

HEC 2013

PARTIE I Quelques propriétés de suites matricielles

Q1 a) la matrice A symétrique à coefficients réels de A est diagonalisable.

b) Pour $V' = AV = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_p \end{pmatrix}$.

$$\forall i \in [1, p], v'_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} \lambda_j = \sum_{j=1}^p 1 \lambda_j = p. \text{ Ainsi } V' = pV. \quad \underline{AV = pV.}$$

$V \neq 0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}$ donc p est valeur propre de A et V est un vecteur propre associé.

Notons maintenant $p \geq 2$

c) Pour tout $j \in [1, p]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

$V \neq 0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}$

$\forall j \in [1, p], C_j(A) = V$. Alors $\text{rg } A = \dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A)) = \dim \text{Vect}(V) \stackrel{\downarrow}{=} 1$.

$\text{rg } A = 1 < p$. A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A .

$$\dim \text{SEP}(A, 0) = p - \text{rg}(A - 0I_p) = p - \text{rg } A = p - 1.$$

la dimension du nouv. espace propre de A associé à la valeur propre 0 est $p-1$.

d) Pour $A^2 = (a_{ij}^{(2)})_{1 \leq i, j \leq p}$.

$$\forall (i, j) \in [1, p], a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^p a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^p 1 = p = p \times 1 = p a_{ij}.$$

donc $A^2 = pA$.

montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = p^{k-1}A$.

• La propriété est vraie pour $k=1$ car $A^1 = A = p^0 A = p^{1-1}A$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$$A^{k+1} = A A^k = A(p^{k-1}A) = p^{k-1}A^2 = p^{k-1}pA = p^k A = p^{(k+1)-1}A. \text{ Ceci achève la récurrence.}$$

? hypothèse de récurrence

$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = p^{k-1}A$.

Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. $T_{A,0}(\kappa) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (\kappa A)^{\ell} = I_p \in \text{Vect}(I_p, A)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_{A,n}(\kappa) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (\kappa A)^{\ell} = I_p + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell!} \kappa^{\ell} A^{\ell} = I_p + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell!} \kappa^{\ell} p^{\ell-1} A$.

$T_{A,n}(\kappa) = I_p + \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\kappa^{\ell}}{\ell!} p^{\ell-1} \right) A \in \text{Vect}(I_p, A)$.

$\forall \kappa \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_{A,n}(\kappa) \in \text{Vect}(I_p, A)$.

e) Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ & soit $n \in \mathbb{N}^*$

$T_{A,n}(\kappa) = I_p + \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\kappa^{\ell}}{\ell!} p^{\ell-1} \right) A = I_p + \frac{1}{p} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{(p\kappa)^{\ell}}{\ell!} \right) A$

$T_{A,n}(\kappa) = I_p + \frac{1}{p} \left[\sum_{\ell=0}^n \frac{(p\kappa)^{\ell}}{\ell!} - 1 \right] A$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\sum_{\ell=0}^n \frac{(p\kappa)^{\ell}}{\ell!} - 1 \right] = \frac{1}{p} (e^{p\kappa} - 1)$.

Ceci suffit pour dire que la suite $(T_{A,n}(\kappa))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $T_A(\kappa)$

de $M_p(\mathbb{R})$ définie par $T_A(\kappa) = I_p + \frac{e^{p\kappa} - 1}{p} A$ et ceci pour tout κ dans $\mathbb{R}$.

f) $T_A(0) = I_p + \frac{e^{p \cdot 0} - 1}{p} A = I_p$. $T_A(0) = I_p$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$T_A(x) T_A(y) = \left(I_p + \frac{e^{px} - 1}{p} A \right) \left(I_p + \frac{e^{py} - 1}{p} A \right) = I_p^2 + \left(\frac{e^{px} - 1}{p} + \frac{e^{py} - 1}{p} \right) A + \frac{(e^{px} - 1)(e^{py} - 1)}{p^2} A^2$

Rappelons que $A^2 = pA$ d'où $\frac{1}{p^2} A^2 = \frac{1}{p} A$. De plus $I_p^2 = I_p$!!

d'où $T_A(x) T_A(y) = I_p + \frac{1}{p} [e^{px} + e^{py} - 2 + (e^{px} - 1)(e^{py} - 1)] A$.

$T_A(x) T_A(y) = I_p + \frac{1}{p} [e^{px} + e^{py} - 2 + e^{p(x+y)} - e^{px} - e^{py} + 1] A = I_p + \frac{1}{p} (e^{p(x+y)} - 1) A$.

d'où $T_A(x) T_A(y) = T_A(x+y)$ et ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\forall \kappa \in \mathbb{R}, I_p = T_A(0) = T_A(\kappa + (-\kappa)) = T_A(\kappa) T_A(-\kappa)$.

d'où pour tout réel κ , $T_A(\kappa)$ est inversible et $(T_A(\kappa))^{-1} = T_A(-\kappa)$.

Q2) a) notons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, y_{k+1} \leq p^k y_1^{k+1}$

- $y_{0+1} = y_1 = p^0 y_1 \leq p^0 y_1^{0+1}$. La propriété est vraie pour $k=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et notons la pour k .
L'hypothèse de récurrence indique que $y_k \leq p^{k-1} y_1^k$.

$$\forall (i,j) \in \overline{1,p}^2, a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^p a_{i,r} a_{r,j}^{(k)}.$$

$$0 \leq |a_{i,r}| \leq y_1 \text{ et } 0 \leq |a_{r,j}^{(k)}| \leq y_k.$$

$$\forall (i,j) \in \overline{1,p}^2, |a_{i,j}^{(k+1)}| = \left| \sum_{r=1}^p a_{i,r} a_{r,j}^{(k)} \right| \leq \sum_{r=1}^p |a_{i,r}| |a_{r,j}^{(k)}| \leq \sum_{r=1}^p y_1 y_k.$$

$$\forall (i,j) \in \overline{1,p}^2, |a_{i,j}^{(k+1)}| \leq \sum_{r=1}^p y_1 p^{k-1} y_1^k = p y_1 p^{k-1} y_1^k = p^k y_1^{k+1}.$$

$\uparrow$
 $y_1 \geq 0 \text{ et } y_1 \leq p^{k-1} y_1^k$

Alors $y_{k+1} = \max_{(i,j) \in \overline{1,p}^2} |a_{i,j}^{(k+1)}| \leq p^k y_1^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}, y_{k+1} \leq p^k y_1^{k+1}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\left| \frac{y_k}{k!} x^k \right| = \frac{y_k}{k!} |x|^k \leq \frac{p^{k-1} y_1^k}{k!} |x|^k = \frac{1}{p} \frac{(p y_1 |x|)^k}{k!}.$

Or la série de terme général $\frac{(p y_1 |x|)^k}{k!}$ converge. Donc la série de

terme général $\frac{1}{p} \frac{(p y_1 |x|)^k}{k!}$ converge.

des règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $\left| \frac{y_k}{k!} x^k \right|$.

Alors la série de terme général $\frac{y_k}{k!} x^k$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{k!} x^k$ converge.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(i,j) \in \overline{1,p}^2$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k \right| = \frac{|a_{i,j}^{(k)}|}{k!} |x|^k \leq \frac{y_k |x|^k}{k!} = \left| \frac{y_k x^k}{k!} \right|.$$

la convergence de la série de terme général $\left| \frac{x^k}{k!} \right|$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\left| \frac{a_{i,j}^{(k)} x^k}{k!} \right|$ est convergente.

Alors la série de terme général $\frac{a_{i,j}^{(k)} x^k}{k!}$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$ et pour tout (i,j) dans $\llbracket 1,p \rrbracket^2$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$ converge.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{A,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (xA)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k A^k = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k a_{i,j}^{(k)} \right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{A,n}(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k \right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

Pour tout (i,j) dans $\llbracket 1,p \rrbracket^2$ la série $\sum_{k \geq 0} \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$ est convergente.

Donc pour tout (i,j) dans $\llbracket 1,p \rrbracket^2$, la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Cela signifie alors que la suite $(T_{A,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de $M_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice

$T_A(x)$ de $M_p(\mathbb{R})$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

$$p=1, a_{1,1} = a, \forall k \in \mathbb{N}, a_{1,1}^{(k)} = a^k \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} x^k = e^{ax}.$$

Alors $T_A(x)$ est la matrice de $M_1(\mathbb{R})$ égale à (e^{ax}) . (A)

(Q3) a) Pour $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, D^k = \text{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_p^k)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_{D,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (xD)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} D^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \text{Diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_p^k).$$

$$T_{D,n}(x) = \text{Diag} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(d_1 x)^k}{k!}, \sum_{k=0}^n \frac{(d_2 x)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{(d_p x)^k}{k!} \right).$$

(A) Résultat qui conduit à noter e^{xA} la matrice $T_A(x)$, dans la littérature d'analyse...

Pour tout réel x et pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $T_{0,n}(x)$ est une matrice diagonale.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{0,n}(x) = \text{Diag}\left(\sum_{k=0}^n \frac{(d_1 x)^k}{k!}, \sum_{k=0}^n \frac{(d_2 x)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{(d_p x)^k}{k!}\right)$

Or $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(d_i x)^k}{k!} = e^{d_i x}$.

Ceci suffit alors pour dire que $(T_{0,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale $\text{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_p x})$ de $\Pi_p(\mathbb{R})$.

Si D est la matrice diagonale $\text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ de $\Pi_p(\mathbb{R})$, pour tout x dans $\mathbb{R}$

la suite $(T_{0,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale $\text{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_p x})$

de $\Pi_p(\mathbb{R})$ donc $T_0(x) = \text{Diag}(e^{d_1 x}, e^{d_2 x}, \dots, e^{d_p x})$.

c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $D_r = r(T_0(\frac{1}{r}) - I_p) = r(\text{Diag}(e^{\frac{d_1}{r}}, e^{\frac{d_2}{r}}, \dots, e^{\frac{d_p}{r}}) - I_p)$.

$D_r = \text{Diag}(r(e^{\frac{d_1}{r}} - 1), r(e^{\frac{d_2}{r}} - 1), \dots, r(e^{\frac{d_p}{r}} - 1))$.

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $r(e^{\frac{d_i}{r}} - 1) \sim r \frac{d_i}{r} = d_i$ car $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d_i}{r} = 0$.

Or $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} (r(e^{\frac{d_i}{r}} - 1)) = d_i$. Ceci suffit pour dire que la suite

$(D_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers D ou la suite $(r(T_0(\frac{1}{r}) - I_p))_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers D .

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{A',n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (xA')^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} P^{-1}A^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (xA)^k \right) P$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{A',n}(x) = P^{-1} T_{A,n}(x) P$.

La suite $(T_{A,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)$ et la suite constante et égale à P

converge vers P . Or la suite $(T_{A',n}(x)P)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)P$.

Comme la suite constante égale à P^{-1} converge vers P^{-1} , la suite $(P^{-1}T_{A,n}(x)P)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}T_A(x)P$. A cette suite est égale à la suite $(T_{A',n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $T_{A'}(x)$.

Ainsi $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

$\forall x \in \mathbb{R}, T_{A'}(x) = P^{-1}T_B(x)P$

b) A est diagonalisable car il existe une matrice inversible Q de $M_p(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit une matrice diagonale $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$.

Etape 1 Noter que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n+1} (T_0(\frac{1}{r}) - T_{D,n}(\frac{1}{r})) = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

voir dans Q3

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, r^{n+1} (T_0(\frac{1}{r}) - T_{D,n}(\frac{1}{r})) = r^{n+1} (\text{Diag}(e^{\frac{d_1}{r}}, e^{\frac{d_2}{r}}, \dots, e^{\frac{d_p}{r}}) - \text{Diag}(\sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d_1}{r})^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d_p}{r})^k}{k!}))$$



$$\forall r \in \mathbb{N}^*, r^{n+1} (T_0(\frac{1}{r}) - T_{D,n}(\frac{1}{r})) = \text{Diag} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d_1}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d_1}{r})^k}{k!} \right), \dots, r^{n+1} \left(e^{\frac{d_p}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d_p}{r})^k}{k!} \right) \right).$$

Noter que $\frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} = \text{Diag} \left(\frac{d_1^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{d_2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{d_p^{n+1}}{(n+1)!} \right)$.

il convient donc de noter que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d_i}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d_i}{r})^k}{k!} \right) \right) = \frac{d_i^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $d \in \mathbb{R}$.

noter que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d}{r})^k}{k!} \right) \right) = \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}$ ou encore que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{d}{r})^k}{k!} \right) - \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \right) = 0 \text{ ou encore que}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(\frac{d}{r})^k}{k!} \right) \right) = 0. \quad \text{car } \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} = r^{n+1} \frac{(d/r)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = e^x$. ψ est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $\mathbb{R}$ & $\forall k \in \llbracket 0, n+2 \rrbracket, \psi^{(k)}(x) = \psi$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre $n+1$ à ψ donne :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z^k}{k!} \psi^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!} \max_{u \in [0, z]} |\psi^{(n+2)}(u)|.$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \left| e^z - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!} \max_{u \in [0, z]} e^u = \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!} e^{\max(2, 0)} \leq \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!} e^{|z|}.$$

$$\text{Alors } \forall r \in \mathbb{N}^*, \left| e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(d/r)^k}{k!} \right| \leq \frac{|d/r|^{n+2}}{(n+2)!} e^{|d/r|}.$$

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \left| r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(d/r)^k}{k!} \right) \right| = r^{n+1} \left| e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(d/r)^k}{k!} \right| \leq r^{n+1} \frac{|d/r|^{n+2}}{(n+2)!} e^{|d/r|}$$

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \left| r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(d/r)^k}{k!} \right) \right| \leq \frac{1}{r} \frac{|d|^{n+2}}{(n+2)!} e^{|d/r|}$$

$$\text{On en déduit } \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r} \frac{|d|^{n+2}}{(n+2)!} e^{|d/r|} \right) = 0 \times \frac{|d|^{n+2}}{(n+2)!} \times 1 = 0.$$

$$\text{donc par encadrement } \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(d/r)^k}{k!} \right) \right) = 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(d/r)^k}{k!} \right) - r^{n+1} \times \frac{(d/r)^{n+1}}{(n+1)!} \right] = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(d/r)^k}{k!} \right) - \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \right] = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(d/r)^k}{k!} \right) \right) = \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et ceci pour tout réel } d.$$

$$\text{Alors } \forall i \in [1, p], \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{n+1} \left(e^{\frac{d_i}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{(d_i/r)^k}{k!} \right) \right) = \frac{d_i^{n+1}}{(n+1)!}.$$

▮ Il nous faut donc dire que la suite $\left(r^{n+1} \left(T_0\left(\frac{1}{r}\right) - T_{0,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers

la matrice diagonale de $T_0(x)$ égale à $\text{Diag}\left(\frac{d_1^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{d_2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{d_p^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ qui

n'est autre que la matrice $\frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}$.

Ainsi $\left(r^{n+1} \left(T_0 \left(\frac{1}{r} \right) - T_{0,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}$.

Etape 2 En fait le résultat.

Rappelons que $\mathcal{G}' A \mathcal{G} = D$. Ce que nous avons vu dans a) permet de dire que

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \mathcal{G}' T_A \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G} = T_D \left(\frac{1}{r} \right) \text{ et } \mathcal{G}' T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G} = T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

$$\text{Soit } \forall r \in \mathbb{N}^*, T_A \left(\frac{1}{r} \right) = \mathcal{G} T_D \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G}' \text{ et } T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) = \mathcal{G} T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G}'.$$

$$\text{Alors } \forall r \in \mathbb{N}^*, r^{n+1} \left(T_A \left(\frac{1}{r} \right) - T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = r^{n+1} \left(\mathcal{G} T_D \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G}' - \mathcal{G} T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right) \mathcal{G}' \right).$$

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, r^{n+1} \left(T_A \left(\frac{1}{r} \right) - T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \mathcal{G} \left(r^{n+1} \left(T_D \left(\frac{1}{r} \right) - T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right) \mathcal{G}'.$$

La suite $\left(r^{n+1} \left(T_D \left(\frac{1}{r} \right) - T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}$, la suite constante égale à $\mathcal{G}$ converge vers $\mathcal{G}$ et la suite constante égale à $\mathcal{G}'$ converge vers $\mathcal{G}'$.

Alors la suite $\left(\mathcal{G} \left(r^{n+1} \left(T_D \left(\frac{1}{r} \right) - T_{D,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right) \mathcal{G}' \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathcal{G} \left(\frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} \right) \mathcal{G}'$.

$$\text{Soit la suite } \left(r^{n+1} \left(T_A \left(\frac{1}{r} \right) - T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{G} D^{n+1} \mathcal{G}'.$$

$$\text{Ce } \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{G} D^{n+1} \mathcal{G}' = \frac{1}{(n+1)!} (\mathcal{G} D \mathcal{G}')^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} A^{n+1}.$$

Finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la suite $\left(r^{n+1} \left(T_A \left(\frac{1}{r} \right) - T_{A,n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge

$$\text{vers } \frac{1}{(n+1)!} A^{n+1}.$$

PARTIE II Polynômes annulateurs et matrices de Kalmon

(Q5) a) $f(E)$ est homomorphe à $M_p(\mathbb{C})$ d'ac $\dim \mathcal{L}(E) = p^2$.

$(Id_E, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{p^2+1})$ est une famille de $\mathcal{L}(E)$ de cardinal p^2+1 . C'est d'ac une famille liée de $\mathcal{L}(E)$ car $\dim \mathcal{L}(E) = p^2$.

Alors $\exists (d_0, d_1, \dots, d_{p^2}) \in \mathbb{C}^{p^2+1}$, $\sum_{k=0}^{p^2} d_k \varphi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(d_0, d_1, \dots, d_{p^2}) \neq 0_{\mathbb{C}^{p^2+1}}$.

Pour $\varphi = \sum_{k=0}^{p^2} d_k X^k$, $\varphi \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons φ constant. Alors $\varphi = d_0$. d'ac $0_{\mathcal{L}(E)} = \varphi(\varphi) = d_0 Id_E$ et $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\dim E = p^2 \geq 1$. d'ac $\varphi = d_0 = 0$. $\varphi = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Ceci n'est pas possible.

Alors φ n'est pas constant. Soit r le degré de φ . $1 \leq r \leq p^2$.

Pour $\tilde{\varphi} = X^{p^2-r} \varphi$ (petit artifice pour palier une malchance des coaccepteurs...)

Alors $\tilde{\varphi} \in \mathbb{C}[X]$, $\deg \tilde{\varphi} = p^2$ et $\tilde{\varphi}(\varphi) = \varphi^{p^2-r} \circ \varphi(\varphi) = \varphi^{p^2-r} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\tilde{\varphi} \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg \tilde{\varphi} = p^2 \geq 1$. Alors $\tilde{\varphi}$ est scindé.

d'ac $\exists c \in \mathbb{C}^*$, $\exists (z_1, z_2, \dots, z_{p^2}) \in \mathbb{C}^{p^2+1}$, $\tilde{\varphi} = c \prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$. Pour $\tilde{\tilde{\varphi}} = \prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$.

$0_{\mathcal{L}(E)} = \tilde{\varphi}(\varphi) = c \tilde{\tilde{\varphi}}(\varphi)$ et $c \neq 0$ alors $\tilde{\tilde{\varphi}}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

d'ac $\prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$ est un polynôme annulateur de φ .

Reprise une suite finie $(z_k)_{1 \leq k \leq p^2}$ de nombres complexes tels que le polynôme

$\prod_{k=1}^{p^2} (X - z_k)$ de $\mathbb{C}[X]$ soit un polynôme annulateur de φ .

b) Pour $\forall k \in [1, p^2]$, $\psi_k = \varphi - z_k Id_E$. $\forall k \in [1, p^2]$, $\psi_k \in \mathcal{L}(E)$.

$\psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_{p^2} = \tilde{\tilde{\varphi}}(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ n'est pas injectif (car $E \neq \{0\}$).

A la composée d'endomorphismes injectifs et un endomorphisme injectif.

d'ac il existe un élément k_0 de $[1, p^2]$ tel que ψ_{k_0} n'est pas injectif.

Alors $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif d'ac λ_0 est une valeur propre de φ .

φ possède au moins une valeur propre.

(Q6) a) posons $\forall u \in E, f(u) = \pi(\varphi(u))$ (f n'est pas $\pi \circ \varphi$!!) $\pi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E)$
↓

$\forall u \in E, \pi(\varphi(u)) \in E$ d'ac f est une application de E dans E .

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_1, u_2) \in E^2, f(\lambda u_1 + u_2) = \pi(\varphi(\lambda u_1 + u_2)) = \pi(\lambda \varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \lambda \pi(\varphi(u_1)) + \pi(\varphi(u_2)) = \lambda f(u_1) + f(u_2)$.
Ainsi f est linéaire. ↑ φ est linéaire ↑ π est linéaire

Finalement f est un endomorphisme de E . Ce d'ac $H = \dim E - \dim F = p - k > 0$.

d'après Q5 (!) f possède au moins une valeur propre.

Ainsi il existe un vecteur non nul v de E et un nombre complexe λ vérifiant l'équation

$$\underline{f(v) = \lambda v \text{ ou } \pi(\varphi(v)) = \lambda v \text{ ou } (\pi \circ \varphi)(v) = \lambda v.}$$

b) $F \cap \text{Vect}(v) \subset F \cap H = \{0_E\}$. Comme $0_E \in F \cap \text{Vect}(v)$: $F \cap \text{Vect}(v) = \{0_E\}$.

la somme de F et $\text{Vect}(v)$ est directe.

Soit $u \in F + \text{Vect}(v)$. $\exists (u_1, u_2) \in F \times \text{Vect}(v), u = u_1 + u_2$.

F est stable par φ d'ac $\varphi(u_1) \in F$. $u_2 \in \text{Vect}(v)$ d'ac $\varphi(u_2) \in \varphi(\text{Vect}(v))$.

Or $\varphi(\text{Vect}(v)) = \text{Vect}(\varphi(v)) = \text{Vect}(\lambda v) \subset \text{Vect}(v)$. Ainsi $\varphi(u_2) \in \text{Vect}(v)$.

Alors $\varphi(u) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in F + \text{Vect}(v)$.

Par conséquent $F + \text{Vect}(v)$ est stable par φ .

(Q7) La logique du texte veut sans doute que l'on maîtrise par récurrence sur k

que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ il existe une famille linéaire $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ de E

telle que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \varphi(v_i) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

• φ possède au moins une valeur propre λ . Soit v un vecteur propre associé.

$v \neq 0_E$ et $\varphi(v) = \lambda v \in \text{Vect}(v)$. d'ac $\{v\}$ est linéaire et $\varphi(v) \in \text{Vect}(v)$.

Ainsi la propriété est vraie pour $k=1$.

- Supposons que la propriété est vraie pour un élément k de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et montrons-la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que'il existe une famille libre $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ de E telle que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \varphi(v_i) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

Posons $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. On a $F = k$ et $1 \leq k < p$. D'après ce qui précède on peut trouver un vecteur v_{k+1} de E tel que $F + \text{Vect}(v_{k+1})$ soit une sous-espace stable par φ .

$(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une base de F , v_{k+1} est une base de $\text{Vect}(v_{k+1})$ et, F et $\text{Vect}(v_{k+1})$ sont en somme directe. Alors $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$ est une base de $F + \text{Vect}(v_{k+1})$. Alors $\forall (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ est une famille libre de E ;
 $\varphi(F + \text{Vect}(v_{k+1})) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$.

$v_{k+1} \in F + \text{Vect}(v_{k+1})$ et $F + \text{Vect}(v_{k+1})$ est stable par φ donc $\varphi(v_{k+1}) \in F + \text{Vect}(v_{k+1})$.

donc $\varphi(v_{k+1}) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$.

Après hypothèse de récurrence : $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \varphi(v_i) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$.

donc $\forall i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket, \varphi(v_i) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$ ce qui achève la récurrence.

En particulier la propriété est vraie pour $k = p$. On peut trouver une famille libre $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de E telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(v_i) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_i)$ ou $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(v_k) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$!

B est une famille libre de E dont le cardinal coïncide avec le dimension de E .

Alors B est une base de E .

Il existe une base $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de E telle que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(v_k) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Remarque.. la matrice n de φ dans B est triangulaire supérieure.

donc tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

"possède une matrice" triangulaire supérieure. ce qui donne aussi le résultat d'unique suivante : toute matrice de $M_p(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Q8) Soient $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\varphi_k = \varphi - m_{k,k} \text{Id}_E$. Rappelons que φ est triangulaire supérieure.
a) Soit $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

1^{er} cas: $i < k$. $\varphi_k(e_i) = \varphi(e_i) - m_{k,i} e_i$, $\varphi(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ et $m_{k,i} e_i \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$.

Alors $\varphi_k(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i) = F_i$. Or $F_i \subset F_{k-1}$, car $i < k$.

Donc $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

triangulaire supérieure

$$2^{\text{nd}} \text{ cas: } i = k \quad \varphi_k(e_i) = \varphi(e_i) - m_{k,i} e_i = \varphi(e_k) - m_{k,k} e_k = \sum_{j=1}^k m_{j,k} e_j - m_{k,k} e_k = \sum_{j=1}^{k-1} m_{j,k} e_j.$$

Donc $\varphi_k(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$; $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\varphi_k(e_i) \in F_{k-1}$.

Alors $\varphi_k(F_k) = \varphi_k(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) = \text{Vect}(\varphi_k(e_1), \varphi_k(e_2), \dots, \varphi_k(e_k)) \subset F_{k-1}$.

Donc $(\varphi - m_{k,k} \text{Id}_E)(F_k) \subset F_{k-1}$ et ceci pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$.

b) Montrons par récurrence "descendante" que :

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, (\varphi_k \circ \varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{k-1}.$$

• $\varphi_p(E) = \varphi_p(F_p) = (\varphi - m_{p,p} \text{Id}_E)(F_p) \subset F_{p-1}$. La propriété est vraie pour p .

• Supposons la propriété vraie pour $k \in \llbracket 3, p \rrbracket$ et montrons la pour $k-1$.

L'hypothèse de récurrence donne : $(\varphi_k \circ \varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{k-1}$.

$$\text{Alors } (\varphi_{k-1} \circ \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \varphi_{k-1}(F_{k-1}) = (\varphi - m_{k-1,k-1} \text{Id}_E)(F_{k-1}) \subset F_{(k-1)-1}.$$

Ainsi $(\varphi_{k-1} \circ \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{(k-1)-1}$. Ceci achève la récurrence.

La propriété est en particulier vraie pour $k=2$.

$$\text{Donc } (\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset F_{2-1} = F_1.$$

$$\text{Alors } (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \varphi_1(F_1) = \varphi_1(\text{Vect}(U_1)) = \text{Vect}(\varphi_1(U_1)).$$

$$\text{Or } \varphi_1(U_1) = (\varphi - m_{1,1} \text{Id}_E)(U_1) = \varphi(U_1) - m_{1,1} U_1 = m_{1,1} U_1 - m_{1,1} U_1 = 0_E.$$

$$\text{Donc } (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) \subset \{0_E\}. \text{ Alors } (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p)(E) = \{0_E\} !$$

R.

$$\text{Alors } I_n (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p) = \{0_E\}, \quad \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$\text{Or } (\varphi - \alpha_{1,1} \text{Id}_E) \circ (\varphi - \alpha_{2,2} \text{Id}_E) \circ \dots \circ (\varphi - \alpha_{p,p} \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le polynôme $\prod_{k=1}^p (x - \alpha_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de φ de degré p .

Donc le polynôme $\prod_{k=1}^p (x - \alpha_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice M .

Ainsi M possède un polynôme annulateur de degré p .

(Q9) Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$. Soit φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ dont la matrice dans la base canonique ^{et A} s'écrit $\bar{A}$. D'après ce qui précède il existe un polynôme annulateur S de φ_A appartenant à $\mathbb{C}[X]$ et de degré p .

$$\text{Alors } S \in \mathbb{C}[X], \deg S = p \text{ et } S(A) = 0_{M_p(\mathbb{C})}.$$

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p, \quad S = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k \text{ et } \underline{\underline{\alpha_p \neq 0}}, \quad \sum_{k=0}^p \alpha_k A^k = 0_{M_p(\mathbb{C})}.$$

Pour tout $k \in \{0, p\}$ notons $\hat{\alpha}_k$ la partie réelle de α_k et $\check{\alpha}_k$ sa partie imaginaire.

$$0_{M_p(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^p \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^p (\alpha_k + i \beta_k) A^k = \sum_{k=0}^p \hat{\alpha}_k A^k + i \sum_{k=0}^p \check{\alpha}_k A^k.$$

On a $\sum_{k=0}^p \hat{\alpha}_k A^k \in M_p(\mathbb{R})$ et $\sum_{k=0}^p \check{\alpha}_k A^k \in M_p(\mathbb{R})$. Il n'est pas difficile de voir que dans

$$\sum_{k=0}^p \hat{\alpha}_k A^k = \sum_{k=0}^p \check{\alpha}_k A^k = 0_{M_p(\mathbb{R})}, \quad \hat{S} = \sum_{k=0}^p \hat{\alpha}_k X^k \text{ et } \check{S} = \sum_{k=0}^p \check{\alpha}_k X^k \text{ sont donc des}$$

polynômes annulateurs de A appartenant à $\mathbb{R}[X]$.

$\alpha_p = \hat{\alpha}_p + i \check{\alpha}_p$, $\alpha_p \neq 0$, $\hat{\alpha}_p \in \mathbb{R}$ et $\check{\alpha}_p \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{\alpha}_p \neq 0$ ou $\check{\alpha}_p \neq 0$... ou les deux !

Donc $\deg \hat{S} = p$ ou $\deg \check{S} = p$... ou les deux.

Ainsi A admet un polynôme annulateur appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p .

(Q10) a) Rappelons que A possède un polynôme annulateur T appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p , $\exists (t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $T = \sum_{k=0}^p t_k X^k$ et $t_p \neq 0$.

$$O_{n, n}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^p t_k A^k = t_p A^p + \sum_{k=0}^{p-1} t_k A^k; \quad A^p = \sum_{k=0}^{p-1} \left(-\frac{t_k}{t_p} \right) A^k.$$

$\uparrow$
 $t_p \neq 0$

donc $A^p \in \text{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$.

montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}, A^k \in \text{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$.

• Nous voyons de suite que la propriété est vraie pour $k=0$.

• Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que A^k est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$.

Alors A^{k+1} qui est égal à $A A^k$ est combinaison linéaire de $A, A^2, \dots, A^p$. Or A^p est

combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$ donc A^{k+1} est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$.

donc $A^{k+1} \in \text{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}, A^k \in \text{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$. notons : $\forall k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}, A^k \in \text{Vect}(A^0, A, \dots, A^{p-1})$

Soit q un entier strictement supérieur à p .

• $\forall k \in \mathbb{I}0, p-1\mathbb{I}, A^k B \in \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{q-1}B) = G_q$.

Alors $G_p = \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) \subset G_q$. $G_p \subset G_q$.

• Montrons que $G_q \subset G_p$.

Pour tout $k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}$, A^k est combinaison linéaire de $A^0, A, \dots, A^{p-1}$.

donc pour tout $k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}$, $A^k B$ est combinaison linéaire de $A^0 B, AB, \dots, A^{p-1}B$.

$\forall k \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}, A^k B \in \text{Vect}(A^0 B, AB, \dots, A^{p-1}B) = \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) = G_p$.

En particulier $\forall k \in \mathbb{I}0, q-1\mathbb{I}, A^k B \in G_p$. Alors $G_q = \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{q-1}B) \subset G_p$.

donc $G_q \subset G_p$.

Enfinement $\forall q \in \mathbb{I}p, +\infty\mathbb{I}, q > p \Rightarrow G_q = G_p$.

D) Notons $\mathcal{S}$ l'orthogonal de G_p dans $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^\perp = G_p^{\perp\perp} = G_p$.

Soit $G \in \Pi_{p,1}(\mathbb{R})$

$G \in G_p \Leftrightarrow G \in \mathcal{S}^\perp \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}, \langle S, G \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}, {}^t S G = 0$.

Requête un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante,
pour qu'une matrice G de $M_{p,2}(\mathbb{R})$ appartienne à $\mathcal{G}_p$, il faut et il suffit que
pour tout élément S de $\mathcal{S}$, $t_S G = 0$.

□ Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{G}_p$ qui est convergente. Notons G sa limite.

Soit $S \in \mathcal{S}$. $t_S G_n = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

La suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers G et la suite constante égale à t_S converge vers t_S .

Alors d'après ce qui est admis la suite $(t_S G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $t_S G$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_S G_n = 0$ d'où $t_S G = 0$.

$\forall S \in \mathcal{S}$, $t_S G = 0$. $G \in \mathcal{G}_p$.

Si $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices de $\mathcal{G}_p$, sa limite G appartient à $\mathcal{G}_p$.

Remarque. Pour les suites $\mathcal{G}_p$ et un fermé de $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

□ Soit $x \in \mathbb{R}$. $(T_{A,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)$ et la suite constante égale à B converge vers B . Alors la suite $(T_{A,n}(x)B)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T_A(x)B$.

$$\forall n \in [p, +\infty[, T_{A,n}(x)B = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k A^k B \in \mathcal{G}_{n+1} \underset{\uparrow}{=} \mathcal{G}_p$$

$$\forall n \in [0, p-1] , T_{A,n}(x)B = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k A^k B \in \mathcal{G}_{n+1} \underset{n+1 \leq p}{\subset} \mathcal{G}_p .$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{A,n}(x)B \in \mathcal{G}_p$.

d'où $(T_{A,n}(x)B)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{G}_p$ qui converge vers $T_A(x)B$.

Alors □ indique que $T_A(x)B \in \mathcal{G}_p$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $T_A(x)B$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

PARTIE III Contrôle de système linéaire

(Q1) Soons un peu plus clair que l'énoncé et montrons par analyse / synthèse qu'il existe une unique application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1]$, qui vérifie:
 $f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1], f'(t) = a f(t) + b u(t)$.

Analyse / unicité. Supposons que'une telle fonction f existe. Posons $\forall t \in [0,1], h(t) = f(t)e^{-at}$
 h est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1], f(t) = h(t)e^{at}$.
 $\forall t \in [0,1], a h(t)e^{at} + b u(t) = a f(t) + b u(t) = f'(t) = h'(t)e^{at} + h(t)ae^{at}$

Alors $\forall t \in [0,1], b u(t) = h'(t)e^{at}$. $\forall t \in [0,1], h'(t) = b u(t)e^{-at}$.

Notons encore que $h(0) = f(0)e^{-a \cdot 0} = 0 \times 1 = 0$.

Alors $\forall t \in [0,1], h(t) = h(t) - h(0) = \int_0^t h'(u) du = \int_0^t b u(u) e^{-au} du = b \int_0^t u(u) e^{-au} du$.

$\forall t \in [0,1], f(t) = e^{at} h(t) = e^{at} b \int_0^t u(u) e^{-au} du$. $\forall t \in [0,1], f(t) = b \int_0^t u(u) e^{a(t-u)} du$

d'où l'unicité de f .

Synthèse / Existence. Posons $\forall t \in [0,1], f(t) = b \int_0^t u(u) e^{a(t-u)} du$.

$\forall t \in [0,1], f(t) = b e^{at} \int_0^t u(u) e^{-au} du$.

$t \mapsto \int_0^t u(u) e^{-au} du$ est dérivable sur $[0,1]$ car c'est la primitive sur l'intervalle $[0,1]$

de la fonction continue $t \mapsto u(t)e^{-at}$, qui prend la valeur 0 à 0.

Comme $t \mapsto b e^{at}$ est dérivable sur $[0,1]$, par produit f est dérivable sur $[0,1]$.

$f(0) = b e^{a \cdot 0} \int_0^0 u(u) e^{-au} du = b \times 1 \times 0 = 0$; $f(0) = 0$.

$\forall t \in [0,1], f'(t) = b a e^{at} \int_0^t u(u) e^{-au} du + b e^{at} u(t) e^{-at} = a f(t) + b u(t)$.

Ainsi f est solution.

Ceci achève de montrer qu'il existe une unique application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable

sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1], f'(t) = a f(t) + b u(t)$.

$\forall t \in [0,1], f(t) = b e^{at} \int_0^t u(u) e^{-au} du$.

b) Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit u la fonction de $\mathcal{B}^0$ définie par $\forall t \in [0,1], f(t) = c$.

Soit f la fonction qui est définie par (**).

$$\forall t \in [0,1], f(t) = b \int_0^t u(s) e^{a(t-s)} ds = bc e^{at} \int_0^t e^{-as} ds.$$

1^{er} cas.. $a=0$. $\forall t \in [0,1], f(t) = bc \times 1 \times \int_0^t 1 ds = bct$.

2nd cas.. $a \neq 0$. $\forall t \in [0,1], f(t) = bc e^{at} \left[\frac{e^{-as}}{-a} \right]_0^t = bc e^{at} \left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right) = \frac{bc}{a} (e^{at} - 1).$

Si $a=0$, $\forall t \in [0,1], f(t) = bct$. Si $a \neq 0$ $\forall t \in [0,1], f(t) = \frac{bc}{a} (e^{at} - 1).$

Notons que le couple (a,b) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.

1^{er} cas.. $b \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) $a \neq 0$ Posons $c = \frac{ay}{b(e^a - 1)}$ et $\forall t \in [0,1], u(t) = c$.

Alors $u \in \mathcal{B}^0$. Soit f la fonction définie par (**).

$$\forall t \in [0,1], f(t) = \frac{bc}{a} (e^{at} - 1). \quad f(1) = \frac{bc}{a} (e^a - 1) = \frac{b}{a} (e^a - 1) c = \frac{b}{a} (e^a - 1) \times \frac{ay}{b(e^a - 1)} = y.$$

donc $f(1) = y$.

b) $a=0$ Posons $c = \frac{y}{b}$ et $\forall t \in [0,1], u(t) = c$.

Alors $u \in \mathcal{B}^0$. Soit f la fonction définie par (**).

$$\forall t \in [0,1], f(t) = bct. \quad f(1) = bc = b \frac{y}{b} = y. \quad f(1) = y.$$

Dans les deux cas, pour tout réel y il existe un élément u de $\mathcal{B}^0$ telle que

l'unique application f de $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall t \in [0,1], f'(t) = a f(t) + b u(t), \text{ vérifie } f(1) = y.$$

donc (a,b) est contrôlable.

2nd cas.. $b=0$. Posons $y=17$! Soit u un élément quelconque de $\mathcal{B}^0$ et f la fonction définie par (**). $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$ car $b=0$ donc $f(1) \neq y$.

Ceci suffit pour dire que (g, h) n'est pas contrôlable.

Finalement (g, h) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.

Q12) Nous avons vu dans Q10 d) que $\forall z \in [0, 1], T_A(z)B \in \mathcal{G}_p$.

$\forall x \in [0, 1], \exists z \in [0, 1]$ donc $\forall x \in [0, 1], T_A(1-x)B \in \mathcal{G}_p$.

$\forall x \in [0, 1], W(x) \in \mathcal{G}_p$ et $u(x) \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{G}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\Pi_p(\mathbb{R})$:

$\forall x \in [0, 1], u(x)W(x) \in \mathcal{G}_p$.

Alors pour tout $x \in [0, 1], \exists (d_0(x), d_1(x), \dots, d_{p-1}(x)) \in \mathbb{R}^p, u(x)W(x) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i(x) A^i B$.

Pour tout k dans $[1, p]$, notons $\beta_k(i)$ la $k^{\text{ème}}$ composante de $A^i B$ et ceci pour tout i dans $[0, p-1]$.

Ainsi $\forall x \in [0, 1], u(x)W_k(x) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i(x) \beta_k(i)$ et ceci pour tout k dans $[1, p]$.

Alors $\int_0^1 u(x)W_k(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_k(i) \int_0^1 d_i(x) dx$ pour tout $k \in [1, p]$.

Pour $\forall k \in [2, p-1], \sigma_k = \int_0^1 d_i(x) dx$. Alors $\int_0^1 u(x)W_k(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i \beta_k(i)$, pour

tout k dans $[1, p]$.

ce qui permet de dire que $\int_0^1 u(x)W(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i A^i B$.

Pour conclure est $\int_0^1 u(x)W(x) dx \in \mathcal{G}_p$.

b) Soit $Z = (z_k)_{1 \leq k \leq p}$ un élément de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$. $\forall x \in [0, 1], {}^t Z W(x) = \langle Z, W(x) \rangle = \sum_{k=1}^p z_k W_k(x)$.

Pour $\forall x \in [0, 1], u(x) = \sum_{k=1}^p z_k W_k(x)$. Comme $W_1, W_2, \dots, W_p$ sont continues sur $[0, 1]$,

u est continue sur $[0, 1]$. Mais $u \in \mathcal{G}^0$. Donc $\int_0^1 u(x) {}^t Z W(x) dx = 0$ et $\forall x \in [0, 1], {}^t Z W(x) = u(x)$.

Donc $\int_0^1 (u(x))^2 dx = 0$. Comme u^2 est continue et positive sur $[0, 1]$, $\forall x \in [0, 1], u^2(x) = 0$.

Alors $\forall x \in [0, 1], u(x) = 0$ donc $\forall x \in [0, 1], {}^t Z W(x) = 0$

$$c) \quad \forall x \in [0,1], T_A(1-x)B = W(x). \quad \forall x \in [0,1], {}^tZ T_A(1-x)B = {}^tZ W(x) = 0.$$

Comme $x \mapsto 1-x$ définit une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$: $\forall x \in [0,1], {}^tZ T_A(x)B = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. d'après la suite $\left(r^{n+1} \left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(n+1)!} A^{n+1}$.

La suite constante égale à tZ (resp. B) converge vers tZ (resp. B).

Alors la suite $\left({}^tZ \left[r^{n+1} \left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ${}^tZ \left(\frac{1}{(n+1)!} A^{n+1} \right)$ et

la suite (de vect.) $\left({}^tZ \left[r^{n+1} \left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] B \right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ${}^tZ \left(\frac{1}{(n+1)!} A^{n+1} \right) B$.

Pour $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $d_r = {}^tZ \left[r^{n+1} \left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] B$. $(d_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de vect. convergente. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$d_r = r^{n+1} \left[{}^tZ T_A\left(\frac{1}{r}\right) B - {}^tZ T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) B \right]. \text{ Or } \frac{1}{r} \in [0,1] \text{ donc } {}^tZ T_A\left(\frac{1}{r}\right) B = 0.$$

$$\text{Alors } d_r = -r^{n+1} {}^tZ T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) B = -r^{n+1} {}^tZ \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{r}\right)^k A^k \right) B.$$

$$d_r = - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{r^{n+1}}{r^k} {}^tZ A^k B = - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} {}^tZ A^k B \right) r^{n+1-k}.$$

Supposons que $I = \{k \in [0, n] \mid {}^tZ A^k B \neq 0\} \neq \emptyset$. Soit k_0 le plus petit

élément de I . $d_r = - \sum_{k=k_0}^n \left(\frac{1}{k!} {}^tZ A^k B \right) r^{n+1-k}$. $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^{k-k_0}} = 0$ si $k > k_0$.

$$\frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} = - \sum_{k=k_0}^n \left(\frac{1}{k!} {}^tZ A^k B \right) \frac{1}{r^{k-k_0}}; \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} = - \frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B \text{ et}$$

$$\frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B \neq 0. \text{ Ainsi } \frac{d_r}{r^{n+1-k_0}} \sim \frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B; \quad d_r \sim - \left(\frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B \right) r^{n+1-k_0}$$

Or $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n+1-k_0} = +\infty$ car $k_0 \leq n$.

$$\text{Alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} d_r = \begin{cases} +\infty & \text{si } \frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B < 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{1}{k_0!} {}^tZ A^{k_0} B > 0 \end{cases}$$

d'où la suite $(d_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ diverge !!

comme la suite $(d_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge $I = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \sum A^k B \neq 0\}$ est vide.

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum A^k B = 0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Pour conclure est $\forall k \in \underline{\mathbb{N}}, \sum A^k B = 0$.

Alors $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum A^{k-1} B = 0$.

d) Notons que (A, B) est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman K_p est inversible.

* Supposons que K_p n'est pas inversible. Alors la famille constituée par ses colonnes a une famille liée de cardinal p dans $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension p . Alors cette famille n'est pas une famille génératrice de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$ (si elle l'était ce serait une base de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$ dans une famille libre).

Alors il existe un élément γ de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\gamma \notin \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B)$.

Or $\gamma \in \mathcal{G}_p$. Or $\forall u \in \mathcal{B}^0, \int_0^1 u(x)w(x)dx \in \mathcal{G}_p$ d'après §12 a).

Alors $\forall u \in \mathcal{B}^0, \int_0^1 u(x)w(x)dx \neq \gamma$.

Pour conclure est (A, B) n'est pas contrôlable.

* Supposons que (A, B) n'est pas contrôlable. Notons alors que K_p n'est pas inversible.

(A, B) n'est pas contrôlable. Alors il existe un élément γ de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout

u appartenant à $\mathcal{B}^0, \int_0^1 u(x)w(x)dx \neq \gamma$.

Posons $F = \{ \int_0^1 u(x)w(x)dx ; u \in \mathcal{B}^0 \}$. Notons que F est un sous-espace vectoriel

de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$. Notons avant cela que $\gamma \notin F$.

• $F \subset \pi_{p,1}(\mathbb{R})$.

• $\mathcal{B}^0$ n'est pas vide donc F n'est pas vide.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit U_1 et U_2 deux éléments de F . Il existe deux éléments u_1 et u_2 de $\mathcal{B}^0$

telles que : $U_1 = \int_0^1 u_1(x)w(x)dx$ et $U_2 = \int_0^1 u_2(x)w(x)dx$.

$$\lambda u_1 + u_2 \in \mathcal{B}^0 \text{ et } \lambda \int_0^1 u_1(x) W(x) dx + \int_0^1 u_2(x) W(x) dx = \int_0^1 (\lambda u_1 + u_2)(x) W(x) dx.$$

Alors $\lambda u_1 + u_2 \in F$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_1, u_2) \in F^{\perp}, \lambda u_1 + u_2 \in F.$$

Ceci admet de matrice F et u , sous-espace vectoriel de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\Pi_{p,1}(\mathbb{R}) = F \oplus F^{\perp} \quad (\Pi_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ est muni du produit scalaire canonique } \dots).$$

$$\text{Si } F^{\perp} = \{0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}\} : \Pi_{p,1}(\mathbb{R}) = F \text{ d'ac } \gamma \in F !!$$

Alors $F^{\perp} \neq \{0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}\}$. Donc il existe un élément non nul Z de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ orthogonal à F .

$$\text{Alors } \forall u \in \mathcal{B}^0, \int_0^1 u(x) W(x) dx = \langle Z, \int_0^1 u(x) W(x) dx \rangle = 0.$$

$$\text{Posons } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \dots \text{ ou } Z = (z_i)_{1 \leq i \leq p}. \text{ Rappelons que } \int_0^1 u(x) W(x) dx = \left(\int_0^1 u(x) W_i(x) dx \right)_{1 \leq i \leq p}$$

pour tout $u \in \mathcal{B}^0$.

$$\text{Alors } \forall u \in \mathcal{B}^0, 0 = \langle Z, \int_0^1 u(x) W(x) dx \rangle = \sum_{i=1}^p z_i \int_0^1 u(x) W_i(x) dx = \int_0^1 u(x) \left(\sum_{i=1}^p z_i W_i(x) \right) dx.$$

$$\text{Donc } \forall u \in \mathcal{B}^0, 0 = \int_0^1 u(x) \langle Z, W(x) \rangle dx = \int_0^1 u(x) {}^t Z W(x) dx.$$

$$\text{Alors, d'après } \mathcal{Q}12 \subseteq \forall k \in [1, p], {}^t Z A^{k-1} B = 0.$$

$$\forall k \in [1, p], \langle Z, A^{k-1} B \rangle = 0. \text{ Ainsi } Z \text{ est orthogonal à } A^0 B, A^1 B, \dots, A^{p-1} B \text{ d'ac}$$

$$Z \in (\text{Vect}(A^0 B, A^1 B, \dots, A^{p-1} B))^{\perp} = G_p^{\perp} \text{ et } Z \neq 0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}. \quad G_p^{\perp} \neq \{0_{\Pi_{p,1}(\mathbb{R})}\}.$$

$$\text{Alors } \dim G_p^{\perp} \geq 1 \text{ donc } \dim G_p = \dim \Pi_{p,1}(\mathbb{R}) - \dim G_p^{\perp} = p - \dim G_p^{\perp} < p.$$

$$G_p = \text{Vect}(A^0 B, A^1 B, \dots, A^{p-1} B) \text{ et } \dim G_p < p.$$

$$\text{Rappelons que } (A^0 B, A^1 B, \dots, A^{p-1} B) \text{ est la famille des colonnes de } K_p. \text{ Alors } \dim K_p < p.$$

$$\text{Comme } K_p \in \Pi_p(\mathbb{R}), K_p \text{ n'est pas inversible.}$$

$$\text{Finalement } K_p \text{ n'est pas inversible et n'est ni (A,B) n'est pas contrôlable.}$$

$$\text{qui permet de dire que } \underline{\underline{(A,B) est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman}}$$

$$\underline{\underline{K_p \text{ est inversible.}}}$$

Q13) a) $X_{A,0} = 0_{\pi_{q,1}(\mathbb{R})}$. $X_{A,1} = AX_{A,0} + D_1 B = D_1 B$.

$$X_{A,2} = AX_{A,1} + D_2 B = A(D_1 B) + D_2 B = D_1 AB + D_2 B = D_2 B + D_1 AB.$$

$$X_{A,3} = AX_{A,2} + D_3 B = A(D_2 B + D_1 AB) + D_3 B = D_3 B + D_2 AB + D_1 A^2 B \dots$$

notons par récurrence que $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $X_{A,k} = \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i} A^i B$.

• $X_{A,1} = D_1 B$ et $\sum_{i=0}^{1-1} D_{1-i} A^i B = D_1 A^0 B = D_1 B$. la propriété est vraie pour $k=1$.

• supposons la propriété vraie pour un élément k de $\llbracket 1, q-1 \rrbracket$ et montrons le pour $k+1$.

$$X_{A,k+1} = AX_{A,k} + D_{k+1} B = A \left(\sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i} A^i B \right) + D_{k+1} B = \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i} A^{i+1} B + D_{k+1} B.$$

↑
hypothèse de récurrence

$$X_{A,k+1} = \sum_{i=1}^k D_{k-(i-1)} A^i B + D_{k+1} B = \sum_{i=0}^{(k+1)-1} D_{(k+1)-i} A^i B.$$

↑
 $i \leftarrow i-1$

ceci achève la récurrence.

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, X_{A,k} = \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i} A^i B.$$

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_q)$ la base canonique de $\pi_{q,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $K_q E_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de K_q c'est-à-dire $A^{j-1} B$.

$$\text{Alors } X_{A,q} = \sum_{i=0}^{q-1} D_{q-i} A^i B = \sum_{j=1}^q D_{q-(j-1)} A^{j-1} B = \sum_{j=1}^q D_{q-(j-1)} K_q E_j.$$

$j=i+1$

$$X_{A,q} = K_q \left(\sum_{j=1}^q D_{q-(j-1)} E_j \right) = K_q \begin{pmatrix} D_q \\ D_{q-1} \\ \vdots \\ D_1 \end{pmatrix}$$

Si $C_D = \begin{pmatrix} D_q \\ D_{q-1} \\ \vdots \\ D_1 \end{pmatrix} = (D_{q+1-k})_{1 \leq k \leq q}$ alors $X_{A,q} = K_q C_D$.

Remarque.. cette notation

est équivalente car

l'équation $X \in \pi_{q,1}(\mathbb{R})$ et

$X_{A,q} = K_q X$ n'a pas qu'une solution. Sans la suite il faudrait comprendre que si

$D = (D_1, D_2, \dots, D_q)$, $C_D = \begin{pmatrix} D_q \\ D_{q-1} \\ \vdots \\ D_1 \end{pmatrix}$.

b) K_p est inversible d'ac la famille $(B, AB, \dots, A^{p-1}B)$ de ses colonnes est une famille de rang p .

Alors $\dim G_p = \dim \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B) = p$, $G_p \subset \Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\dim \Pi_{p,1}(\mathbb{R}) = p$.

d'ac $G_p = \Pi_{p,1}(\mathbb{R})$. Alors $G_q = G_p = \Pi_{p,1}(\mathbb{R})$.

d'ac $\Pi_{p,1}(\mathbb{R}) = \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{p-1}B)$.

Soit Y une matrice de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$. $\exists (t_0, t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$, $Y = \sum_{k=0}^{q-1} t_k A^k B$.

Alors $Y = K_q \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{q-1} \end{pmatrix}$. Posons $\forall k \in [1, q]$, $\lambda'_k = t_{q-k}$ et $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_q)$, $\lambda' \in \mathbb{R}^q$.

considérons la suite finite $(X_{\lambda',k})_{0 \leq k \leq q}$ définie par $\begin{cases} \lambda'_{k=0} = 0 \Pi_{p,1}(\mathbb{R}) \\ \forall k \in [1, q], X_{\lambda',k} = A X_{\lambda',k-1} + \lambda'_k B \end{cases}$.

Alors $X_{\lambda',q} = K_q \begin{pmatrix} \lambda'_{q-1} \\ \lambda'_{q-2} \\ \vdots \\ \lambda'_1 \end{pmatrix}$ comme nous l'avons vu dans a).

d'ac $X_{\lambda',q} = K_q \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{q-1} \end{pmatrix} = Y$.

d'ac pour toute matrice Y de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ il existe un contrôle de durée λ' tel que $X_{\lambda',q} = Y$.

Q14 $\forall Y \in \Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ Ici je ne fais aucune identification et je n'essaie pas d'être le plus fidèle possible à la partie du cours concernant l'optimisation sous contrainte ... ce qui peut garder une certaine cohérence !!

- $\mathbb{R}^n$ et un ouvert
- J est une application de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ de classe G^1 sur $\mathbb{R}^q$ car elle est polynomiale.
- Analyser la contrainte pour l'insérer au cours.

Posons $B = \{ \lambda \in \mathbb{R}^q \mid X_{\lambda,q} = Y \}$.

$B = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q \mid Y = K_q \begin{pmatrix} \lambda_q \\ \lambda_{q-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \}$... ou $B = \{ \lambda \in \mathbb{R}^q \mid Y = K_q C_\lambda \}$

Posons $K_q = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

Soit $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q)$ un élément de $\mathbb{R}^q$

$$\Delta \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \gamma = K_q \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, y_i = \sum_{j=1}^q d_{i,j} \Delta_{q-j+1}$$

$$\Delta \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, y_i = \sum_{j=1}^q d_{i, q-j+1} \Delta_j \quad \downarrow j \leftarrow q-j+1$$

Pour $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q) \in \mathbb{R}^q, g_i(\Delta) = \sum_{j=1}^q d_{i, q-j+1} \Delta_j$

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, g_i$ est clairement "une forme linéaire sur $\mathbb{R}^q$ ".

de plus $\mathcal{C} = \{ \Delta \in \mathbb{R}^q \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, g_i(\Delta) = y_i \}$.

Nous sommes bien dans le cadre de "cherche d'optimum sous contrainte d'égalités linéaires".

Pour $\mathcal{B} = K_{g_1} \cap K_{g_2} \cap \dots \cap K_{g_p}$.

Rappelons que $\mathcal{B}^\perp = \text{Vect}(\nabla g_1(\Delta), \nabla g_2(\Delta), \dots, \nabla g_p(\Delta))$ où Δ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^q$.

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q) \in \mathbb{R}^q, g_i(\Delta) = \sum_{j=1}^q d_{i, q-j+1} \Delta_j$

Alors $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \Delta \in \mathbb{R}^q, \frac{\partial g_i}{\partial \Delta_j}(\Delta) = d_{i, q-j+1}$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall \Delta \in \mathbb{R}^q, \nabla g_i(\Delta) = (d_{i,q}, d_{i,q-1}, \dots, d_{i,1})$.

Soit $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q)$ un élément de $\mathbb{R}^q$. Pour $T = \begin{pmatrix} \Delta_q \\ \Delta_{q-1} \\ \vdots \\ \Delta_1 \end{pmatrix}$. Pour aussi $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{pmatrix}$. Alors

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, t_i = \Delta_{q-i+1}$. Notation à retenir ! Notons que dans l'ajout du type $T = c_\Delta$.

Δ est un point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si

$\Delta \in \mathcal{C}$ et $\nabla J(\Delta) \in \mathcal{B}^\perp$ (ou $\Delta \in \mathcal{C}$ et $\nabla J(\Delta) \in \text{Vect}(\nabla g_1(\Delta), \nabla g_2(\Delta), \dots, \nabla g_p(\Delta))$!)

Notons que $\forall \hat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots, \hat{\Delta}_q) \in \mathbb{R}^q, J(\hat{\Delta}) = \sum_{j=1}^q \hat{\Delta}_j^2$.

Donc $\forall \hat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \dots, \hat{\Delta}_q) \in \mathbb{R}^q, \nabla J(\hat{\Delta}) = (2\hat{\Delta}_1, 2\hat{\Delta}_2, \dots, 2\hat{\Delta}_q) = 2\hat{\Delta}$.

Alors Δ est un point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \in \mathcal{C} \\ \Delta \in \text{Vect}(\nabla g_1(\Delta), \nabla g_2(\Delta), \dots, \nabla g_p(\Delta)) \end{cases}$

(S)

notons (S) le système précédent.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \alpha_{q-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = K_q T \\ \text{et} \\ \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \varepsilon_D = \beta_1 \nabla g_1(D) + \beta_2 \nabla g_2(D) + \dots + \beta_p \nabla g_p(D). \end{cases}$$

Rappelons que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \nabla g_i(D) = (d_{i,q}, d_{i,q-1}, \dots, d_{i,1})$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que} \\ (\varepsilon_{D_1}, \varepsilon_{D_2}, \dots, \varepsilon_{D_q}) = \beta_1 (d_{1,q}, d_{1,q-1}, \dots, d_{1,1}) + \beta_2 (d_{2,q}, d_{2,q-1}, \dots, d_{2,1}) + \dots + \beta_p (d_{p,q}, d_{p,q-1}, \dots, d_{p,1}) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} Y = K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que} \\ \varepsilon_{D_1} = \beta_1 d_{1,q} + \beta_2 d_{2,q} + \dots + \beta_p d_{p,q} = \sum_{i=1}^p \beta_i d_{i,q} \\ \varepsilon_{D_2} = \beta_1 d_{1,q-1} + \beta_2 d_{2,q-1} + \dots + \beta_p d_{p,q-1} = \sum_{i=1}^p \beta_i d_{i,q-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{D_q} = \beta_1 d_{1,1} + \beta_2 d_{2,1} + \dots + \beta_p d_{p,1} = \sum_{i=1}^p \beta_i d_{i,1} \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow Y = K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \varepsilon_{D_{q-j+1}} = \varepsilon_{D_j} = \sum_{i=1}^p \beta_i d_{i,q-j+1}.$$

$$(S) \Leftrightarrow Y \in K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \varepsilon_{D_j} = \sum_{i=1}^p d_{i,j} \beta_i$$

à bien comprendre

$$(S) \Leftrightarrow Y \in K_q T \text{ et } \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \varepsilon T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}.$$

$$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \varepsilon T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = K_q \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \alpha_{q-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \varepsilon T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad \& \quad 2Y = K_q {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}.$$

Rappelons que le kpk indique que $K_q {}^t K_q$ est inversible. Alors :

$$(S) \Leftrightarrow \exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \varepsilon T = {}^t K_q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = (K_q {}^t K_q)^{-1} (2Y).$$

à noter

$$(S) \Leftrightarrow \varepsilon T = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} (2Y) \Leftrightarrow T = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y.$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \alpha_{q-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y \Leftrightarrow C_p = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y.$$

Ainsi J admet un point critique et un seul dans l'optimisation sous la contrainte $x_{n,q} = \gamma$.

Ce point critique est le point $\Delta^* = (\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_q^*)$ de $\mathbb{R}^q$ tel que $\begin{pmatrix} \Delta_1^* \\ \Delta_2^* \\ \vdots \\ \Delta_q^* \end{pmatrix} = ({}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1}) \gamma$

ou tel que $C_{\Delta^*} = ({}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1}) \gamma$.

b) Ici nous utiliserons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^q$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

$$\forall \Delta \in \mathbb{R}^q, J(\Delta) = \|\Delta\|^2.$$

Soit $\Delta \in \mathcal{B}$. Posons $\Delta = \Delta - \Delta^*$.

$$J(\Delta) - J(\Delta^*) = \|\Delta\|^2 = \|\Delta - \Delta^*\|^2 = \|\Delta^*\|^2 + 2\langle \Delta^*, \Delta - \Delta^* \rangle + \|\Delta - \Delta^*\|^2$$

$$J(\Delta) - J(\Delta^*) = \|\Delta - \Delta^*\|^2 + 2\langle \Delta^*, \Delta - \Delta^* \rangle. \quad \Delta \in \mathcal{B} \text{ et } \Delta^* \in \mathcal{B}^*$$

$$\forall i \in [1, q], g_i(\Delta) = g_i(\Delta - \Delta^*) = g_i(\Delta) - g_i(\Delta^*) \stackrel{\downarrow}{=} y_i - y_i^* = 0. \quad \forall i \in [1, p], \Delta \in \text{Ker } g_i.$$

Alors $\Delta \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } g_i$ donc $\Delta \in \mathcal{B}$.

Δ^* est le point critique de J dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{B}$.

Alors $\Delta^* = \nabla J(\Delta^*) \in \mathcal{B}^\perp$. Donc $\Delta^* \in \mathcal{B}^\perp$. Alors $\langle \Delta^*, \Delta - \Delta^* \rangle = 0$.

$$\text{Ainsi } J(\Delta) - J(\Delta^*) = \|\Delta - \Delta^*\|^2, \quad 2\langle \Delta^*, \Delta - \Delta^* \rangle = 0; \quad J(\Delta) \geq J(\Delta^*)$$

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}, J(\Delta) \geq J(\Delta^*).$$

Donc J admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{B}$ réalisé en Δ^* .

Donc Δ^* réalise le minimum global de J sous la contrainte $x_{n,q} = \gamma$.