C 529

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE

Code épreuve : **280**

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai 2011, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Pour tout couple (p, q) d'entiers de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels (resp. complexes) et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$) cet ensemble lorsque $q = p$.
On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Dans tout le problème :

- pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on identifie les espaces vectoriels $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que l'on identifie tout élément de $\mathbb{C}^p$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$;
- on note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $|z|$ le module d'un nombre complexe z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et on admet que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 si et seulement si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 ;
- pour toute matrice $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et on pose : $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ et $N(A) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{k,j}|$;
- le vecteur nul de $\mathbb{C}^p$ est noté 0. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on note $X < Y$ (resp. $X \leqslant Y$) si pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a : $x_k < y_k$ (resp. $x_k \leqslant y_k$). En particulier, si les coordonnées de X sont toutes positives (resp. strictement positives), on note $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) ;
- pour tout vecteur V de $\mathbb{C}^p$, on note $|V|$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont les modules de celles de V.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = (m_{k,j}(n))_{1\leqslant k,j\leqslant p}$.
On dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $M = (m_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, si pour tout couple (k, j) de $[\![1,p]\!]^2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{k,j}(n) = m_{k,j}$; on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M$.
On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers des matrices A et B, alors la suite $(A_n + B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $A + B$, la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice AB et, pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice αA.

Une matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si pour tout couple (k, j) de $[\![1, p]\!]^2$, on a : $a_{k,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{k,j} > 0$).

Le problème a pour objet l'étude des relations entre les valeurs propres de module maximal d'une matrice et la limite éventuelle de la suite des puissances entières de cette matrice. Ces relations, appliquées aux matrices positives et strictement positives, interviennent notamment dans la théorie des processus markoviens et dans les questions relatives à l'existence et la stabilité de l'équilibre général d'une économie.

Partie I. Deux exemples

1. *Exemple 1.* Soit A et J les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^2 et déterminer les valeurs propres de J.

b) Exprimer A en fonction de I_3 et J, et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$ et $\rho(A)$.

c) Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A^n en fonction de I_3, J et n. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $N(A^n)$.

d) Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice M que l'on explicitera et dont on précisera le rang. Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. *Exemple 2.* Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer $N(A)$ et $\rho(A)$.

b) Déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A.

c) Expliciter pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la matrice A^n. Comparer $\rho(A^n)$ et $(\rho(A))^n$.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $N(A^n) = 2^{\frac{n}{2}}(1 + |\sin(n\pi/4)|)$. Comparer $\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n}$ et $\rho(A)$.

Partie II. Un critère de convergence vers la matrice nulle

Dans cette partie , on note $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, λ une valeur propre **complexe** *de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$ un vecteur propre de A associé à λ.*

3. Soit k_0 un entier de $[\![1, p]\!]$ pour lequel on a : $0 < |x_{k_0}| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$.

Établir les encadrements suivants : $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}| \leqslant N(A)$ et $0 \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

4. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et μ une valeur propre de A^n telle que $|\mu| = \rho(A^n)$.

a) Montrer que λ^n est une valeur propre de A^n. En déduire l'inégalité : $\rho(A^n) \geqslant (\rho(A))^n$.

b) Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les n racines n-ièmes de μ. Établir l'égalité : $A^n - \mu I_p = \prod\limits_{j=0}^{n-1} (A - \alpha_j I_p)$.

c) Montrer qu'il existe un entier j_0 de $[\![0, n-1]\!]$ pour lequel α_{j_0} est une valeur propre de A.

d) En déduire l'égalité : $\rho(A^n) = (\rho(A))^n$. Établir l'encadrement : $0 \leqslant \rho(A) \leqslant (N(A^n))^{1/n}$.

5. On suppose que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} N(A^n) = 0$. En déduire que $\rho(A) < 1$.

6. Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On pose pour tout réel ε strictement positif : $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$.

a) Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $N(A_\varepsilon^n) \leqslant 1$.

c) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation : $N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$.

d) À l'aide des questions précédentes, établir pour tout $n \geqslant n_0$, l'encadrement : $0 \leqslant (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leqslant \varepsilon$.
En déduire que l'on a : $\lim_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$.

Dans la suite du problème, on admet que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$ et que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si on a $\rho(A) < 1$.

Partie III. Matrices positives – Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A

Dans cette partie, on considère une matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive et non nulle.

7. Soit $B = (b_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout couple (k,j) de $[\![1,p]\!]^2$: $b_{k,j} \leqslant a_{k,j}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $N(B^n) \leqslant N(A^n)$. En déduire l'inégalité : $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

8. On suppose dans cette question qu'il existe une constante s vérifiant pour tout k de $[\![1,p]\!]$: $\sum_{j=1}^{p} a_{k,j} = s$.

Établir l'égalité : $\rho(A) = s$.

9. On pose : $\sigma = \min_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}$. À l'aide des questions 7 et 8, établir l'encadrement : $\sigma \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

10. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $X > 0$ et soit Δ_X la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de X.
a) Après avoir justifié l'existence de l'inverse Δ_X^{-1} de Δ_X, calculer la matrice $\Delta_X^{-1} A \, \Delta_X$.

b) Établir l'encadrement : $\min_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$.

c) En déduire que s'il existe un réel positif β vérifiant $\beta X < AX$, il vérifie également $\beta < \rho(A)$.

Partie IV. Matrices strictement positives

Dans cette partie, la matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est strictement positive, λ est une valeur propre ***complexe*** *de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, et $X \in \mathbb{C}^p$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

11. a) Montrer que $\rho(A) > 0$.
b) Établir la relation : $|AX| \leqslant A|X|$. En déduire que l'on a : $\rho(A)|X| \leqslant A|X|$.
c) On pose : $Z = A|X|$. Montrer que $Z > 0$.
d) On pose : $Y = A|X| - \rho(A)|X|$ et on suppose $Y \neq 0$. Établir les relations : $AY > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$.
e) En déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que $|X|$ est un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$.

12. On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls et vérifiant $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
On pose : $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$.
a) Montrer que $\theta_1 = \theta_2$.
b) On considère p nombres complexes $(p \geqslant 2)$ $z_1, z_2, \ldots, z_p$ tous non nuls et vérifiant $\left| \sum_{j=1}^{p} z_j \right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$.

Établir l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ vérifiant pour tout j de $[\![1,p]\!]$: $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

13. Montrer que $|X| > 0$ et que $|AX| = A|X|$. En déduire l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ tel que $X = |X|e^{i\theta}$.

14. a) Montrer que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

b) On suppose qu'il existe deux vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ de la matrice A associés à la valeur propre $\rho(A)$, linéairement indépendants.
En considérant le vecteur $u_1 V - v_1 U$, aboutir à une contradiction. En déduire la dimension du sous-espace propre associé à $\rho(A)$.

15. a) Montrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

b) Soit Z un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A)$. Justifier que les coordonnées de Z sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

c) Soit U un vecteur propre de A vérifiant $U > 0$, associé à la valeur propre $\rho(A)$. On pose : $Y = \dfrac{1}{{}^tZU}Z$.
Établir les relations suivantes : $Y > 0, {}^tAY = \rho(A)Y$ et ${}^tYU = 1$.

16. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $M = U{}^tY$, où U a été défini dans la question 15.c).
a) Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^p$ dont on précisera l'image et le noyau.

b) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation : $\left(\dfrac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$.

17. Soit μ une valeur propre non nulle de $(A - \rho(A)M)$ et W un vecteur propre de $(A - \rho(A)M)$ associé à μ.
a) Montrer que $MW = 0$. En déduire que μ est également une valeur propre de A et que $|\mu| \leqslant \rho(A)$.

b) En raisonnant par l'absurde et en utilisant la question 14.a), montrer que $|\mu| < \rho(A)$.

c) Déduire des résultats précédents que $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M$.

Partie V. Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique. On note $|| \; ||$ la norme euclidienne associée.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive, symétrique, admettant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p|$. Soit V_0 un vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $V_0 > 0$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de A tels que pour tout k de $[\![1,p]\!]$, $Ae_k = \lambda_k e_k$.

On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ converge vers un vecteur L de $\mathbb{R}^p$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||X_n - L|| = 0$, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.
On définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ par : V_0, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

18. a) Soit $V_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} s_k e_k$, la décomposition de V_0 dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Montrer que $s_1 \neq 0$.

b) Établir la relation : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||V_{n+1}||}{||V_n||} = \lambda_1$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{||V_n||}$ (on distinguera deux cas suivant le signe de s_1).

19. On suppose déjà définis en Pascal les objets suivants :

```
Const p = ...
Type vecteur=array[1..p] of real ;
     matrice=array[1..p,1..p] of real ;
```

ainsi que les fonctions et procédures suivantes :
`Function norme(V : vecteur) : real` ; (calcul de la norme du vecteur V)
`Procedure prodmat(A : matrice ; V : vecteur ; var W : vecteur)` ; ($W = AV$)
`Procedure affecte(V : vecteur ; var W : vecteur)` ; (W prend la valeur V)

a) Écrire une procédure d'en-tête `puissance(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur ; var V : vecteur)` qui calcule pour tout entier naturel n non nul, le vecteur V_n défini ci-dessus.

b) Écrire une procédure d'en-tête `vectpropre(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur ; var V : vecteur)` qui calcule la valeur approchée d'un vecteur propre associé à λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée, et une fonction d'en-tête `valpropre(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur) : real` qui calcule la valeur approchée de λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée.
On expliquera les différentes étapes des procédures proposées.