

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$.

(Q1) a) h est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation

$$y = h'(1)(x-1) + h(1) \text{ ou avec } y = x-1. \text{ Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) \leq x-1.$$

Soit $u \in [0, 1[$. $1-u \in \mathbb{R}_+^*$ donc $h(1-u) \leq (1-u)-1 = -u$.

Finalement : $\forall u \in [0, 1[, h(1-u) \leq -u$.

Soit $\epsilon \in [0, n] \subseteq \mathbb{R}$. $\frac{\epsilon}{n} \in [0, 1[$ donc $h(1 - \frac{\epsilon}{n}) \leq -\frac{\epsilon}{n}$.

Alors $h(1 - \frac{\epsilon}{n})^n \leq n h(1 - \frac{\epsilon}{n}) \leq -\epsilon$. Par croissance de exp on obtient : $(1 - \frac{\epsilon}{n})^n \leq e^{-\epsilon}$.

Noter que ceci vaut avec pour $\epsilon = n$ ($0 \leq e^{-n}$!).

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \epsilon \in [0, n], (1 - \frac{\epsilon}{n})^n \leq e^{-\epsilon}$.

b) $\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[$, $1 - \frac{\epsilon^2}{n} > 0$ et $1 - \frac{\epsilon}{n} > 0$.

• h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• $\epsilon \mapsto 1 - \frac{\epsilon^2}{n}$ et $\epsilon \mapsto 1 - \frac{\epsilon}{n}$ sont dérivables sur $[0, \sqrt{n}[$.

Alors $\epsilon \mapsto h(1 - \frac{\epsilon^2}{n})$ et $\epsilon \mapsto h(1 - \frac{\epsilon}{n})$ sont dérivables sur $[0, \sqrt{n}[$.

ψ est donc dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$ comme combinaison linéaire de trois fonctions dérivables sur $[0, \sqrt{n}[$

$$\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[, \psi'(\epsilon) = \frac{-2\epsilon/n}{1 - \frac{\epsilon^2}{n}} - 1 - n \frac{-1/n}{1 - \frac{\epsilon}{n}} = -\frac{2\epsilon}{n - \epsilon^2} - 1 + \frac{n}{n - \epsilon} = \frac{1}{(n - \epsilon^2)(n - \epsilon)} [-2\epsilon(n - \epsilon) - (n - \epsilon^2)(n - \epsilon) + n(n - \epsilon^2)]$$

$$\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[, \psi'(\epsilon) = \frac{1}{(n - \epsilon^2)(n - \epsilon)} [-2n\epsilon + 2\epsilon^2 - n^2 + n\epsilon + n\epsilon^2 - \epsilon^3 + n^2 - n\epsilon] = \frac{-\epsilon^3 + 2\epsilon^2 - n\epsilon}{(n - \epsilon^2)(n - \epsilon)}$$

$$\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[, \psi'(\epsilon) = \frac{-\epsilon(\epsilon^2 - 2\epsilon + n)}{(n - \epsilon^2)(n - \epsilon)} = \frac{-\epsilon((\epsilon - 1)^2 + n - 1)}{(n - \epsilon^2)(n - \epsilon)}$$

Or $\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[$, $\epsilon \geq 0$, $(\epsilon - 1)^2 + n - 1 \geq 0$, $n - \epsilon^2 > 0$ et $n - \epsilon > 0$. Alors $\forall \epsilon \in [0, \sqrt{n}[$, $\psi'(\epsilon) \leq 0$.

peut alors décrire par $[0, \sqrt{n}]$.

Ainsi $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $\varphi(t) \leq \varphi(0) = 0$. $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $h(1 - \frac{t^2}{n}) - t - n h(1 - \frac{t}{n}) \leq 0$.

$\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $h(1 - \frac{t^2}{n}) - t \leq h(1 - \frac{t}{n})^n$. Par croissance de exp on obtient :

$$e^{h(1 - \frac{t^2}{n}) - t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n \text{ pour tout } t \text{ dans } [0, \sqrt{n}].$$

Alors $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $e^{h(1 - \frac{t^2}{n})} e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n$ ou $(1 - \frac{t^2}{n}) e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n$.

Choisissons alors que cette dernière inégalité vaut aussi pour $t = \sqrt{n}$ ($0 \leq (1 - \frac{\sqrt{n}}{n})^n$!)

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $(1 - \frac{t^2}{n}) e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n$.

c) Choisissons que $\forall t \in]\sqrt{n}, n]$, $(1 - \frac{t^2}{n}) e^{-t} \leq 0 \leq (1 - \frac{t}{n})^n$.

Alors $\forall t \in [0, n]$, $(1 - \frac{t^2}{n}) e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n$ ou $e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n$.

Rappelons que $\forall t \in [0, n]$, $(1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ d'après a)

Pour conclure : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, n]$, $e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$.

Soit $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in]0, n]$, $t^{\kappa-1} e^{-t} - \frac{1}{n} t^{\kappa+1} e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n t^{\kappa-1} \leq t^{\kappa-1} e^{-t}$. (*)

$\Gamma(\kappa)$ et $\Gamma(\kappa+1)$ existent donc nécessairement

1° $\int_0^n t^{\kappa-1} e^{-t} dt$ et $\int_0^n t^{\kappa+1} e^{-t} dt$ existent.

2° $\Gamma(\kappa) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{\kappa-1} e^{-t} dt$ & $\Gamma(\kappa+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{\kappa+1} e^{-t} dt$

Choisissons que $\forall t \in]0, n]$, $0 \leq (1 - \frac{t}{n})^n t^{\kappa-1} \leq t^{\kappa-1} e^{-t}$. Comme $\int_0^n t^{\kappa-1} e^{-t} dt$ converge il en est de même de $\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{\kappa-1} dt$.

vous pouvez alors "intégrer (*)" et il vient alors

$$\int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt - \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$$\text{En } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt \right) = 0 \times \Gamma(x+2) = 0.$$

$$\text{Alors par encadrement on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

(Q2) $\forall y \in]0, 1[, y^{x-1} = \frac{1}{y^{1-x}}$ et $1-x < 1$ donc $\int_0^1 y^{x-1} dy$ converge

d'après le cours.

- $y \mapsto y^{x-1} (1-y)^n$ est continue et positive sur $]0, 1[$
- $y^{x-1} (1-y)^n \leq y^{x-1}$
- $\int_0^1 y^{x-1} dy$ converge.

des règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonction positives donnent alors la convergence de $\int_0^1 y^{x-1} (1-y)^n dy$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 y^{x-1} dy \text{ et } \int_0^1 y^{x-1} (1-y)^n dy \text{ convergent.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha \in]1, +\infty[$.

Soit ε dans $]0, 1[$. Une intégration par parties nous donne :

$$\int_\varepsilon^1 y^{x-1} (1-y)^n dy = \left[y^{x-1} \left(-\frac{1}{n+1}\right) (1-y)^{n+1} \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (x-1) y^{x-2} \left(-\frac{1}{n+1}\right) (1-y)^{n+1} dy$$

car $y \mapsto y^{x-1}$ et $y \mapsto -\frac{1}{n+1} (1-y)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$.

$$\text{Alors } \int_\varepsilon^1 y^{x-1} (1-y)^n dy = \frac{1}{n+1} \varepsilon^{x-1} (1-\varepsilon)^{n+1} + \frac{x-1}{n+1} \int_\varepsilon^1 y^{x-2} (1-y)^{n+1} dy.$$

Noter que $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ et que $\int_0^1 y^{x-2}(1-y)^{n+1} dy$ converge car $x \in]1, +\infty[$.

Noter également que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{n+1} \varepsilon^{x-1} (1-\varepsilon)^{n+1} \right) = 0 \quad (x > 1)$.

En passant à la limite dans (**) il vient $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy = \frac{x-1}{n+1} \int_0^1 y^{x-2}(1-y)^{n+1} dy$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, B_n(x) = \frac{x-1}{n+1} B_{n+1}(x-1)$.

ce que nous pouvons écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[, B_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} B_n(x+1)$

Noter que ceci vaut aussi pour $n=0 \dots$

Notons alors particulièrement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_1(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y) dy = \int_0^1 y^{x-1} dy - \int_0^1 y^x dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{y^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_{\varepsilon}^1$$

les deux intégrales convergent

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1!}{\prod_{k=0}^1 (x+k)} \text{ la propriété est vraie pour } n=1.$$

• Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}. \text{ Soit } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$B_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} B_n(x+1) = \frac{n+1}{x} \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+1+k)} = \frac{(n+1)!}{x \prod_{k=1}^{n+1} (x+k)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (x+k)}.$$

Ainsi la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

Remarque.. Ceci vaut pour $n=0$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1} dy = \frac{1}{x}$.

doit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2)$
 $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots x \Gamma(x)$ (idem même principe !)

Alors $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$; $\frac{\Gamma(x)n!}{\Gamma(x+n)} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} = B_n(x).$

Or $n! = \Gamma(n+1)$ donc $B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$

$B_0(x) = \frac{1}{x} = \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) \Gamma(0+1)}{\Gamma(x+0+1)}$ car $\Gamma(0+1) = 1.$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$

c) doit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in]0, n], \int_{\frac{t}{n}}^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_{\frac{t}{n}}^1 (1-y)^n (ny)^{x-1} n dy = \int_{\frac{t}{n}}^1 (1-y)^n n^x y^{x-1} dy.$

En faisant la dérivée on voit $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B_n(x)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^x B_n(x)) = \Gamma(x).$

On a car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \right) = \Gamma(x).$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$

doit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots x \Gamma(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)\right) \Gamma(x)$

$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$ et $\Gamma(x) \neq 0$ donc $\Gamma(x) \sim \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$.

Alors $\Gamma(x+n) \sim \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)\right) \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} = \frac{n^x n!}{x+n} \sim \frac{n^x n!}{n} = n^x (n-1)!$

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(\kappa+n) \sim_{n \rightarrow +\infty} n^\kappa (n-1)!$$

d) Pour montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} \lambda_n) = \sqrt{2}$.

Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\sqrt{2p} \lambda_{2p}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sqrt{2p+1} \lambda_{2p+1}) = \sqrt{2}$.

$$\lambda_{2p} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} = \frac{(p-1)!}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \sim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(p-1)!}{p^{1/2} (p-1)!} = \frac{1}{p^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p}}.$$

Alors $\sqrt{2p} \lambda_{2p} \sim \sqrt{2}$ d'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\sqrt{2p} \lambda_{2p}) = \sqrt{2}$.

$$\lambda_{2p+1} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{p!} \sim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^{1/2} (p-1)!}{p!} = \frac{p^{1/2}}{p} = \frac{1}{p^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p+1}}.$$

Alors $\sqrt{2p+1} \lambda_{2p+1} \sim \sqrt{2}$ d'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\sqrt{2p+1} \lambda_{2p+1}) = \sqrt{2}$.

Ceci achève de montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Partie II, Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

Q1) a) doit $\kappa \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$.

$\rightarrow t \mapsto |t^{\kappa-1}(\ln t)^k e^{-t}|$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\rightarrow |t^{\kappa-1}(\ln t)^k e^{-t}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ à } +\infty$ (raisonne comparée).

$\rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

$$(*) \quad 1 - \frac{\kappa}{2} = \frac{1-\kappa+1}{2} \dots$$

$\rightarrow |t^{\kappa-1}(\ln t)^k e^{-t}| = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{\kappa}{2}}}\right) \text{ à } 0$ car

$\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^{1-\frac{\kappa}{2}} |t^{\kappa-1}(\ln t)^k e^{-t}| \right) = \lim_{t \rightarrow 0} |t^{\kappa/2}(\ln t)^k e^{-t}| = 0$ par croissance comparée ($\kappa > 0$).

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}} \text{ converge car } 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$$

Les points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^1 t^{\alpha-1} (h(t))^b e^{-t} dt$ et de $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} (h(t))^b e^{-t} dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (h(t))^b e^{-t} dt$ converge.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (h(t))^b e^{-t} dt$ est absolument convergente.

b) et c) Dans une première étape, nous les hypothèses proposées nous allons établir

que $\int_0^{+\infty} (h(t))^2 \left(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt$ est convergente.

Soit $t \in]0, +\infty[$. Posons $\forall \alpha \in [a,b]$, $u(\alpha) = t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1) \ln t}$.

u est continue sur $[a,b]$. Donc $\sup_{\alpha \in [a,b]} u(\alpha)$ existe.

$\alpha \mapsto (\alpha-1) \ln t$ est croissante sur $[a,b]$ si $\ln t \geq 0$ et décroissante si $\ln t \leq 0$.

Ainsi u est croissante sur $[a,b]$ si $t \geq 1$ et décroissante si $t \leq 1$.

Par conséquent $\sup_{\alpha \in [a,b]} u(\alpha) = \begin{cases} u(b) & \text{si } t \geq 1 \\ u(a) & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$.

$$\text{Donc } \sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1} = \sup_{\alpha \in [a,b]} u(\alpha) = \begin{cases} t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in]0, 1], (h(t))^2 \left(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} = (h(t))^2 t^{a-1} e^{-t} \quad \text{et}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[, (h(t))^2 \left(\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} = (h(t))^2 t^{b-1} e^{-t}.$$

$$\text{A } \int_0^{+\infty} (h(t))^2 t^{a-1} e^{-t} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} (h(t))^2 t^{b-1} e^{-t} dt \text{ convergent car } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*.$$

En particulier $\int_0^1 (h(t))^2 t^{a-1} e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} (h(t))^2 t^{b-1} e^{-t} dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^1 (t+1)^2 (\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t} dt$ converge et vaut $\int_0^1 (t+1)^2 t^{a-1} e^{-t} dt$, et
 $\int_1^{+\infty} (t+1)^2 (\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t} dt$ converge et vaut $\int_1^{+\infty} (t+1)^2 t^{b-1} e^{-t} dt$.

Finalement 1° $\int_0^{+\infty} (t+1)^2 (\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t} dt$ converge.

obtiens que $\square$ a.c.c. !

$$2^\circ \int_0^{+\infty} (t+1)^2 (\sup_{\alpha \in [a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t} dt \boxed{=} \int_0^1 (t+1)^2 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} (t+1)^2 t^{b-1} e^{-t} dt.$$

Exprimer t dans $]0, +\infty[$ et repasser $\forall z \in [a, b]$, $u(z) = t^{3-1} = e^{(3-1) \ln t}$.

u est de classe C^2 sur $[a, b]$, $\forall z \in [a, b]$, $u'(z) = (t+1) e^{(3-1) \ln t} = (t+1) t^{3-1}$ et

$\forall z \in [a, b]$, $u''(z) = (t+1)^2 e^{(3-1) \ln t} = (t+1)^2 t^{3-1}$. Notamment que :

$$f(x) - f(x_0) - (x-x_0) g_1(x_0) = \int_0^{+\infty} [t^{x-1} e^{x_0-1} - (x-x_0)(t+1) t^{x_0-1}] e^{-t} dt.$$

$$f(x) - f(x_0) - (x-x_0) g_1(x_0) = \int_0^{+\infty} (u(x) - u(x_0) - (x-x_0) u'(x_0)) e^{-t} dt \quad (\dots \text{ n'oublie pas que } u \text{ dépend de } t).$$

u est en C^2 sur $[a, b]$ et x, x_0 étant dans l'intérieur de $[a, b]$ l'égalité de

Taylor-Lagrange s'écrit donc : $|u(x) - u(x_0) - (x-x_0) u'(x_0)| \leq \frac{|x-x_0|^2}{2} \max_{\alpha \in [x_0, x]} |u''(\alpha)|$

$$\text{Or } \max_{\alpha \in [x_0, x]} |u''(\alpha)| \leq \max_{\alpha \in [a, b]} |u''(\alpha)| = \max_{\alpha \in [a, b]} |(t+1)^2 t^{\alpha-1}| = (t+1)^2 \max_{\alpha \in [a, b]} |t^{\alpha-1}| = (t+1)^2 \max_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1}.$$

$$\text{Ainsi } |u(x) - u(x_0) - (x-x_0) u'(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} (t+1)^2 \max_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} = \frac{(x-x_0)^2}{2} (t+1)^2 \sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1}.$$

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $A \leq B$.

$$|\int_A^B [t^{x-1} e^{x_0-1} - (x-x_0)(t+1) t^{x_0-1}] e^{-t} dt| \leq \int_A^B |t^{x-1} e^{x_0-1} - (x-x_0)(t+1) t^{x_0-1}| e^{-t} dt$$

$$|\int_A^B [t^{x-1} e^{x_0-1} - (x-x_0)(t+1) t^{x_0-1}] e^{-t} dt| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_A^B (t+1)^2 \sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

En faisant tendre A vers 0+ et B vers $+\infty$ il vient :

$$\left| \int_0^{+\infty} [t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t) t^{x_0-1}] e^{-t} dt \right| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \sup_{\kappa \in [a, b]} t^{\kappa-1} e^{-t} dt \quad \text{car}$$

les deux intégrales convergent.

$$\text{Ainsi} \quad |F(x) - F(x_0) - (x-x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \sup_{\kappa \in [a, b]} t^{\kappa-1} e^{-t} dt$$

Comme x et x_0 sont distincts il vient à diviser par $|x-x_0|$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - g_1(x_0) \right| \leq \frac{|x-x_0|}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \sup_{\kappa \in [a, b]} t^{\kappa-1} e^{-t} dt.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x-x_0|}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \sup_{\kappa \in [a, b]} t^{\kappa-1} e^{-t} dt = 0 \quad \text{d'ac par accablement à 0 d'ici}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - g_1(x_0) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = g_1(x_0).$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = g_1(x_0)$.

d) Nous venons de montrer que si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}^*_+$ et si $x_0 \in]a, b[$ alors

F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = g_1(x_0)$. Notons que F est dérivable à tout point de $\mathbb{R}^*_+$ et que $F' = g_1$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*_+$. Prenons $a = \frac{x_0}{2}$ et $b = \frac{3x_0}{2}$. $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}^*_+$ et

$x_0 \in]a, b[$ d'ac F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = g_1(x_0)$.

Finalement F est dérivable à tout point de $\mathbb{R}^*_+$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*_+, F'(x_0) = g_1(x_0)$.

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*_+, F'(x_0) = g_1(x_0)$.

Q2) a) doit $n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}$. soit $k \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}$.

$\hookrightarrow k$ et $k+1$ de dans G^1 sur $[k, k+1]$. la Relation des accroissements finis

montre que : $\exists c_k \in]k, k+1[$, $\frac{k(k+1) - k^2}{(k+1) - k} = h' c_k = \frac{1}{c_k}$.

$$\frac{1}{c_k} \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[\text{ donc } \frac{k(k+1) - k^2}{(k+1) - k} \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[.$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{k+1} < \frac{k(k+1) - k^2}{(k+1) - k} = k(k+1) - k^2 < \frac{1}{k}.$$

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} < k(k+1) - k^2 < \frac{1}{k}.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} (k(k+1) - k^2) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < a_n - a_1 = h_n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < h_n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} > -h_n > -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} > \sigma_n > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, 1 > \sigma_n > \frac{1}{n}; \quad \forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, 1 > \sigma_n > 0.$$

Noter que $\sigma_3 = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}_2, +\infty \mathbb{C}, 1 \geq \sigma_n > 0$.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \sigma_n \leq 1.}}$$

$$\text{b) doit } n \in \mathbb{N}^*. \quad \sigma_{n+1} - \sigma_n = -k(n+1) + \frac{1}{n+1} + h_n n = \frac{1}{n+1} + k\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + k\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$\text{d'après I 1. a) } k\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1} \text{ car } \frac{1}{n+1} \in [0, 1[$$

$$\text{donc } \sigma_{n+1} - \sigma_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta_{n+1} - \delta_n \leq 0$. $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Remarque... $\delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$ est la constante d'Euler.

Q3) a) soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \prod_{k=1}^n \frac{k+x}{k} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{n!} e^{-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

$$\text{Or } e^{-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = e^{-x(\delta_n + h_n)} = e^{-x\delta_n} e^{-xh_n} = \frac{e^{-x\delta_n}}{n^x}.$$

$$\text{Ainsi } \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \frac{\left(\prod_{k=1}^n (k+x)\right) e^{-x\delta_n}}{n! n^x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = e^{-x\delta_n} \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{n^x n!} = e^{-x\delta_n} \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}.$$

b) soit $x \in \mathbb{R}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_n(x) = e^{-x\delta_n} \frac{1}{x} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n^x n!}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma(x) \neq 0 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x\delta_n} = e^{-x\delta}. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = \frac{e^{-x\delta}}{x \Gamma(x)}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\Gamma(x) = \frac{e^{-x\delta}}{x \Gamma(x)}$.

Q4) a) soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 \neq 0.$$

$$\text{Ainsi } \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2} \frac{1}{n^2}.$$

- $\frac{x}{n} - h\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim \frac{x^2}{2} \frac{1}{n^2}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x^2}{2} \frac{1}{n^2} \geq 0$;
- la série de terme général $\frac{x^2}{2} \frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{x}{n} - h\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ converge et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{x}{k}\right] e^{-\frac{x}{k}} > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln v_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] = \sum_{k=1}^n \left(h\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, - \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) = \ln v_n(x).$$

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \ell(x) = \frac{e^{-\sigma x}}{x \Gamma(x)} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n(x) = \ln \ell(x)$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[- \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) \right] = \ln \ell(x)$; $-\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) = \ln \ell(x).$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) = \ln \ell(x).$

Remarque... Nous retrouvons ainsi la convergence de la série de terme général $\frac{x}{n} - h\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) = \ln \ell(x) = \ln \frac{e^{-\sigma x}}{x \Gamma(x)} = -\sigma x - \ln x - \ln \Gamma(x).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln \Gamma(x) = -\sigma x - \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - h\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right).$

Ⓢ) Noter que Γ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto h(\Gamma(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(\Gamma(x+1)) = h(x \Gamma(x)) = \ln x + h(\Gamma(x)).$$
 En dérivant il

on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 \times \psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x).$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

Nous avons vu que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive.

En étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \psi(x) = x \psi(x+1) - 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x+1) = \psi(1)$ car ψ est continue en 1.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \psi(x)) = -1 \neq 0$; $x \psi(x) \underset{0^+}{\sim} -1$; $\psi(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n-1} (\psi(k+1) - \psi(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ d'où $\psi(n) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Pour conclure $\forall n \in \mathbb{N}, \psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Q6 a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) = -\ln(\Gamma(x)) - \gamma x - \ln x$.

Nous avons vu plus haut que $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme il en est de même pour $\ln$ et $x \mapsto \gamma x$ on peut dire que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, A'(x) = -\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \frac{1}{x} \right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, A''(x) = -\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} + \frac{1}{x^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

b) $\forall x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 + \frac{x}{n} > 0$ et $\ln$ est de

classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors U_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, U'_n(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}, \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x}{n^2} \geq 0$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |U'_n(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$

• La série de terme général $\frac{x}{n^2}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $|U'_n(x)|$ converge.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $U'_n(x)$ est absolument convergente (d'ac convergente).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, U'_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, U''_n(x) = -(n+x)^{-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, U'''_n(x) = 2(n+x)^{-3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, U^{(4)}_n(x) = -2(n+x)^{-4}$.

Une dernière simple manipulation que : $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, U_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(n+x)^k}$.

doit $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n^{(k)}(x)| \geq 0$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |U_n^{(k)}(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (k-1)! \frac{1}{n^k}$.

• la série de terme général $(k-1)! \frac{1}{n^k}$ converge car $k \geq 2$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $|U_n^{(k)}(x)|$ converge.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente (d'ac convergente).

Finalement pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme

général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

$$(Q7) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(P(x)) = -\sigma x - h x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - h \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] = -\sigma x - h x + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

$$\text{En dérivant on obtient } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi(x) = -\sigma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi(x) = -\sigma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right) = -\sigma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

$$\text{Ainsi } \psi(1) = -\sigma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) = 1.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\psi(1) = -\sigma}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \in \mathbb{E}, \psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = -\sigma + \left(\sigma_n + h n - \frac{1}{n} \right).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty \in \mathbb{E}, \psi(n) = h n = \sigma_n - \sigma - \frac{1}{n}.$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(n) - h n) = 0.}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} (h n - \psi(n)) = 0.}}$$

$$(Q8) \quad \underline{a)} \rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, g(t) = \frac{1}{(t+x)^2} > 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Dans cette question } x \text{ est un} \\ \text{élément de } \mathbb{R}_+^*. \end{array} \right.$$

$\rightarrow t \mapsto (t+x)^2$ est ^{strictement} croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\rightarrow g$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$;

$$\bullet g(t) = \frac{1}{(t+x)^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2};$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge.}$$

des règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives
donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$.

G est positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\int_1^{+\infty} G(t) dt$ converge.

b) $\forall t \in [1, +\infty[$, $G(t) > 0$ donc $\int_1^{+\infty} G(t) dt > 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons H une primitive de G sur $\mathbb{R}_+^*$ (G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$...). H est décroissante sur $[k, k+1]$.

La relation des accroissements finis donne :

$$\exists d_k \in]k, k+1[, \frac{H(k+1) - H(k)}{(k+1) - k} = H'(d_k) = -G(d_k).$$

$$\text{Ainsi } \int_k^{k+1} G(t) dt = H(k) - H(k+1) = \frac{H(k) - H(k+1)}{(k+1) - k} = G(d_k) < G(k)$$

$\left\{ \begin{array}{l} G \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ d_k \in]k, k+1[\end{array} \right.$

Donc pour $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} G(t) dt < G(k)$.

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} G(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} G(t) dt < \sum_{k=1}^n G(k) \quad (*)$$

G est continue, positive et (strictement) décroissante sur $[1, +\infty[$ donc la suite de terme général $G(n)$ a la même nature que $\int_1^{+\infty} G(t) dt$; elle est donc convergente. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*) il vient :

$$\int_1^{+\infty} G(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} G(k). \text{ Trop juste !!}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (G(k) - \int_k^{k+1} G(t) dt) \geq G(1) - \int_1^2 G(t) dt > 0.$$

$\uparrow$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, G(k) - \int_k^{k+1} G(t) dt > 0$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^{+\infty} G(k) - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t) dt > 0.$$

$$\text{Alors } \sum_{k=1}^{+\infty} G(k) > \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t) dt = \int_1^{+\infty} G(t) dt. \quad \underline{\underline{0 < \int_1^{+\infty} G(t) dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).}}$$

Notons que : $\int_1^{+\infty} G(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t+x} \right]_1^A = \frac{1}{x+1}.$

De plus $\sum_{k=1}^{+\infty} G(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = - \sum_{k=1}^{+\infty} U_n''(x) = -A''(x).$

Pour conclure $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -A''(x) > \frac{1}{x+1}.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$ la $F(x) = -\delta x - \ln x - \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = -\delta x - \ln x - A(x)$

En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = -\delta - \frac{1}{x} - A'(x).$ En dérivant une seconde fois

on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} - A''(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) - \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2(x+1)} [x+1+x^2-x(x+1)] = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) > \frac{1}{x}.$

Partie III Estimation des paramètres d'une loi $P(\theta, r).$

Q1 $\rightarrow$ Supposons que L admette un maximum π sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$\exists (\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall (\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, L(\theta, r) \leq L(\theta^*, r^*).$

Or $\forall (\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, F(\theta, r) = \mathbb{E} L(\theta, r) \leq \mathbb{E} L(\theta^*, r^*) = F(\theta^*, r^*)$

Ainsi F admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un maximum qui vaut π et qui est atteint à (θ^*, r^*)

$\rightarrow$ Supposons que F admette un maximum C sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

$\exists (\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall (\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, F(\theta, r) \leq F(\theta^*, r^*)$

Or $\forall (\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, L(\theta, r) = e^{F(\theta, r)} \leq e^{F(\theta^*, r^*)} = L(\theta^*, r^*)$

Ainsi L admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un maximum qui vaut e^C et qui est atteint à (θ^*, r^*) .

Dac la recherche du maximum L sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur cet ensemble.

$$\textcircled{Q2} \text{ si } v(\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^n)^2, F(\theta, r) = \sum_{i=1}^p h_i f(x_i) = \sum_{i=1}^p h_i \left(\frac{1}{r(r+\theta)} x_i^{r-1} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \right)$$

$$v(\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^n)^2, F(\theta, r) = -p \ln r(r) - p r \ln \theta + (r-1) \sum_{i=1}^p h_i x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^p x_i.$$

$(r, \theta) \mapsto (r-1) \sum_{i=1}^p h_i x_i$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ comme fonction polynôme.

$(r, \theta) \mapsto -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^p x_i$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ comme fonction rationnelle.

$(r, \theta) \mapsto \theta$ est de classe C^1 et strictement positive sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ et h_i est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^n$; ainsi $(r, \theta) \mapsto h_i \theta$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$.

De plus $(r, \theta) \mapsto pr$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ comme fonction polynôme.

Par produit $(r, \theta) \mapsto -pr \ln \theta$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$.

Dac $(r, \theta) \mapsto -pr \ln \theta + (r-1) \sum_{i=1}^p h_i x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^p x_i$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$.

dac possède des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 à tout point de $(\mathbb{R}_+^n)^2$. $\textcircled{Q}$

noter que'il a est de même pour $(r, \theta) \mapsto -p \ln r(r)$; il suffit de

prover que'il a est ainsi pour $(r, \theta) \mapsto h_i r(r)$

$(r, \theta) \mapsto r$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^n)^2$ dac admet des dérivées partielles d'ordre

1 et 2 à tout point de $(\mathbb{R}_+^n)^2$. Comme $x \mapsto h_i f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^n$,

par composition $(r, \theta) \mapsto h_i r(r)$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2

à tout point de $(\mathbb{R}_+^n)^2$; même chose pour $(r, \theta) \mapsto -p \ln r(r)$ $\textcircled{Q}\textcircled{Q}$

$\textcircled{Q}$ et $\textcircled{Q}\textcircled{Q}$ permettant de dire que F admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2

à tout point de $(\mathbb{R}_+^n)^2$.

Δ il était préférable d'admettre également que r^n est continue sur $\mathbb{R}_+^n$... cela sera utile pour la suite.

$$\forall (r, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial F}{\partial r}(\theta, r) = -p \frac{r'(r)}{r(r)} - p R \theta + \sum_{i=1}^p h_i x_i.$$

$$\forall (r, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, r) = -p r \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^p x_i.$$

$$\forall (r, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta, r) = -p \frac{r''(r)r(r) - (r'(r))^2}{(r(r))^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta, r) = p r \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^p x_i \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}(\theta, r) = -\frac{p}{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(\theta, r).$$

b) doit $(\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\theta^*, r^*) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*, r^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -p \frac{r'(r^*)}{r(r^*)} - p R \theta^* + \sum_{i=1}^p h_i x_i = 0 & (a) \\ -p r^* \frac{1}{\theta^{*2}} + \frac{1}{\theta^{*2}} \sum_{i=1}^p x_i = 0 & (b) \end{cases}$$

$\theta^* \neq 0$

$$(b) \Leftrightarrow -p r^* \theta^{*2} + \sum_{i=1}^p x_i = 0 \Leftrightarrow r^* \theta^{*2} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i = \bar{x} \Leftrightarrow \theta^* = \frac{\bar{x}}{r^*}.$$

$$(a) \text{ et } (b) \Leftrightarrow \begin{cases} r^* \theta^* = \bar{x} \\ -p \frac{r'(r^*)}{r(r^*)} - p h \frac{\bar{x}}{r^*} + \sum_{i=1}^p h_i x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^* \theta^* = \bar{x} \\ h r^* - \frac{r'(r^*)}{r(r^*)} = h \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p h_i x_i \end{cases}$$

$$\text{r à l'ouest} \quad \frac{\partial F}{\partial r}(\theta^*, r^*) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*, r^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h r^* - \frac{r'(r^*)}{r(r^*)} = h \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p h_i x_i \\ \theta^* r^* = \bar{x} \end{cases}$$

doit $(\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, (θ^*, r^*) est un point critique de F et nous avons

$$(\theta^*, r^*) \text{ satisfait : } (1) \quad \begin{cases} \theta^* r^* = \bar{x} \\ h r^* - \frac{r'(r^*)}{r(r^*)} = h \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p h_i x_i \end{cases} \quad (2)$$

(Q3) a) $\varphi: x \mapsto \ln x - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

$$\varphi(1) = 0, \forall x \in]0, 1[, \varphi'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, \varphi'(x) < 0.$$

φ étant continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ on peut de dire que φ est strictement croissante sur $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

$$\text{Alors } \forall x \in]0, 1[, \varphi(x) < \varphi(1) = 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, \varphi(x) < \varphi(1) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \varphi(x) = \ln x - x + 1 < 0.$$

$$\text{Donc } \underline{\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ln x < x - 1.}$$

$$K_p = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i = \frac{1}{p} \left(p \ln \bar{x} - \sum_{i=1}^p \ln x_i \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\ln \bar{x} - \ln x_i)$$

$$K_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln \frac{\bar{x}}{x_i} = - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}}.$$

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ln x < x - 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1.$$

$$\text{Supposons que } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{x_i}{\bar{x}} = 1. \text{ Alors } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = \bar{x} \text{ et}$$

$x_1, x_2, \dots, x_p$ sont tous égaux ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$\text{Par conséquent } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{x_i}{\bar{x}} > 0 \text{ et } \exists i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} \neq 1.$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}} + \ln \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1 \right) + \ln \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1 \right) + \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} - 1$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}} < \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1 \right) = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{i=1}^p x_i - p = \frac{1}{\bar{x}} p \bar{x} - p = 0.$$

$$\sum_{i=1}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}} < 0 \text{ donc alors } K_p = - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln \frac{x_i}{\bar{x}} > 0.$$

$$\underline{\underline{K_p > 0.}}$$

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Rappelons d'ici que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, f'(y) = \frac{1}{y} - \frac{f''(y)f(y) - (f'(y))^2}{(f'(y))^2} = \frac{1}{y} - \psi'(y) < 0.$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, h(y) = f(y) - \psi(y) - Kp.$$

Rappelons que $\psi(y) \sim_{0^+} \frac{1}{y}$. donc $\lim_{y \rightarrow 0^+} (y \psi(y)) = -1$.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (y h(y)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (y f(y) - y \psi(y) - y Kp) = 1; \quad y h(y) \sim_{0^+} 1; \quad h(y) \sim_{0^+} \frac{1}{y}.$$

$$\text{Alors } \lim_{y \rightarrow 0^+} h(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty. \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} h(y) = +\infty.$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f admet une limite finie $a + \infty$ soit pour limite $-\infty$ et $+\infty$.

Supposons que f admette $a + \infty$ pour limite $-\infty$.

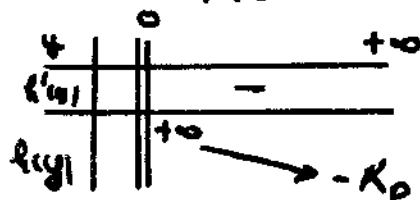
$$\text{Alors } \lim_{y \rightarrow +\infty} (f(y) - \psi(y) - Kp) = -\infty \text{ donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} (f(y) - \psi(y)) = -\infty.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (h(n) - \psi(n)) = -\infty$ (ici c'est dit à l'échelle de II 9 7 qui

$$\text{nous a donné } \lim_{n \rightarrow +\infty} (h(n) - \psi(n)) = 0$$

Ainsi f admet une limite finie L et $+\infty$. Alors $\lim_{y \rightarrow +\infty} (f(y) - \psi(y)) = L + Kp$.

$$\text{Or } 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (h(n) - \psi(n)) = L + Kp \text{ donc } L = -Kp. \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} h(y) = -Kp$$



c) h est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -K_P$.

Ainsi h définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -K_P, +\infty[$.

$K_P > 0$ donc $-K_P < 0$. Ainsi $0 \in] -K_P, +\infty[$.

Alors $\exists ! r^* \in \mathbb{R}_+^n$, $h(r^*) = 0$ ou $h(r^*) = \frac{p'(r^*)}{p(r^*)} = K_P = p_n \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p p_i x_i$.

L'équation (2) admet donc une solution et une seule : r^* . $r^* = h^{-1}(0)$.

Si r^* est la solution de (2), il existe un élément θ^* de $\mathbb{R}_+^p$ et un réel qui vérifie $\theta^* r^* = \bar{x}$: $\theta^* = \frac{\bar{x}}{r^*}$ ($r^* = h^{-1}(0) > 0$).

Le système d'équations (5) admet une solution (θ^*, r^*) et une seule.

concluons... Faut-il un point critique et un réel qui n'est

autre que (θ^*, r^*) avec $r^* = h^{-1}(0)$ et $\theta^* = \frac{\bar{x}}{h^{-1}(0)} = \frac{\bar{x}}{r^*}$.

④ Pour utiliser concrètement les outils du programme nous admettons que r^* est continue sur $\mathbb{R}_+^n$. Comme nous l'avoir dit plus haut cela permet d'affirmer que F est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^n$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta^*, r^*) = p r^* \frac{1}{\theta^*} - \frac{1}{\theta^{*2}} \sum_{i=1}^p x_i = p \frac{\bar{x}}{\theta^*} \frac{1}{\theta^*} - \frac{1}{\theta^{*2}} p \bar{x} = - \frac{p \bar{x}}{(\theta^*)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta^*, r^*) = -p \frac{p(r^*) p(r^*) - (p'(r^*))^2}{(p(r^*))^2} = -p \psi'(r^*).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}(\theta^*, r^*) = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(\theta^*, r^*) = - \frac{p}{\theta^*}. \text{ Alors } \nabla^2 F(\theta^*, r^*) = \begin{pmatrix} - \frac{p \bar{x}}{(\theta^*)^2} & - \frac{p}{\theta^*} \\ - \frac{p}{\theta^*} & - p \psi'(r^*) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que F est de classe C^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^p)^2$ et que (θ^*, r^*)

est le point critique. Pour savoir si F admet un extremum en ce point nous allons

étudier le signe de " $\tilde{T} = r^* - p^2$ " (!!).

($\tilde{T}$ est une notation perso !)

$$\tilde{T} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta^0, r^0) \frac{\partial F}{\partial r_1}(\theta^0, r^0) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(\theta^0, r^0) \right]^2 = \frac{p^2 \bar{x} \psi'(r^0)}{(\theta^0)^3} - \frac{p^2}{(\theta^0)^2}.$$

$$\tilde{T} = \frac{p^2}{(\theta^0)^3} [\bar{x} \psi'(r^0) - \theta^0] = \frac{p^2}{(\theta^0)^3} [\bar{x} \psi'(r^0) - \frac{\bar{x}}{r^0}] = \frac{p^2 \bar{x}}{(\theta^0)^3} [\psi'(r^0) - \frac{1}{r^0}].$$

Ainsi $\tilde{T} > 0$ car $p^2 > 0$, $\bar{x} > 0$, $(\theta^0)^3 > 0$ et $\psi(r^0) - \frac{1}{r^0} > 0$.

Alors F possède un extremum local en (θ^0, r^0) .

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta^0, r^0) = -\frac{p \bar{x}}{(\theta^0)^3} < 0 \text{ ainsi } F \text{ possède un maximum local en } (\theta^0, r^0).$$

PARTIE IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'un loi normale centrée réduite

Q1) $\lambda \in \mathcal{P}(0, \infty)$ donc $\frac{x}{\sigma} \in \mathcal{P}(0, \infty)$. Poser $\gamma = \frac{x}{\sigma}$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}} e^{-x^2}$ est une densité de γ .

de cours et la laque du kpte nous autorise à dire que γ^2 est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction ψ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} (\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

de cours et la laque du kpte nous autorise à dire que $\frac{1}{2} \gamma^2$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $\hat{\psi}: x \mapsto \frac{1}{2} \psi(x)$.

$$\text{par suite donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \hat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dx}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Noter que $\forall x \in \mathbb{R}_-, \hat{\psi}(x) = 0$.

$$\text{pour } \forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ℓ est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre $1/2$.

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \hat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \ell(x)$.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{\psi}(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \ell(x)$.

Alors $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(x) dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \times 1 = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$.

donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\hat{\psi} = \ell$. Ainsi $\frac{1}{2} \gamma^2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$.

Finalement $\frac{X^2}{2\sigma^2} \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Q2 a) $\frac{X_1^2}{2\sigma^2}, \frac{X_2^2}{2\sigma^2}, \dots, \frac{X_n^2}{2\sigma^2}$ sont n variables aléatoires indépendantes (car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes) qui suivent une loi $\Gamma(1, \frac{1}{2})$ (notation de k, θ ...).
 le corollaire alors que $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(1, \frac{n}{2})$.

Suivant une loi $\Gamma(1, \frac{n}{2})$.

b) $E(S_n) = 1 \times \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. $Y_n = \frac{1}{n} 2\sigma^2 S_n$.

donc $E(Y_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n} 2\sigma^2 E(S_n) = \sigma^2$.

$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2 .

Q3 a) $(\sqrt{Y_n})^2 = Y_n$ et $E(Y_n)$ existe donc $\sqrt{Y_n}$ possède un moment d'ordre 2.
 Ainsi $\sqrt{Y_n}$ possède une espérance et une variance.

$V(\sqrt{Y_n}) > 0$ car $\sqrt{Y_n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$ n'est pas presque sûrement constante!

Alors $0 < V(\sqrt{X_n}) = E(\sqrt{X_n}^2) - (E(\sqrt{X_n}))^2 = E(X_n) - (E(\sqrt{X_n}))^2 = \sigma^2 - (E(\sqrt{X_n}))^2$
 $(E(\sqrt{X_n}))^2 < \sigma^2$ et $E(\sqrt{X_n}) > 0$.

Alors $E(\sqrt{X_n}) < \sigma$.

b) $\sqrt{X_n} = \sqrt{\frac{1}{n} 2\sigma^2 S_n} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma \sqrt{S_n}$. $E(\sqrt{S_n})$ existe car $E(\sqrt{X_n})$ existe et
 $E(\sqrt{X_n}) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma E(\sqrt{S_n})$. Calculons $E(\sqrt{S_n})$.

Pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(\frac{k}{2})} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, g_k est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{P}(1, \frac{k}{2})$.

En particulier g_n est une densité de S_n .

S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. de l'échange de l'intégral on déduit alors que $E(\sqrt{S_n})$, qui existe, vaut

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} g_n(t) dt.$$

$$E(\sqrt{S_n}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{+\infty} g_{n+1}(t) dt = \frac{1}{\lambda_n}.$$

$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\lambda_n}$. Alors $E(\sqrt{X_n}) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma \frac{1}{\lambda_n}$.

c) $\hat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{X_n}$.

Ainsi $E(\hat{\sigma}_n)$ existe car $E(\sqrt{X_n})$ existe et vaut $\lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} E(\sqrt{X_n}) = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma \frac{1}{\lambda_n} = \sigma$.

donc $E(\hat{\sigma}_n) = \sigma$. $\hat{\sigma}_n$ est un estimateur sans biais du paramètre σ .

(Q4) a) Nous avons déjà vu que $V(\bar{Y}_n)$ existe et vaut $E(Y_n) - (E(\bar{Y}_n))^2$.

(comme $\hat{\sigma}_n^2 = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \bar{Y}_n$, $V(\hat{\sigma}_n^2)$ existe et vaut $(\lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}})^2 V(\bar{Y}_n)$).

$$V(\hat{\sigma}_n^2) = \lambda_n^2 \frac{n}{2} [E(Y_n) - (E(\bar{Y}_n))^2]$$

$$V(\hat{\sigma}_n^2) = \lambda_n^2 \frac{n}{2} [\sigma^2 - (\sqrt{\frac{2}{n}} \sigma \frac{1}{\lambda_n})^2] = \lambda_n^2 \frac{n}{2} \sigma^2 - \lambda_n^2 \frac{n}{2} \frac{2}{n} \sigma^2 \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

$$\underline{\underline{V(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{n}{2} \lambda_n^2 \sigma^2 - \sigma^2}}$$

b) Rappelons que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$. Ainsi $\lambda_n^2 \sim \frac{2}{n}$ ou $\frac{n}{2} \lambda_n^2 \sim 1$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2} \lambda_n^2 \right) = 1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq P(|\hat{\sigma}_n^2 - E(\hat{\sigma}_n^2)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\hat{\sigma}_n^2)}{\varepsilon^2}. \text{ ou } 0 \leq P(|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\hat{\sigma}_n^2)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\sigma}_n^2) = 0 : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0.$$

Alors $(\hat{\sigma}_n^2)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à σ^2 .

déjà fini ?!