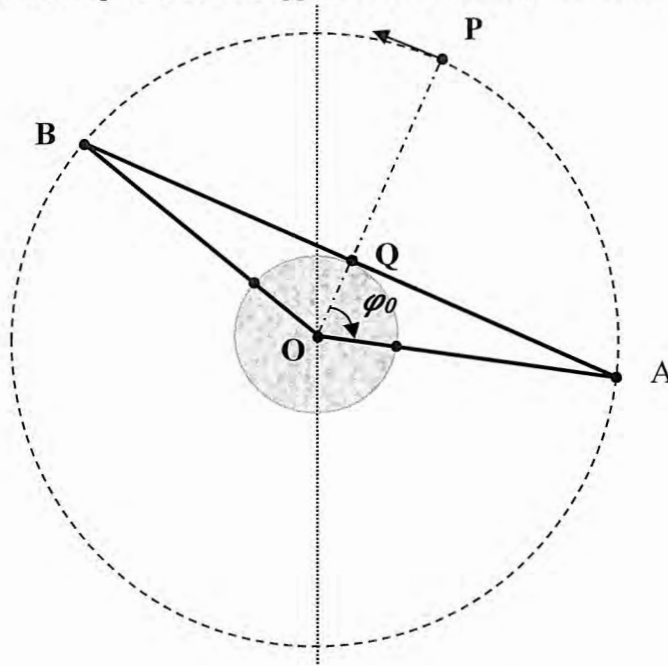


Figure 10

- ◆ **20a-** Déterminer géométriquement l'expression de l'angle  $\varphi_0$ .
- ◆ **20b-** En déduire la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .
- ◆ **20c-** Relier  $\tau$  à  $\widehat{AB}$ ,  $T$  et  $R_T + h$ .
- ◆ **20d-** En déduire  $\tau$  en fonction de  $h$ ,  $g$  et  $R_T$ .
- ◆ **20e-** Vérifier la dimension de  $\tau$ .
- ◆ **20f-** Calculer numériquement  $\tau$  pour  $h = 20,2 \cdot 10^3$  km.
- ◆ **20g-** Evaluer le rapport  $T/\tau$ .

Pour les besoins du système GPS, on dispose régulièrement sur une même orbite un ensemble de satellites identiques, appelé « train de satellites ».

- ◆ **21-** Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

Supposons maintenant qu'un satellite est visible s'il est à plus de  $\alpha_0 = 30^\circ$  au-dessus de l'horizon. Ainsi, le satellite est visible depuis Q lorsqu'il est entre A' et B' comme le montre la figure 11.

- ◆ **22a-** En projetant A' sur OP, déterminer une relation liant :  $\varphi'_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $R_T$  et  $R_T + h$ .
- ◆ **22b-** On pose  $\eta = R_T/(R_T + h)$ . Montrer que  $u = \cos \varphi'_0$  vérifie, pour  $\alpha_0 = 30^\circ$ , l'équation :  

$$u^2 - \frac{3}{2}\eta u + \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{4} = 0.$$
 Résoudre cette équation et en déduire la valeur de  $\varphi'_0$ .
- ◆ **22c-** Quelle est la nouvelle durée de visibilité  $\tau'$  ? Quel est, dans ces conditions, le nombre minimal de satellites dans un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant ?

Dans la constellation du système GPS, les 24 satellites utilisés évoluent sur 6 plans orbitaux ayant une inclinaison d'environ  $55^\circ$  sur l'équateur. Ces orbites sont séparées de  $60^\circ$  les unes des autres et contiennent un train de 4 satellites.

- ◆ **23-** Citer le nom du projet européen de positionnement par satellite et décrire l'état actuel de son fonctionnement.

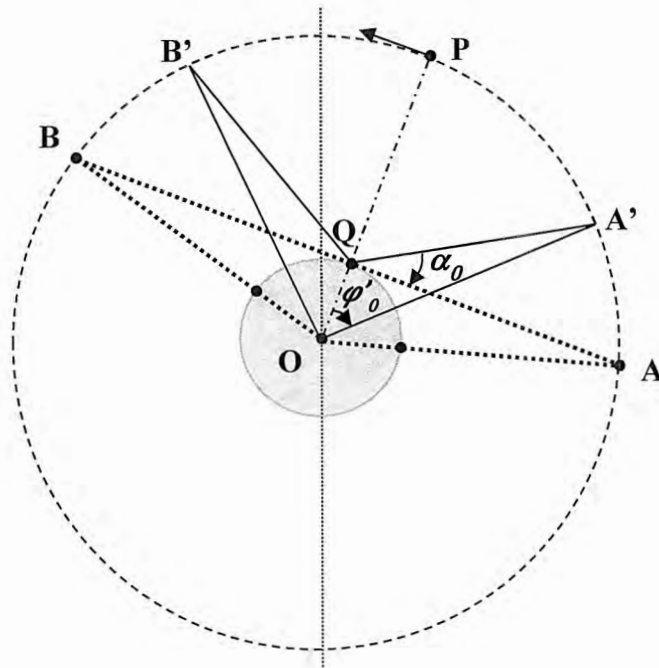


Figure 11

### B) Mesure du temps

- ◆ **24a-** A l'heure actuelle, à partir de quel phénomène physique est définie la seconde ?
- ◆ **24b-** Depuis quelle année cette définition est-elle en application ?
- ◆ **25a-** La précision des GPS courants est à l'heure actuelle de l'ordre du mètre. On suppose que les signaux du GPS se déplacent dans le vide, de façon rectiligne et à la vitesse  $c$  ; en déduire la précision exigée sur la mesure du temps.  
On suppose que  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .
- ◆ **25b-** Quel est l'ordre de grandeur de la précision des horloges atomiques ? Conviennent-elles pour la mesure des durées dans les systèmes GPS ?

### C) Problème de la synchronisation des horloges

Pour aborder le problème du positionnement par mesure de temps, on étudie tout d'abord le repérage d'un promeneur le long d'une route droite.

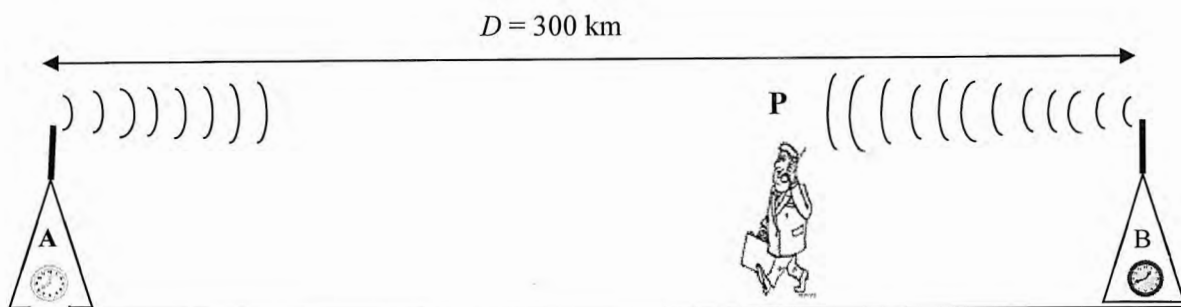


Figure 12

Ce repérage nécessite deux balises émettrices A et B fixes, situées aux extrémités de la route de longueur  $D = AB$ , avec  $D = 300 \text{ km}$ .

Le signal émis par chaque balise contient l'heure d'émission du signal.

On suppose ici, pour simplifier, que la vitesse de propagation du signal est  $v_s = 10 \text{ km/min}$ .

Au point P, le promeneur reçoit simultanément un signal de A contenant l'heure d'émission  $t_0$  et un signal de B contenant lui aussi l'heure à laquelle B a envoyé son signal,  $t_0 + \Delta t$  ( $\Delta t = 10 \text{ min}$ ). Les deux balises A et B sont supposées parfaitement synchronisées.

- ♦ **26a-** Donner l'expression littérale de la distance  $d_1$  séparant P de A. Calculer numériquement cette distance.

Lorsque le promeneur reçoit les deux signaux, sa montre indique  $t_P = 10\text{h}24\text{min}$ . L'heure d'émission des signaux étant connue ( $t_0 = 10\text{h}05\text{min}$ ) on peut déterminer l'avance ou le retard de la montre de P par rapport aux horloges des balises.

- ♦ **26b-** Déterminer l'heure théorique que devrait indiquer la montre du promeneur lorsqu'il reçoit les signaux en fonction de  $D$ ,  $t_0$ ,  $v_s$  et  $\Delta t$ .
- ♦ **26c-** En déduire la valeur numérique du retard  $\tau$  de la montre du promeneur.

Les questions précédentes sous-entendent que les horloges de A et B sont synchronisées. Intéressons-nous dans un premier temps à la synchronisation de deux horloges immobiles. On peut se référer à la figure 13.

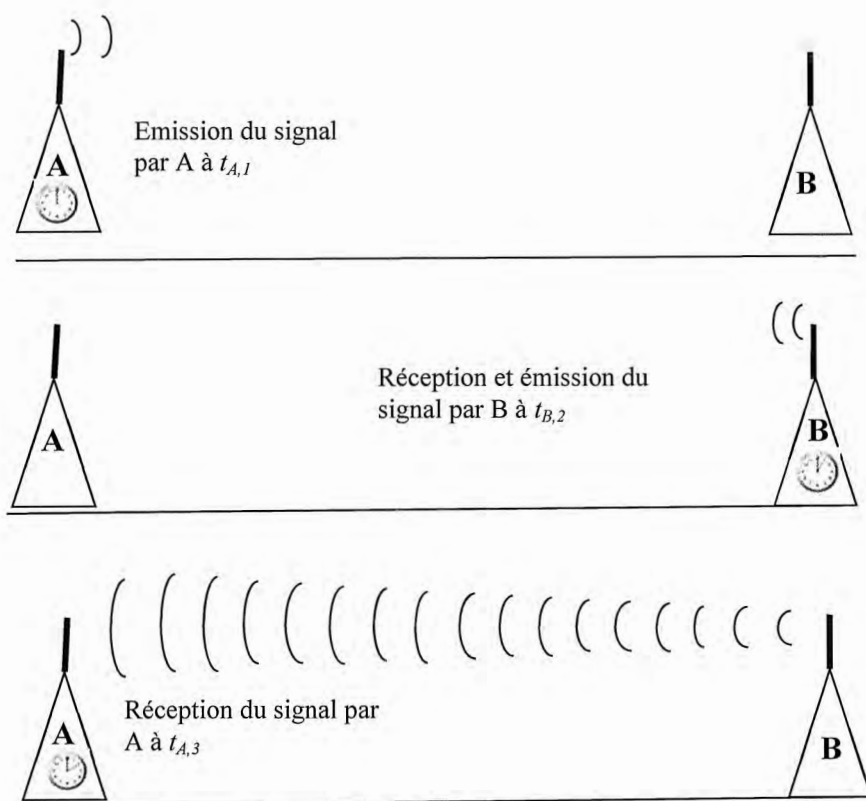


Figure 13

À l'instant  $t_{A,1}$  (selon l'horloge A) l'horloge A émet un signal lumineux vers l'horloge B. Dès réception, l'horloge B lui renvoie un signal contenant son heure de réception  $t_{B,2}$  (selon l'horloge B) ; l'horloge A reçoit ce second signal à l'instant  $t_{A,3}$  (selon A).

- ♦ **27a-** A quelle condition sur  $t_{A,1}$ ,  $t_{B,2}$ ,  $t_{A,3}$  les horloges sont-elles synchronisées ?
- ♦ **27b-** Si  $t_{A,1} = 10\text{h}00\text{min}$ ,  $t_{B,2} = 10\text{h}07\text{min}$  et  $t_{A,3} = 10\text{h}10\text{min}$ , déterminer le retard de l'horloge de A sur celle de B.

## D) Correction due à la vitesse des satellites : dilatation des durées

Les horloges atomiques embarquées dans les satellites du GPS sont en mouvement par rapport à celles situées sur Terre. La théorie de la relativité restreinte permet de montrer que les horloges embarquées affichent un retard par rapport aux horloges terrestres.

- ♦ **28-** En quelle année Einstein a-t-il postulé le principe d'invariance de la vitesse de la lumière ? Énoncer précisément ce principe.

L'utilisation d'une « horloge de lumière » permet de justifier le phénomène de dilatation des durées en s'appuyant sur le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière.

Considérons un ensemble « MSR » = « miroir ; source ; récepteur » en translation à la vitesse  $\vec{v}$  constante dans le référentiel galiléen du laboratoire R. On nomme R' le référentiel galiléen lié à l'ensemble MSR. Un observateur lié à l'ensemble MSR détermine l'intervalle de temps  $\Delta t'$  entre l'émission et la réception d'une impulsion lumineuse, après réflexion sur le miroir. Pour un observateur lié au référentiel galiléen du laboratoire R, la durée mise par la lumière pour faire cet aller-retour est notée  $\Delta t$ .

$L$  désigne la distance fixe entre le miroir et le système source-récepteur. La figure 14 schématise la situation étudiée.

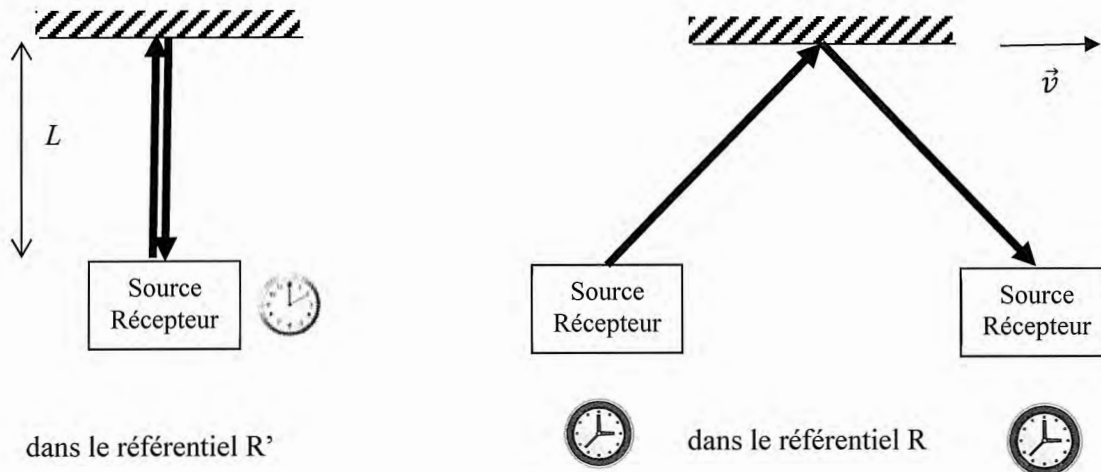


Figure 14

- ♦ **29a-** Définir les notions d'événement et de durée propre.
- ♦ **29b-** Exprimer la distance parcourue par l'impulsion lumineuse du point de vue des deux observateurs. En éliminant  $L$ , en déduire  $\Delta t$  en fonction de  $\Delta t'$ ,  $v$  et  $c$ . Justifier le terme de dilatation des durées.

On suppose que l'on peut appliquer ce résultat pour comparer une durée propre mesurée par une horloge atomique embarquée dans un satellite à celle mesurée par un observateur situé dans le référentiel terrestre. La vitesse du satellite est notée  $v$ .

- ♦ **30a-** Exprimer le retard de l'horloge embarquée  $\tau_l$  au bout d'une journée de  $T_0 = 24\text{h}$  mesurée sur Terre. On justifiera qu'il s'agit bien d'un retard.
- ♦ **30b-** Calculer numériquement ce retard pour  $v = 3,9 \text{ km/s}$ .
- ♦ **30c-** Doit-on tenir compte de ce retard dans la mise en œuvre du GPS ?

## E) Correction due à l'altitude : effet gravitationnel

Les satellites se meuvent à une altitude  $h$  de l'ordre de 20000 km. Il s'agit ici de comparer la période d'une horloge embarquée à celle d'une horloge restée au sol en prenant en compte uniquement la différence de

potentiel de gravitation ressenti. Cet effet gravitationnel est à traiter dans le cadre de la relativité générale que nous allons aborder ici de façon très simplifiée.

Soit  $T'$  la période de l'horloge embarquée mesurée dans le satellite et  $T$  la période d'une horloge identique mesurée sur Terre. La correction gravitationnelle relative est donnée par la relation :  $\frac{T-T'}{T'} \simeq \frac{U-U_0}{c^2}$  où  $U$  désigne l'énergie potentielle massique de gravitation terrestre au niveau de l'horloge embarquée et  $U_0$  celle au niveau de la surface de la Terre.

- ◆ **31a-** En utilisant l'expression de l'énergie potentielle établie à la question **19b**, exprimer l'énergie potentielle massique  $U$  au niveau de l'horloge embarquée.
- ◆ **31b-** En déduire l'expression de  $U-U_0$ . Etablir la relation :  $U-U_0 = g \frac{hR_T}{h+R_T}$  où  $g$  est l'intensité du champ de gravitation (assimilé au champ de pesanteur) au niveau de la surface de la Terre.
- ◆ **32a-** Comparer  $T$  et  $T'$  et justifier l'avance d'une horloge embarquée par rapport à une horloge restée au sol résultant de la prise en compte de l'effet de gravitation.
- ◆ **32b-** Calculer numériquement l'avance due à l'effet de gravitation  $\tau_2$  de l'horloge embarquée par rapport à celle située au sol au bout d'une journée. Commenter.
- ◆ **32c-** Comparer  $\tau_2$  et  $\tau_1$  et conclure.

Les satellites sont équipés d'un synthétiseur de fréquence qui permet de corriger les deux effets précédents.