

Quelques remarques

PR 1 Soit u un vecteur non nul de E . Soit x un élément de E , et soit x' sa projection orthogonale sur la droite vectorielle D_u engendrée par u . $x' = P_{D_u}(x)$

$\exists \gamma \in \mathbb{R}, x' = \gamma u$. De plus $x' - x \in D_u^\perp$ donc $\langle x' - x, u \rangle = 0$.

Alors $\langle x, u \rangle = \langle x', u \rangle = \langle \gamma u, u \rangle = \gamma \|u\|^2$; $\gamma = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2}$; $x' = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

Notons que $\|x'\| = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|^2} \|u\| = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}$.

Ainsi $\forall x \in E, P_{D_u}(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ et $\|P_{D_u}(x)\|^2 = \frac{\langle x, u \rangle^2}{\|u\|^2}$

PR 2 Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $(h_1, h_2, \dots, h_p)$ la base canonique de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \phi_A(h_i) = Ah_i$ et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, Ah_j est la j ème colonne de A . La j ème colonne de A est donc la matrice des coordonnées de Ah_j dans la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi

A est la matrice de ϕ_A relativement aux bases canoniques de $\Pi_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

En particulier $\text{rg } A = \text{rg } \phi_A$. Rappelons également que $\text{rg } A = \text{rg } A^t$

Notons aussi que $\rightarrow \text{Ker } \phi_A = \{h \in \Pi_{p,1}(\mathbb{R}) \mid Ah = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}\}$

$$\rightarrow \text{Sp } A = \text{Sp } \phi_A$$

$\rightarrow$ Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la

valeur propre λ est le sous-espace propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ !!

$\rightarrow$ L'image de ϕ_A est le sous-espace vectoriel de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$

engendré par les colonnes de A .

PR 3

Dans la suite $\|\cdot\|_n$ désignera la norme de $E_n = \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique :

Partie I. Étude d'un exemple.

$$\textcircled{Q1} \quad \forall v_i \in \mathbb{U}_{1,3}, \quad \|v_i'\|^2 \stackrel{\text{P.R.I.}}{=} \frac{\langle v_i, u_3 + m u_2 \rangle^2}{\|u_3 + m u_2\|^2} = \frac{1}{1+m^2} \langle v_i, u_3 + m u_2 \rangle^2.$$

$$v_1 = u_3 + 2u_2 \text{ d'où } \langle v_1, u_3 + m u_2 \rangle = 1 + 2m. \quad v_2 = -3u_3 - u_2 \text{ d'où } \langle v_2, u_3 + m u_2 \rangle = -3 - m.$$

$$v_3 = 2u_3 - u_2 \text{ d'où } \langle v_3, u_3 + m u_2 \rangle = 2 - m.$$

$$\text{Alors } \|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2 = \frac{1}{1+m^2} [(1+2m)^2 + (-3-m)^2 + (2-m)^2]$$

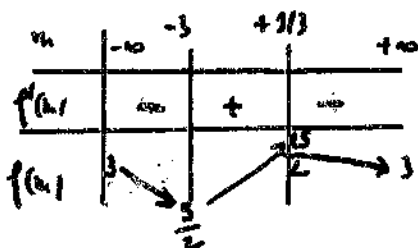
$$\|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2 = \frac{1}{1+m^2} (1+4m+4m^2 + 9+6m+m^2 + 4-4m+m^2).$$

$$\|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2 = \frac{6m^2 + 6m + 14}{m^2 + 1}.$$

$$\text{b) Pour } \forall m \in \mathbb{R}, f(m) = \frac{6m^2 + 6m + 14}{m^2 + 1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

$$\forall m \in \mathbb{R}, f'(m) = \frac{1}{(m^2+1)^2} [(6m+3)(m^2+1) - (6m^2+6m+14)(2m)] = \frac{1}{(m^2+1)^2} (-3m^2 - 8m + 3)$$

$$\forall m \in \mathbb{R}, f'(m) = \frac{-3(m+3)(m-\frac{1}{3})}{(m^2+1)^2}. \quad f' \text{ est du signe de } m \mapsto -3(m+3)(m-\frac{1}{3}).$$



$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow -\infty} f(m) = 3. \quad f(-3) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{2}$$

f est décroissante sur $]-\infty, -3[$ et $\lim_{m \rightarrow -\infty} f(m) = 3$ d'où $\forall m \in]-\infty, -3[, f(m) < 3$.

f est croissante sur $[-3, \frac{1}{3}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$.

$$\text{Alors } \forall m \in [-3, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[, f(m) < f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{2}$$

$$\text{Finalement } \forall m \in \mathbb{R}, f(m) < f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Par conséquent f a un maximum qui vaut $\frac{15}{2}$ atteint au seul point $m_0 = \frac{1}{3}$.

Rappelons que $\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2 = 2 \sqrt{m}$.

$\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2$ possède une maximum lorsque m de $\mathbb{R}$ qui vaut $\lambda_3 = 15$ et qui atteint en $m_0 = \frac{1}{3}$ uniquement.

$$\textcircled{Q2} \quad X^t X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Soit $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$ un élément de E_2 .

$$\phi_{X^t X}(x) = \lambda_3 x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x_1 + 3x_2 = 15x_1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 15x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_3 = 15$

$$\phi_{X^t X}(x) = \lambda_3 x \Leftrightarrow x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(3u_1 + u_2).$$

Ainsi $\lambda_3 = 15$ est une valeur propre de $\phi_{X^t X}$ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $3u_1 + u_2$.

b) la matrice de $\phi_{X^t X}$ dans la base orthonormale (u_1, u_2) de E_2 est $X^t X$ et $X^t X$ est une matrice symétrique. Ainsi $\phi_{X^t X}$ est un endomorphisme symétrique de E_2 . $\phi_{X^t X}$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux. $\lambda_3 = 15$ est une valeur propre de $\phi_{X^t X}$ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle $\text{Vect}(3u_1 + u_2)$. Rappelons que $\dim E_2 = 2$!

Alors $\phi_{X^t X}$ possède une seconde valeur propre et le sous-espace propre est $(\text{Vect}(3u_1 + u_2))^{\perp}$ c'est à dire $\text{Vect}(-u_1 + 3u_2)$.

$$\phi_{X^t X}(-u_1 + 3u_2) = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi 5 est la seconde valeur propre de $\phi_{X^t X}$. $5 < 15$!

Le second sous-espace propre de $\phi_{X^t X}$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(-u_1 + 3u_2)$ et il est associé à la valeur propre 5.

partie II. Les axes principaux d'inertie d'un nuage.

(Q1) a) $\forall v \in \pi_p(\mathbb{R})$. ${}^t v = {}^t(X^t X) = {}^t({}^t X) X = X^t X = v$.

Matrice réelle, réelle et symétrique donc val diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de v . $\exists v \in E_p$, $v \neq 0$ et $v v = \lambda v$.

$${}^t v v v = \lambda {}^t v v = \lambda \|v\|^2. \text{ Or } {}^t v v v = {}^t v X^t X v = {}^t({}^t X v) X v = \|{}^t X v\|_n^2$$

$$\text{Ainsi } \|{}^t X v\|_n^2 = \lambda \|v\|^2 \text{ et } \|v\|^2 \neq 0 \text{ donc } \lambda = \frac{\|{}^t X v\|_n^2}{\|v\|^2} \geq 0.$$

Les valeurs propres de v sont des réels (val. symétrique & réelle) positifs ou nuls.

val. symétrique et réelle donc il existe une base orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E_p constituée de vecteurs propres de v respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Or $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant les valeurs propres de v , comme on dit le k -ème il doit sans doute exister une bijection σ de $\{1, p\}$ sur $\{1, p\}$ telle que $\lambda_i = \lambda_{\sigma(i)}$ ou pour tout $i \in \{1, n\}$, $e_i = e'_{\sigma(i)}$.

$(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est toujours une base orthogonale de E_p et elle est constituée de vecteurs propres ^{de v} respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Ainsi il existe une base orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E_p telle que: $\forall i \in \{1, p\}, v e_i = \lambda_i e_i$.

b) • doit $v \in \ker \phi_v$. $\phi_v(v) = 0$. $v v = 0$. $X^t X v = 0$.

Alors ${}^t v X^t X v = 0$, ${}^t({}^t X v) X v = 0$, $\|{}^t X v\|_n^2 = 0$, ${}^t X v = 0_{\pi_{n,p}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\phi_{tX}(v) = 0$ et $v \in \ker \phi_{tX}$.

Pour conclure $\ker \phi_v \subset \ker \phi_{tX}$

Soit $v \in \ker \phi_{tX}$. ${}^t X v = 0_{\pi_{n,p}(\mathbb{R})}$, $X^t X v = X 0_{\pi_{n,p}(\mathbb{R})} = 0_{\pi_{p,p}(\mathbb{R})}$

Alors $v v = 0_{\pi_{p,p}(\mathbb{R})}$ et $v \in \ker \phi_v$. $\ker \phi_{tX} \subset \ker \phi_v$.

Par conséquent $\text{Ker } \phi_V = \text{Ker } \phi_{\epsilon_X}$.

$$(*) \quad \text{rg } \phi_V = p - \dim \text{Ker } \phi_V = p - \dim \text{Ker } \phi_{\epsilon_X} = \text{rg } \phi_{\epsilon_X}.$$

car $\phi_V \in \mathcal{L}(E_0)$ et $\phi_{\epsilon_X} \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$.

$$\bullet \quad \text{rg } V = \text{rg } \phi_V \stackrel{(*)}{=} \text{rg } \phi_{\epsilon_X} = \text{rg } \epsilon_X = \text{rg } X.$$

Rappelons que r est la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de X donc $r = \text{rg } X$.

Par conséquent: $\text{rg } V = r$.

$$\bullet \quad r < p \text{ donc } \dim \text{Ker } \phi_V = p - r > 0. \text{ } 0 \text{ est donc valeur propre de } \phi_V.$$

Comme $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$ nécessairement $\lambda_p = 0$. Mais $\{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid \lambda_i = 0\} \neq \emptyset$

Posons $\Delta = \min \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid \lambda_i = 0\}$.

Si $\Delta = 1$: $0 = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \phi_V(e_i) = \lambda_i e_i = 0$.

Ainsi $\phi_V = 0_{\mathcal{L}(E_1)}$. $V = 0_{\Pi_p(E_1)}$. $\text{rg } V = 0$. $r = 0$!! donc $\Delta > 1$.

Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\Delta-1} > 0$ et $\lambda_\Delta = \lambda_{\Delta+1} = \dots = \lambda_p = 0$.

$\forall i \in \llbracket 1, \Delta-1 \rrbracket, \frac{1}{\lambda_i} e_i = \frac{1}{\lambda_i} \phi_V(e_i) = \phi_V(\frac{1}{\lambda_i} e_i) \in \text{Im } \phi_V$.

$(e_1, \dots, e_{\Delta-1})$ est une famille libre de $\text{Im } \phi_V$ donc $\Delta-1 \leq \dim \text{Im } \phi_V = r$; $\Delta-1 \leq r$.

$\forall i \in \llbracket \Delta, p \rrbracket, e_i \in \text{Ker } \phi_V$; $(e_\Delta, e_{\Delta+1}, \dots, e_p)$ est une famille libre de $\text{Ker } \phi_V$.

Alors $p - (\Delta-1) \leq \dim \text{Ker } \phi_V = p - r$ donc $r \leq \Delta-1$.

Finalement $r = \Delta-1$; $\Delta = r+1$.

Alors $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont des réels strictement positifs.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres strictement positives de V .

• Pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base de F , il suffit de prouver que les éléments de cette famille sont dans F car $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une famille libre (sous-famille d'une famille libre) de r éléments et $\dim F = r$.

Nous venons de voir que : $\forall i \in [1, r], e_i \in \text{Im } \phi_V$ ($e_i = \phi_V(\frac{1}{\lambda_i} c_i)$).

Notons alors que $\text{Im } \phi_V \subset F = \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \text{Im } \phi_X$.

Soit $v' \in \text{Im } \phi_V$. $\exists v \in E$, $v' = \phi_V(v) = Vv = X^t X v = \phi_X(Xv) \in \text{Im } \phi_X$.

Alors $\text{Im } \phi_V \subset \text{Im } \phi_X = F$. Par conséquent $\forall i \in [1, r], e_i \in F$.

$(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de r éléments de F constituée d'éléments de F et F est de dimension r . $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base (altérnante) de F .

(Q2) a) Soit un élément de E , de norme 1. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$.

d'après ex 1 $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\rho_{p_j}(c_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\langle c_j, v \rangle^2}{\|v\|^2} = \sum_{j=1}^n \langle c_j, v \rangle^2$.

d'autre part ${}^t v V v = {}^t v X^t X v = ({}^t X v) {}^t X v = \|{}^t X v\|_n^2$. Soit ${}^t X v = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

${}^t v V v = \sum_{i=1}^n t_i^2$ et $\forall i \in [1, n], t_i = \sum_{j=1}^p x_{ji} v_j = (x_{j1} \ x_{j2} \ \dots \ x_{jp}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = {}^t c_j v$
 $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = {}^t X v$ $\uparrow$
c est la i -ème colonne de X

$\forall i \in [1, n], t_i = {}^t c_i v = \langle c_i, v \rangle$

Alors ${}^t v V v = \sum_{i=1}^n \langle c_i, v \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \langle c_j, v \rangle^2 = \|v\|^2$.

$\forall v \in E, \|v\| = 1 \Rightarrow I(v) = {}^t v V v$.

b) Soit $i \in [1, p]$. $\|e_i\| = 1$ donc $I(e_i) = {}^t e_i V e_i = {}^t e_i (x_{ji}) = \lambda_i {}^t e_i e_i = \lambda_i \|e_i\|^2$

Ainsi $\forall i \in [1, p], I(e_i) = \lambda_i$.

c) • Montrons par récurrence que: $\forall i \in [1, r]$, $F_i = \text{Vect}(e_i, \dots, e_r)$.

→ c'est vrai pour $i=1$ car d'après II 1) b) $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base de F et $F_1 = F$.

→ Supposons la propriété vraie pour $i \in [1, r-1]$ et montrons le pour $i+1$.

$$F_i = \text{Vect}(e_i, \dots, e_r) \text{ et } F_{i+1} = F_i \cap D_{e_i}^\perp$$

Soit un élément de F_i . $\exists (\lambda_i, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-(i-1)}$, $v = \sum_{k=i}^r \lambda_k e_k$

$$v \in D_{e_i}^\perp \Leftrightarrow \langle v, e_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$$

$(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormale.

$$\text{Ainsi } F_i \cap D_{e_i}^\perp = \left\{ \sum_{k=i}^r \lambda_k e_k, (\lambda_i, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-i+1} \text{ et } \lambda_i = 0 \right\} = \left\{ \sum_{k=i+1}^r \lambda_k e_k; (\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r-i} \right\}$$

Alors $F_i \cap D_{e_i}^\perp = \text{Vect}(e_{i+1}, \dots, e_r)$. $F_{i+1} = \text{Vect}(e_{i+1}, \dots, e_r)$ et la récurrence s'achève.

$$\forall i \in [1, r], F_i = \text{Vect}(e_i, \dots, e_r).$$

• Soit un élément de E_p de coordonnées $(t_1, t_2, \dots, t_p)$ dans la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et de norme 1.

$$I(v) = {}^t v v = \langle v, v \rangle. \quad v = \sum_{i=1}^p t_i e_i \text{ et } v = \sum_{i=1}^p t_i v e_i = \sum_{i=1}^p t_i \lambda_i e_i$$

$$\text{Comme } (e_1, e_2, \dots, e_p) \text{ est orthonormale: } \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^p (t_i \lambda_i) t_i = \sum_{i=1}^p t_i^2 \lambda_i$$

$$\text{Donc } I(v) = \sum_{i=1}^p t_i^2 \lambda_i \leq \left(\sum_{i=1}^p t_i^2 \right) \lambda_1 \text{ car } \forall i \in [1, p], \lambda_1 \geq \lambda_i \text{ et } t_i^2 \geq 0.$$

$$I(v) \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^p t_i^2 = \lambda_1 \|v\|^2 = \lambda_1. \quad \text{Or } \lambda_1 = I(e_1) \text{ et } \|e_1\| = 1.$$

$$\text{Donc } \forall v \in E_p, \|v\| = 1 \Rightarrow I(v) \leq I(e_1) \text{ et } \|e_1\| = 1.$$

$$\text{Alors } \underline{I(e_1) = \max \{ I(v); v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \} = \lambda_1}$$

$$e_1 \in F_1, \|e_1\| = 1 \text{ et } \forall v \in F_1, \|v\| = 1 \Rightarrow I(v) \leq I(e_1)$$

$\uparrow$
 $F_1 \subset E_p$!

$$\text{Ainsi } \underline{I(e_1) = \max \{ I(v); v \in F_1 \text{ et } \|v\| = 1 \}}.$$

- Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Soit v un vecteur unitaire de F_i de coordonnées $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E_p .
Véculienent $v_1 = v_2 = \dots = v_{i-1} = 0$ car $v \in F_i$.

Nous venons de voir que $\mathcal{I}(v) = \sum_{k=1}^p v_k^2 \lambda_k$

Ainsi $\mathcal{I}(v) = \sum_{k=i}^p v_k^2 \lambda_k \leq \sum_{k=i}^p v_k^2 \lambda_i$ car $\forall k \in \llbracket i, p \rrbracket, \lambda_k \leq \lambda_i$ et $v_k^2 \geq 0$.

Pour conclure $\mathcal{I}(v) \leq \left(\sum_{k=i}^p v_k^2 \right) \lambda_i = \left(\sum_{k=i}^p v_k^2 \right) \lambda_i = \|v\|^2 \lambda_i = \lambda_i = \mathcal{I}(e_i)$.

Alors $e_i \in F_i, \|e_i\| = 1$ et $\forall v \in F_i, \|v\| = 1 \Rightarrow \mathcal{I}(v) \leq \mathcal{I}(e_i)$.

Ainsi $\mathcal{I}(e_i) = \max \{ \mathcal{I}(v) ; v \in F_i \text{ et } \|v\| = 1 \}$ et ce pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Q3) Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $\mathcal{I}(w) = \max \{ \mathcal{I}(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \}$

$\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p, w = \sum_{k=1}^p \beta_k e_k$. Supposons que $w \notin F$.

Alors $\exists k_0 \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \beta_{k_0} \neq 0$. $\beta_{k_0}^2 > 0$ et $\lambda_1 > 0$

$\mathcal{I}(w) = \sum_{k=1}^p \beta_k^2 \lambda_k = \sum_{k=1}^r \beta_k^2 \lambda_k \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^r \beta_k^2 < \lambda_1 \sum_{k=1}^p \beta_k^2 = \lambda_1 \|w\|^2 = \lambda_1$.

$\lambda_k = 0 \text{ si } k > r$ $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_k \leq \lambda_1$ et $\beta_k^2 \geq 0$.

Alors $w \in E_p, \|w\| = 1, \mathcal{I}(w) < \lambda_1 = \max \{ \mathcal{I}(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \}$.

Ceci contredit $\mathcal{I}(w) = \max \{ \mathcal{I}(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \}$.

Ainsi w est un vecteur unitaire de E_p tel que $\mathcal{I}(w) = \max \{ \mathcal{I}(v) ; v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1 \}$ alors $w \in F$.

Q4) a) $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \|e_i\| = 1$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i < j, i+1 \leq j$

Remarquons que $e_j \in G_j$ et que $G_j \subset G_{i+1} = G_i \cap D_{e_i}^\perp$

Ainsi $\varepsilon_j \in D_{\varepsilon_i}^\perp$; $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$ sont orthogonaux.

$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\|\varepsilon_i\| = 1$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille orthogonale de E .

De plus $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\varepsilon_i \in G_i \subset G_j = F$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille orthogonale, donc libre, de F de cardinal r et de $\dim F = r$. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthogonale de F .

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthogonale de E . Ainsi les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ et $H = \text{Vect}(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthogonale de F , $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthogonale de H , F et H sont donc supplémentaires orthogonaux de E , donc :

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthogonale de E .

b) Soit (v, w) deux éléments de E . Nous avons déjà vu que :

$${}^tXv = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_1, v \rangle \\ \langle \varepsilon_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle \varepsilon_n, v \rangle \end{pmatrix}. \text{ De même : } {}^tXw = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_1, w \rangle \\ \langle \varepsilon_2, w \rangle \\ \vdots \\ \langle \varepsilon_n, w \rangle \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } J(v, w) = \sum_{j=1}^n \langle v, \varepsilon_j \rangle \langle w, \varepsilon_j \rangle = ({}^tXv) {}^tXw = {}^t v ({}^tX) {}^tXw = {}^t v X {}^tXw$$

$$\text{Donc } J(v, w) = {}^t v V w = \langle v, Vw \rangle = \langle v, \phi_V(w) \rangle.$$

$$\underline{\underline{\forall (v, w) \in E^2, J(v, w) = {}^t v V w = \langle v, \phi_V(w) \rangle.}}$$

c) • Soit $t \in \mathbb{R}$. $\varphi(t) = I(\cos t v_1 + \sin t v_2)$. Posons $\omega = \cos t v_1 + \sin t v_2$.

$$\varphi(t) = I(\omega) = {}^t\omega V \omega = \langle \omega, \phi_V(\omega) \rangle = \langle \cos t v_1 + \sin t v_2, \cos t \phi_V(v_1) + \sin t \phi_V(v_2) \rangle$$

$$\varphi(t) = \cos^2 t \langle v_1, \phi_V(v_1) \rangle + \cos t \sin t \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle + \sin t \cos t \langle v_2, \phi_V(v_1) \rangle + \sin^2 t \langle v_2, \phi_V(v_2) \rangle.$$

Notons que ϕ_V est un endomorphisme symétrique ; $\langle v_2, \phi_V(v_1) \rangle = \langle \phi_V(v_2), v_1 \rangle = \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle$.

$$\text{Ainsi } \varphi(t) = \cos^2 t I(v_1) + 2 \cos t \sin t \langle v_1, \phi_V(v_2) \rangle + \sin^2 t I(v_2).$$

$$\text{Alors } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \cos^2 t I(v_1) + \sin^2 t J(v_1, v_2) + \sin^2 t I(v_2).$$

• φ est périodique de période π et φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[0, \pi]$.

Ainsi φ possède un maximum & un minimum sur $[0, \pi]$ donc sur $\mathbb{R}$.

En particulier φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et elle admet un maximum sur $\mathbb{R}$!

• Supposons que φ atteigne son maximum en 0.

φ étant dérivable sur $\mathbb{R}$: $\varphi'(0) = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = -2 \sin t \cos t I(v_1) + 2 \cos^2 t J(v_1, v_2) + 2 \sin^2 t \cos t J(v_2) \text{ donc } \varphi'(0) = 2 J(v_1, v_2).$$

$$\text{Ainsi } J(v_1, v_2) = 0.$$

Si φ atteint son maximum en 0 alors $J(v_1, v_2) = 0$.

d) • Soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k$ tel que $i \neq j$. Supposons même que $i < j$ (ce qui n'est pas restrictif car $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = J(\varepsilon_j, \varepsilon_i) \dots$).

$$\text{Posons } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = I(\cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j).$$

Observons que $G_j \subset G_i$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j \in G_i$ car $\varepsilon_i \in G_i$ et $\varepsilon_j \in G_j$.

$$\text{Or pour } \forall t \in \mathbb{R}, \|\cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j\|^2 = \cos^2 t \|\varepsilon_i\|^2 + \sin^2 t \|\varepsilon_j\|^2 + 2 \cos t \sin t \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle + \sin^2 t \|\varepsilon_j\|^2$$

$$\text{Or } \|\varepsilon_i\|^2 = \|\varepsilon_j\|^2 = 1 \text{ et } \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0.$$

$$\text{Alors } \forall t \in \mathbb{R}, \|\cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j\|^2 = 1. \forall t \in \mathbb{R}, \|\cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j\| = 1 \text{ et } \cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j \in G_i$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = I(\cos t \varepsilon_i + \sin t \varepsilon_j) \leq \max \{I(v); v \in G_i \text{ et } \|v\| = 1\} = I(\varepsilon_i) = \varphi(0).$$

$$\forall i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i < j \Rightarrow J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = J(\varepsilon_j, \varepsilon_i).$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.}}$$

$$\bullet \quad \forall \ell \in \llbracket r+1, p \rrbracket, \phi_v(e_\ell) = 0.$$

$$\text{Soit } i \in \llbracket 1, r \rrbracket. \quad \varepsilon_i \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \lambda_i \neq 0 \text{ pour } i \in \llbracket 1, r \rrbracket$$

$$\phi_v(\varepsilon_i) \in \phi_v(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)) = \text{Vect}(\phi_v(e_1), \dots, \phi_v(e_r)) = \text{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_r e_r) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = F$$

$$\phi_v(\varepsilon_i) \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r). \quad \exists (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r, \quad \phi_v(\varepsilon_i) = \left(\sum_{\ell=1}^r \tau_\ell e_\ell \right)$$

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad J(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \langle \varepsilon_j, \phi_v(\varepsilon_i) \rangle = \sum_{\ell=1}^r \tau_\ell \langle \varepsilon_j, e_\ell \rangle = \delta_{ij}$$

$$\text{Alors } \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket - \{i\}, \quad \delta_{ij} = J(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0 \text{ et } \delta_{ii} = J(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = I(\varepsilon_i)$$

$$\text{On a } \phi_v(\varepsilon_i) = I(\varepsilon_i) \varepsilon_i.$$

La matrice de ϕ_v dans la base orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(I(\varepsilon_1), I(\varepsilon_2), \dots, I(\varepsilon_r), 0, 0, \dots, 0)$.

$$\bullet \text{ la suite } (I(\varepsilon_i))_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \text{ est décroissante donc } I(\varepsilon_1) \geq I(\varepsilon_2) \geq \dots \geq I(\varepsilon_r) \geq 0 \geq 0 \geq \dots \geq 0!$$

Après $I(\varepsilon_1), I(\varepsilon_2), \dots, I(\varepsilon_r), 0, 0, \dots, 0$ sont les valeurs propres de v . Alors nécessairement $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i = I(\varepsilon_i)$. Montrons que : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \varepsilon_i \neq 0$.
Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \varepsilon_i$ est une valeur propre de v associée à λ_i .

$$\textcircled{\text{QS}} \text{ posons } V = (\beta_{ij}). \quad V = X^t X \text{ donc } \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \beta_{ij} = \sum_{\ell=1}^n x_{i\ell} x_{j\ell}$$

$$\text{Ainsi } \forall (k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \frac{1}{n} \beta_{k\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ki} x_{\ell i} = E(x_k x_\ell) = E(x_k x_\ell) - E(x_k) E(x_\ell) \\ E(x_k) = E(x_\ell) = 0$$

$$\text{Alors } \forall (k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \frac{1}{n} \beta_{k\ell} = \text{cov}(x_k, x_\ell).$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{(\text{cov}(x_k, x_\ell))_{(k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} = \frac{1}{n} V.}}$$

Partie III une décomposition de la matrice X .

Remarques. - Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $\rightarrow \pi_i$ est la matrice de $P_{D_{e_i}}$ dans la base canonique de E_p .

$$\rightarrow \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, P_{D_{e_i}}(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ e_i & \text{si } j = i \end{cases} ; \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ e_i & \text{si } j = i \end{cases}.$$

$$\rightarrow \text{Im } P_{D_{e_i}} = \text{Vect}(e_i) \text{ et } \text{Ker } P_{D_{e_i}} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p).$$

$$\rightarrow \forall x \in E_p, P_{D_{e_i}}(x) = \langle e_i, x \rangle e_i \text{ et } \pi_i x = \langle e_i, x \rangle e_i.$$

① $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\sum_{i=1}^p P_{D_{e_i}})(e_j) = \sum_{i=1}^p P_{D_{e_i}}(e_j) = e_j = \text{Id}_{E_p}(e_j)$. Alors les endomorphismes $\sum_{i=1}^p P_{D_{e_i}}$ et Id_{E_p} , de E_p , coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p . Il y a donc égalité.

Ainsi $\underline{\underline{\sum_{i=1}^p \pi_i = I_p.}}$

② Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. Supposons $i \neq j$.

$$\forall x \in E_p, (\pi_i \pi_j)(x) = \pi_i(\langle e_j, x \rangle e_j) = \langle e_j, x \rangle \pi_i(e_j) = \langle e_j, x \rangle 0_{E_p} = 0_{E_p}.$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \underline{\underline{\pi_i \pi_j = 0_{\pi_p(\mathbb{R})}}}.$$

③ Soit $i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$. $X \in \pi_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\pi_i \in \pi_p(\mathbb{R})$ donc $\pi_i X \in \pi_{p,n}(\mathbb{R})$. $\pi_i X$ est la matrice, relativement aux bases canoniques de $\pi_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\pi_{p,n}(\mathbb{R})$, de $P_{D_{e_i}} \circ \phi_X$.

Rappelons que $\text{Im } \phi_X = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r) = F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$.

Remarquons que $\forall i \in \llbracket r+1, p \rrbracket, P_{D_{e_i}}(e_i) = 0$ ($i \in \llbracket r+1, p \rrbracket$) et ainsi

$P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F .

ϕ_X prend ses valeurs dans F et $P_{D_{e_i}}$ est nulle sur F donc $P_{D_{e_i}} \circ \phi_X$ est l'application linéaire nulle de $\pi_{p,n}(\mathbb{R})$ dans $\pi_{p,n}(\mathbb{R})$. $\pi_i X = 0_{\pi_{p,n}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket r+1, p \rrbracket, \underline{\underline{\pi_i X = 0_{\pi_{p,n}(\mathbb{R})}}}$.

$$X = I_1 X = \left(\sum_{i=1}^p \pi_i \right) X = \sum_{i=1}^p \pi_i X = \sum_{i=1}^r \pi_i X \quad (\text{d'après ce qui précède}).$$

$$\underline{\underline{X = \sum_{i=1}^r \pi_i X.}}$$

Q4 a) Soit $\rho \in \mathbb{I}_{1,r}$. $\phi_{X_\rho} = \sum_{i=1}^{\Delta} \phi_{\pi_i} \circ \phi_X$. $\phi_{X_\rho} \in \mathcal{L}(\pi_{u,r}(\mathbb{K}), \pi_{p,r}(\mathbb{K}))$.

$$\text{Im } \phi_{X_\rho} = \phi_{X_\rho}(\pi_{u,r}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{\Delta} \phi_{\pi_i}(\phi_X(\pi_{u,r}(\mathbb{K}))) = \sum_{i=1}^{\Delta} \phi_{\pi_i}(\text{Im } \phi_X) = \sum_{i=1}^{\Delta} \phi_{\pi_i}(F).$$

$$\forall i \in \mathbb{I}_{1,\Delta}, \phi_{\pi_i}(F) = \phi_{\pi_i}(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)) = \text{Vect}(\phi_{\pi_i}(e_1), \dots, \phi_{\pi_i}(e_r)) = \text{Vect}(e_i)$$

$$\text{Im } \phi_{X_\rho} = \sum_{i=1}^{\Delta} \text{Vect}(e_i) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_\Delta) \quad (\text{on fait il y a égalité}).$$

$$\forall i \in \mathbb{I}_{1,r}, \text{Im } \phi_{X_\rho} \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_\Delta) \dots \text{et même } \text{Im } \phi_{X_\rho} = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_\Delta).$$

b) $\forall j \in \mathbb{I}_{1,\Delta}, X_\rho({}^t X e_j) = \sum_{i=1}^{\Delta} (\pi_i X {}^t X e_j) = \sum_{i=1}^{\Delta} (\pi_i v e_j) = \lambda_j \sum_{i=1}^{\Delta} \pi_i e_j$

$$\forall j \in \mathbb{I}_{1,\Delta}, X_\rho({}^t X e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > \Delta \\ \lambda_j e_j & \text{si } j \leq \Delta \end{cases}$$

Ceci montre que $\forall j \in \mathbb{I}_{1,\Delta}, \lambda_j e_j \in \text{Im } \phi_{X_\rho}$ donc

$\forall j \in \mathbb{I}_{1,\Delta}, e_j \in \text{Im } \phi_{X_\rho}$ (car $\lambda_j \neq 0$ si $j \leq r$!)

Ainsi $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_\Delta) \subset \text{Im } \phi_{X_\rho} \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_\Delta)$.

Finalement $\underline{\underline{\text{Im } \phi_{X_\rho} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_\Delta)}}$.

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_\Delta)$ étant libre : $\dim \text{Im } \phi_{X_\rho} = \Delta$; $\text{rg } \phi_{X_\rho} = \Delta$.

Alors $\underline{\underline{\text{rg } X_\rho = \Delta}}$.

Partie IV Une norme euclidienne de matrices carrées.

Q1 Soient $(\pi, N, R) \in \Pi_{p,n}^3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

→ Notons que $\pi \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$ et $N \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $\pi^t N \in \Pi_p(\mathbb{R})$; ainsi

$\Theta(\pi, N)$ est une forme de $\mathbb{R}$!

→ $\Theta(\lambda \pi + N, R) = \text{Tr}((\lambda \pi + N)^t R) = \text{Tr}(\lambda \pi^t R + N^t R) = \lambda \text{Tr}(\pi^t R) + \text{Tr}(N^t R) = \lambda \Theta(\pi, R) + \Theta(N, R)$.

$\Theta(\lambda \pi + N, R) = \lambda \Theta(\pi, R) + \Theta(N, R)$ une matrice d'adjointe et même trace.

→ $\Theta(\pi, N) = \text{Tr}(\pi^t N) = \text{Tr}(\pi^t N) = \text{Tr}(N^t \pi) = \Theta(N, \pi)$. $\Theta(\pi, N) = \Theta(N, \pi)$.

→ Posons $\pi = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\pi^t \pi = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

$$\Theta(\pi, \pi) = \text{Tr}(\pi^t \pi) = \sum_{i=1}^p c_{ii} = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ij} \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n m_{ij}^2$$

Ainsi $\Theta(\pi, \pi) \geq 0$.

Supposons que $\Theta(\pi, \pi) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n m_{ij}^2 = 0$.

comme: $\forall (i, j) \in \{1, p\} \times \{1, n\}, m_{ij}^2 \geq 0$: $\forall (i, j) \in \{1, p\} \times \{1, n\}, m_{ij}^2 = 0$.

donc $\forall (i, j) \in \{1, p\} \times \{1, n\}, m_{ij} = 0$; $\pi = 0$. $\Theta(\pi, \pi) = 0 \Rightarrow \pi = 0$.

Ainsi Θ est un produit scalaire sur $\Pi_{p,n}(\mathbb{R})$.

Q2 Soit $(i, j) \in \{1, p\}^2$. $\Theta(\pi_i X, \pi_j X) = \text{Tr}((\pi_i X)^t (\pi_j X)) = \text{Tr}(\pi_i X^t X \pi_j)$

$$\Theta(\pi_i X, \pi_j X) = \text{Tr}(\pi_i V^t \pi_j) \quad (e_1, e_2, \dots, e_p)$$

La matrice de ϕ_{π_j} dans la base orthonormale est diagonale d'adjointe d'adjointe.

Donc ϕ_{π_j} est un endomorphisme symétrique de E_p (normal pour une projection

orthogonale) donc sa matrice π_j dans la base canonique de E_p , qui est

une base orthonormale, est symétrique. Alors ${}^t \pi_j = \pi_j$. Alors $\Theta(\pi_i X, \pi_j X) = \text{Tr}(\pi_i V \pi_j)$

$$\text{Intéressons nous à } \ell = \phi_{\pi_i} \circ \phi_v \circ \phi_{\pi_j}.$$

$$\forall k \in \{1, p\} - \{j\}, \ell(e_k) = 0 \text{ (car } \phi_{\pi_j}(e_k) = 0 \text{ si } k \neq j).$$

$$\ell(e_j) = \phi_{\pi_i}(\phi_v(\phi_{\pi_j}(e_j))) = \phi_{\pi_i}(\phi_v(e_j)) = \phi_{\pi_i}(\lambda_j e_j) = \lambda_j \phi_{\pi_i}(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \lambda_i e_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$\text{Ainsi si } i \neq j : \ell = 0_{X(E_p)} \text{ car } \forall k \in \{1, p\}, \ell(e_k) = 0_{E_p}.$$

$$\text{Si } i = j : \forall k \in \{1, p\}, \ell(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \lambda_i e_i & \text{si } k = i \end{cases}; \text{ alors } \ell \text{ coïncide avec}$$

$$\lambda_i \phi_{\pi_i} \text{ sur la base } (e_1, \dots, e_p) \text{ de } E_p. \text{ Donc } \ell = \lambda_i \phi_{\pi_i}.$$

$$\phi_{\pi_i} \circ \phi_v \circ \phi_{\pi_j} = \begin{cases} 0_{X(E_p)} & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i \phi_{\pi_i} & \text{si } i = j \end{cases}. \text{ Alors } \pi_i \vee \pi_j = \begin{cases} 0_{\pi_i} & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i \pi_i & \text{si } i = j \end{cases}.$$

$$\Theta(\pi_i X, \pi_j X) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \text{tr}(\lambda_i \pi_i) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$\text{tr}(\lambda_i \pi_i) = \lambda_i \text{tr}(\pi_i)$. π_i est la matrice de ϕ_{π_i} dans la base canonique de E_p , elle est donc semblable à la matrice π'_i de ϕ_{π_i} dans $(e_1, e_i, \dots, e_p)$.

$$\text{Donc } \text{tr}(\pi_i) = \text{tr}(\pi'_i).$$

$$\forall k \in \{1, p\}, \phi_{\pi_i}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ e_i & \text{si } k = i \end{cases}. \pi'_i \text{ est donc la matrice diagonale}$$

dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.

$$\text{Alors } \text{tr}(\pi_i) = \text{tr}(\pi'_i) = 1. \text{ Finalement :}$$

$$\forall (i, j) \in \{1, p\}^2, \Theta(\pi_i X, \pi_j X) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Soit $p \in \{1, r\}$

$$\textcircled{Q3} \quad \|X - X_p\|^2 = \Theta(X - X_p, X - X_p) = \sum_{i=1}^r \pi_i X - \sum_{i=1}^p \pi_i X$$

$$\text{Si } p = r : X = X_p \text{ et } \|X - X_p\|^2 = 0.$$

$$\text{Supposons } p < r. X - X_p = \sum_{i=p+1}^r \pi_i X.$$

$$\theta(X-X_0, X-X_0) = \theta\left(\sum_{i=0}^r \pi_i X, \sum_{j=0}^r \pi_j X\right) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \theta(\pi_i X, \pi_j X) = \sum_{i=0}^r \theta(\pi_i X, \pi_i X) \quad \uparrow i=j$$

$$\|X-X_0\|^2 = \sum_{i=0}^r \lambda_i.$$

$$\theta(\pi_i X, \pi_j X) = 0 \text{ si } j \neq i$$

$$\text{Ainsi } \forall p \in \overline{0, r}, \|X-X_0\|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p = r \\ \sum_{i=0}^p \lambda_i & \text{si } p < r \end{cases}$$

Partie V. La meilleure approximation du nuage.

Q1) $X \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R}), N \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$ d'où $X-N \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$ et ${}^t(X-N) \in \Pi_{n,p}(\mathbb{R})$.

Ainsi $(X-N) {}^t(X-N) \in \Pi_p(\mathbb{R})$. De plus ${}^t((X-N) {}^t(X-N)) = ({}^t(X-N)) {}^t(X-N) = (X-N) {}^t(X-N)$.

D'où $(X-N) {}^t(X-N)$ est une matrice symétrique et réelle de $\Pi_p(\mathbb{R})$ (!) d'où il existe une base orthogonale $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de E_p constituée de vecteurs propres

de $(X-N) {}^t(X-N)$ respectivement associée aux valeurs propres $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ avec $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_p$.

Q2) Reprenons deux sous-espaces vectoriels H_1 et H_2 de E_p .

$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$ et $\dim(H_1 + H_2) \leq p$ car $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E_p . Par :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq \dim H_1 + \dim H_2 - p.$$

$$\begin{aligned} & \text{soit } (a_1, \dots, a_p) \text{ l'orthobase} \\ & \dim G_i \geq i \\ & \dim \text{Vect}(a_1, \dots, a_p) = p - (i-1) \end{aligned}$$

a) Ainsi $\dim(G_i \cap \text{Vect}(a_1, \dots, a_p)) \geq \dim G_i + \dim \text{Vect}(a_1, \dots, a_p) - p \geq i + p - (i-1) - p = 1$

$$\dim(G_i \cap \text{Vect}(a_1, \dots, a_p)) \geq 1.$$

b) Alors $G \cap \text{Vect}(a_1, \dots, a_p)$ est un sous-espace vectoriel distinct de $\{0_{E_p}\}$.
Ce sous-espace contient donc un vecteur unitaire u .

$$u \in G \text{ et } u \in \text{Vect}(a_1, \dots, a_p). \exists (j_1, \dots, j_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}, u = \sum_{k=1}^p j_k a_k.$$

$$\|{}^t(x-N)u\|_n^L = \langle {}^t(x-N)u, {}^t(x-N)u \rangle = {}^t u (x-N) {}^t(x-N)u = \langle u, (x-N) {}^t(x-N)u \rangle$$

$$\text{et } (x-N) {}^t(x-N)u = (x-N) {}^t(x-N) \left(\sum_{k=1}^p j_k a_k \right) = \sum_{k=1}^p j_k \delta_k a_k$$

$$\text{comme } (a_1, \dots, a_p) \text{ est une base orthonormée de } E_p : \langle u, (x-N) {}^t(x-N)u \rangle = \sum_{k=1}^p j_k (j_k r_k)$$

$$\text{et } \|u\|^2 = \sum_{k=1}^p j_k^2.$$

$$\text{Alors } \|{}^t(x-N)u\|_n^L = \sum_{k=1}^p j_k^2 r_k \stackrel{r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_i \text{ et } j_k^2 \geq 0}{\leq} \left(\sum_{k=1}^p j_k^2 \right) r_i = \|u\|^2 r_i = r_i.$$

Repère un vecteur unitaire u de G tel que $\|{}^t(x-N)u\|_n^L \leq r_i$.

$$\leq \text{ car } H \geq \text{car } \text{Ker } \phi_{t_N} + \dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+i}) - p = \dim \text{Ker } \phi_{t_N} + n+i-p.$$

$$\text{Rappelons que } \text{rg } {}^t N = \text{rg } N = s. \text{ Alors } \dim \text{Im } \phi_{t_N} = s.$$

ϕ_{t_N} est une application linéaire de E_p dans $\Pi_{n+i}(M)$. Le noyau de ϕ_{t_N}

$$\text{dans } \text{Ker } \phi_{t_N} = \dim E_p - \dim \text{Im } \phi_{t_N} = p-s.$$

$$\text{Alors } \dim H \geq p-s + s + i - p = i. \quad \underline{\underline{\dim H \geq i.}}$$

Appliquons alors b) avec $G=H$. On peut donc trouver un vecteur

$$\text{unitaire } u \text{ de } H \text{ tel que : } \|{}^t(x-N)u\|_n^L \leq r_i.$$

$$H = \text{Ker } \phi_{t_N} \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+i}) \text{ donc } {}^t N u = 0.$$

$$\text{Alors } \|{}^t(x-N)u\|_n^L = \|{}^t x u\|_n^L = {}^t({}^t x u) {}^t x u = {}^t u x {}^t x u = {}^t u V u. \quad \underline{{}^t u V u \leq r_i}$$

$$\exists (\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{n+i}) \in \mathbb{R}^{n+i}, u = \sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k e_k. \quad v u = \sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k \lambda_k e_k$$

$$\text{Alors } {}^t u V u = \langle u, v u \rangle = \sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k^2 \lambda_k \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k^2$$

$$\text{donc } r_i \geq {}^t u V u = \sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k^2 \lambda_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n+i} \hat{j}_k^2 \right) \lambda_{n+i} \text{ car } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+i} \text{ (et } \hat{j}_k^2 \geq 0).$$

Alors $\sigma_i \geq \left(\sum_{k=1}^{n+i} \lambda_k^2 \right) \lambda_{n+i} = \lambda_{n+i} \|u\|^2 = \lambda_{n+i}$. Finalement $\lambda_{n+i} \leq \sigma_i$.

Q3 a) La matrice de $\phi_{(X-N)^t(X-N)}$ dans la base $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$.

Donc $(X-N)^t(X-N)$ est semblable à $\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$.

$$\text{Alors } \text{Tr}((X-N)^t(X-N)) = \text{Tr}(\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)) = \sum_{i=1}^p \sigma_i$$

$$\text{Donc } \sigma(X-N, X-N) = \sum_{i=1}^p \sigma_i. \text{ Ainsi } \|X-N\|^2 = \sum_{i=1}^p \sigma_i.$$

b) $\forall i \in [1, r-\Delta]$, $\lambda_{n+i} \leq \sigma_i$.

$$\forall i \in [1, p], \| (X-N)a_i \|^2 = a_i^t (X-N)^t (X-N) a_i = \sigma_i a_i^t a_i = \sigma_i \|a_i\|^2 = \sigma_i.$$

Donc $\forall i \in [1, p]$, $\sigma_i \geq 0$.

$$\text{Alors } \|X-N\|^2 = \sum_{i=1}^p \sigma_i \geq \sum_{i=1}^{r-\Delta} \sigma_i \geq \sum_{i=1}^{r-\Delta} \lambda_{n+i} = \sum_{i=n+1}^r \lambda_i.$$

c) Rappelons que pour $\lambda \in [1, r-1]$, $\|X-X_\lambda\|^2 = \sum_{i=\lambda+1}^r \lambda_i$. (IV 93)

Ainsi $\exists X_\lambda \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$

$$\text{et } \text{rg } X_\lambda = \lambda \quad (\text{III } \Phi 4 b)$$

$$\forall N \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R}), \text{rg } N \leq \lambda \Rightarrow \|X-X_\lambda\|^2 = \sum_{i=\lambda+1}^r \lambda_i \leq \|X-N\|^2.$$

Ainsi X_λ réalise la meilleure approximation de X par des matrices de

$\Pi_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à λ au sens de la norme $\|\cdot\|$.

Q4 a) Notons $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ la base canonique de $\Pi_{n,n}(\mathbb{R})$.

Si $j \in [1, n]$, Xw_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de X c'est à dire c_j .

$$\text{Alors } \|G\|^2 = \sum_{j=1}^n \|P_G(c_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\pi_G c_j\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\pi_G X w_j\|^2$$

Donc $K(G) = \sum_{j=1}^n \|\pi_G X \omega_j\|^2 = \sum_{j=1}^n (\epsilon_{\omega_j} {}^t(\pi_G X) \pi_G X \omega_j)$.

Pour $A = {}^t(\pi_G X) \pi_G X$. $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$A \omega_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A donc $\epsilon_{\omega_j} A \omega_j$ n'est autre que le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la diagonale de A . Ainsi $\sum_{j=1}^n \epsilon_{\omega_j} A \omega_j = \text{Tr}(A)$.

Alors $K(G) = \text{Tr}({}^t(\pi_G X) \pi_G X) = \text{Tr}(\pi_G X {}^t(\pi_G X)) = \Theta(\pi_G X, \pi_G X)$

Par conséquent $K(G) = \|\pi_G X\|^2$.

b) $X = (X - \pi_G X) + \pi_G X$. Montrons que les matrices $X - \pi_G X$ et $\pi_G X$ sont orthogonales pour Θ .

$$\Theta(X - \pi_G X, \pi_G X) = \text{Tr}((X - \pi_G X) {}^t(\pi_G X)) = \text{Tr}({}^t(\pi_G X)(X - \pi_G X)).$$

$$\Theta(X - \pi_G X, \pi_G X) = \text{Tr}({}^t X {}^t \pi_G (X - \pi_G X)) = \text{Tr}({}^t X {}^t \pi_G X - {}^t X {}^t \pi_G \pi_G X).$$

π_G est la matrice dans une base canonique de la projection orthogonale P_G .

Si $\mathcal{B}_1$ est une base canonique de G et $\mathcal{B}_2$ est une base canonique de $G^\perp$

1°. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base canonique de E

2° La matrice de P_G dans $\mathcal{B}$ est diagonale ($\forall u \in G, P_G(u) = u$ et $\forall v \in G^\perp, P_G(v) = 0$) donc symétrique.

Ainsi P_G est un endomorphisme symétrique de E . Sa matrice π_G dans la base canonique, est donc orthogonale, et donc symétrique. ${}^t \pi_G = \pi_G$.

De plus $P_G \circ P_G = P_G$ alors ${}^t \pi_G \pi_G = \pi_G^t = \pi_G$.

Par conséquent $\Theta(X - \pi_G X, X - \pi_G X) = \text{Tr}({}^t X {}^t \pi_G X - {}^t X {}^t \pi_G \pi_G X) = \text{Tr}({}^t X \pi_G X - {}^t X \pi_G X) = 0!$

$X = (X - \pi_G X) + \pi_G X$ et $X - \pi_G X$ et $\pi_G X$ sont orthogonaux pour Θ .

Alors, Pythagore, donne : $\|X\|^2 = \|X - \pi_G X\|^2 + \|\pi_G X\|^2$

Ainsi $\| \Pi_G X \| \leq \| X \| - \| X - \Pi_G X \|$, $K(G) = \| X \| - \| X - \Pi_G X \|$.

c) • Pour montrer que $K(G) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i$ il suffit de montrer que $\| X \| \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i$ et que $\| X - \Pi_G X \| \geq \sum_{i=p+1}^r \lambda_i$. Commençons par le second point.

Il nous reste, grâce à 2 et 3 b) si nous montrons que $\text{rg}(\Pi_G X) \leq p$.

$$\text{rg} \Pi_G X = \dim \text{Im } P_G \circ \phi_X = \dim P_G(\phi_X(\Pi_{H_1}(K)))$$

$$\phi_X(\Pi_{H_1}(K)) \subset E, \text{ donc } P_G(\phi_X(\Pi_{H_1}(K))) \subset P_G(E) = \text{Im } P_G = G$$

$$\text{Ainsi } \text{rg}(\Pi_G X) = \dim P_G(\phi_X(\Pi_{H_1}(K))) \leq \dim G = p$$

$$\text{Alors } \| X - \Pi_G X \|^2 \geq \sum_{i=p+1}^r \lambda_i.$$

$\| X \|^2 = \Theta(X, X) = \text{Tr}(X^t X) = \text{Tr}(V) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$ car vecteuriable $\tilde{e}$ la matrice diagonale $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ (qui n'est autre que la matrice de Π_V dans $e_1, e_2, \dots, e_p$).

$$\text{Ainsi } K(G) = \| X \|^2 - \| X - \Pi_G X \|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i - \| X - \Pi_G X \|^2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i - \sum_{i=p+1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

$$\underline{\underline{K(G) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i.}}$$

Parce

$$\bullet \forall G' = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p). \text{ Montrons que } P_{G'} = \sum_{i=1}^p \phi_{\pi_i}.$$

$$\forall k \in [1, p], \sum_{i=1}^p \phi_{\pi_i}(e_k) = \phi_{\pi_k}(e_k) = e_k = P_{G'}(e_k)$$

$$\forall k \in [p+1, r], \sum_{i=1}^p \phi_{\pi_i}(e_k) = 0_{E_p} = P_{G'}(e_k) \quad (\forall k \in [p+1, r], e_k \in G'^{\perp})$$

Ainsi $\sum_{i=1}^p \phi_{\pi_i}$ et $P_{G'}$ sont deux endomorphismes de E_p qui coïncident

$$\text{sur la base } (e_1, \dots, e_p) \text{ de } E_p. \sum_{i=1}^p \phi_{\pi_i} = P_{G'} \text{ donc } \sum_{i=1}^p \pi_i = \Pi_{G'}$$

$$\text{Alors } \pi_G' X = \sum_{i=1}^s \pi_i X = X_\Delta.$$

IV 93

$$\text{Par conséquent } K(G') = \|X\|^2 = \|X - \pi_G X\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \|X - X_\Delta\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i$$

1° si G est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à s : $K(G) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i$

2° $G' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ est de dimension s et coefficient égal à s et $K(G') = \sum_{i=1}^s \lambda_i$

Alors $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_s)) = \sum_{i=1}^s \lambda_i$ est le maximum des $K(G)$, puisque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E , dont la dimension est inférieure ou égale à s

d) 1^{er} Cas... $s \leq r-1$. Nous venons de prouver le résultat.

2^{ème} Cas... $s \geq r$. Soit G un sous-espace vectoriel de E , de dimension au

plus s . $K(G) = \|X\|^2 = \|X - \pi_G X\|^2 \leq \|X\|^2$

Prenons ici encore $G' = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$ et notons que $K(G') = \|X\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i$

une démonstration analogue à celle de c) montre sans difficulté que :

$$P_{G'} = \sum_{i=1}^s \phi_{\pi_i} \quad \text{Dac } \pi_{G'} = \sum_{i=1}^s \pi_i \quad \text{Pr}$$

$$\text{Alors } \pi_{G'} X = \sum_{i=1}^s \pi_i X = \sum_{i=1}^r \pi_i X = X. \text{ Alors } K(G') = \|X\|^2 = \|X - \pi_{G'} X\|^2 = \|X\|^2$$

$\uparrow$
 $\pi_i X = 0 \text{ pour } i > r \quad (\text{III 93})$

G' est donc un sous-espace vectoriel^{de E} de dimension s , donc au plus s et $K(G') = \|X\|^2$

Rappelons que si G est un sous-espace vectoriel de E , de dimension au plus s alors $K(G) \leq \|X\|^2$.

On trouve ainsi le résultat de c) avec $s \geq r$.

Finalement $\mu \in \mathbb{R}, \mu \geq 0$, $K(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)) = \sum_{i=1}^{r \wedge (d,r)} \lambda_i$ est le maximum des nombres $K(G)$ lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à r .

Partie VI. Non multa, sed mutum.

Q1) $K(\text{Vect}(e_1, e_2)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 90$

Q2) le nuage du dessin est le nuage des projections orthogonales des points du nuage initial sur le plan engendré par e_1 et e_2 .

Ce plan est celui qui donne la meilleure représentation à deux dimensions du nuage initial.
