HEC/ESSEC 2019

Éléments de correction

Première partie

1. La matrice A est non nulle et ses deux colonnes sont colinéaires ; elle est donc de rang 1. Le calcul donne $A^2 = A$ si bien que f est un projecteur. À ce titre, c'est un endomorphisme diagonalisable. Comme A est distincte de 0 et I_2, f admet 0 et 1 pour valeurs propres, et l'on montre que les sous-espaces propres qui leur sont respectivement associés sont les droites dirigées par $(1,1)$ et $(1,a)$.

2. On obtient

$$M = {}^tAA = \frac{1+a^2}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. Le calcul montre que $\operatorname{Ker} s_f = \operatorname{Ker} f$ et que s_f admet pour valeurs propres 0 et $2\frac{1+a^2}{(1-a)^2}$, les sous-espaces propres associés étant les droites respectivement dirigées par $(1,1)$ et $(1,-1)$.

3. Si s_f est un projecteur, nécessairement non nul, alors $\operatorname{Sp} s_f = \{0,1\}$ si bien que $2\frac{1+a^2}{(1-a)^2} = 1$ c'est-à-dire $a=-1$. Réciproquement, pour $a=-1$, $M = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ vérifie $M^2 = M$. Ainsi s_f est un projecteur si, et seulement si, $a=-1$.

Deuxième partie

4. a. Par définition, $C = {}^tAB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ a pour coefficient générique

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,j}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

d'où l'expression de

$$\operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Remarque. Les expressions obtenues ci-dessus pour $(A,B) = ({}^tM, N)$ et $(A,B) = ({}^tN, M)$ sont égales. On retiendra donc la propriété utile pour la suite :

$$\forall M,N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM).$$

b. On reconnaît dans l'expression obtenue en **a.** le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

c. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall M,N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\operatorname{tr}({}^tMN)| = \left|(M\,|\,N)\right| \leqslant \|M\|_2\,\|N\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)}\sqrt{\operatorname{tr}({}^tNN)}.$$

En l'appliquant à $M = A$ et $N = {}^tA$, qui partagent la même norme d'après l'expression obtenue en **a.**, il vient :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr} A^2 \leqslant \left|\operatorname{tr} A^2\right| \leqslant \operatorname{tr}({}^tAA).$$

L'égalité a bien sûr lieu pour $A = 0$. Dans le cas $A \neq 0$, si l'égalité a lieu, alors la famille $({}^tA, A)$ est liée d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tA = \lambda A$. On a alors $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}({}^tAA) = \lambda \operatorname{tr} A^2 = \lambda\,\|A\|_2^2$, d'où l'on tire $\lambda = 1$ car $\|A\|_2 > 0$, si bien que ${}^tA = A$. La réciproque étant immédiate, l'égalité est réalisée si, et seulement si, A est symétrique.

5. a. La formule de changement de base s'écrit $A' = P^{-1}AP$.

b. La matrice P est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormales.

c. D'après **a.** et **b.**, $A' = {}^tPAP$ d'où ${}^tA' = {}^tP{}^tAP = P^{-1}{}^tAP$. Puisque l'endomorphisme f^* est représenté par ${}^tA$ en base $\mathcal{B}_0$, il est donc représenté par la matrice ${}^tA'$ en base $\mathcal{B}$, de nouveau d'après la formule de changement de base.

6. a. Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2$ en identifiant $AX \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à un élément de $\mathbb{R}^n$.

b. Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0$ entraîne ${}^tAAX = 0$ et réciproquement ${}^tAAX = 0$ entraîne ${}^tX{}^tAAX = 0$ c'est-à-dire $\|AX\|^2 = 0$ et donc $AX = 0$ d'après **a.**. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} s_f$ puis, d'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes f et s_f de $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{rg} f = n - \dim(\operatorname{Ker} f) = n - \dim(\operatorname{Ker} s_f) = \operatorname{rg} s_f$.

c. L'endomorphisme s_f est représenté en base orthonormale $\mathcal{B}_0$ par la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ symétrique ; il est donc symétrique.

d. Étant donnée une valeur propre λ de s_f, il existe $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^t\mathrm{AAX} = \lambda\mathrm{X}$, et l'on a alors ${}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{AAX} = \lambda{}^t\mathrm{XX}$ où ${}^t\mathrm{XX} = \|\mathrm{X}\|^2 > 0$, si bien que $\lambda = \frac{\|\mathrm{AX}\|^2}{\|\mathrm{X}\|^2} \geqslant 0$ d'après **a.**.

e. D'après le théorème spectral appliqué à l'endomorphisme s_f, symétrique d'après **c.**, il existe une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s_f. Dans une telle base, s_f est représenté par une matrice diagonale de rang $\operatorname{rg} s_f = r$ d'après **b.**, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de s_f : $n-r$ d'entre eux sont donc nuls et les autres sont strictement positifs d'après **d.**. Quitte à réordonner les vecteurs de la base $\mathcal{C}$, l'endomorphisme s_f y est donc représenté par une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où $\mathrm{D} \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

f. Les vecteurs $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ forment une base de $\operatorname{Ker} s_f = \operatorname{Ker} f$ d'après **b.** et **e.**, si bien que la matrice représentative de f en base $\mathcal{C}$ est de la forme $\mathrm{A}' = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ \mathrm{A}_3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\mathrm{A}_1 \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_3 \in \mathbf{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$. En comparant ${}^t\mathrm{A}'\mathrm{A}' = \left(\begin{smallmatrix} {}^t\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1 + {}^t\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ à la matrice obtenue en **e.**, qui représentent toutes deux l'endomorphisme s_f en base $\mathcal{C}$ d'après **5.c.**, on obtient ${}^t\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1 + {}^t\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3 = \mathrm{D}$.

7. a. De l'égalité ${}^t({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, on déduit que $(f^*)^* = f$. Par suite, $\tau_f = s_{f^*}$ d'où, d'après **6.b.** appliqué à f et f^*, sachant par ailleurs que $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} {}^t\mathrm{A}$, $\operatorname{rg} \tau_f = \operatorname{rg} s_{f^*} = \operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} s_f$. Il en résulte, d'après le théorème du rang, que $\dim(\operatorname{Ker} \tau_f) = \dim(\operatorname{Ker} s_f)$.

b. Soient $\lambda \neq 0$ une valeur propre de s_f et x un vecteur propre associé. On a $f^*\big(f(x)\big) = \lambda x \neq 0$ d'où $f(x) \neq 0$ et $\tau_f\big(f(x)\big) = f \circ f^*\big(f(x)\big) = \lambda f(x)$. Ainsi λ est aussi valeur propre de τ_f et $f(x)$ en est un vecteur propre associé à λ.
Il en résulte que f induit une application linéaire injective de $\mathrm{E}_\lambda(s_f)$ dans $\mathrm{E}_\lambda(\tau_f)$, d'où l'on déduit que $\dim \mathrm{E}_\lambda(s_f) \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(\tau_f)$.

c. L'endomorphisme $\tau_f = s_{f^*}$ est symétrique d'après **6.** ; il existe donc une base orthonormale $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de τ_f.
En appliquant le résultat établi en **b.** à f^*, on obtient l'implication et les inégalités réciproques de celles déjà obtenues sachant que $s_{f^*} = \tau_f$ et $\tau_{f^*} = s_f$: toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de τ_f est aussi valeur propre de s_f avec $\dim \mathrm{E}_\lambda(\tau_f) \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(s_f)$. En conclusion, les endomorphismes s_f et τ_f présentent les mêmes valeurs propres et, pour chacune de ces valeurs propres (y compris éventuellement 0 d'après **a.**), $\dim \mathrm{E}_\lambda(s_f) = \dim \mathrm{E}_\lambda(\tau_f)$.
Remarque. On parvient à la même conclusion en écrivant que toutes les inégalités sont nécessairement des égalités dans la chaîne d'inégalités

$$n \geqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} \tau_f} \dim \mathrm{E}_\lambda(\tau_f) \geqslant \dim \mathrm{E}_0(\tau_f) + \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp} s_f \\ \lambda \neq 0}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\tau_f) \geqslant \dim \mathrm{E}_0(s_f) + \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp} s_f \\ \lambda \neq 0}} \dim \mathrm{E}_\lambda(s_f) = n.$$

d. En notant P (resp. Q) une matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$), on a $\mathrm{P}^{-1}({}^t\mathrm{AA})\mathrm{P} = \mathrm{Q}^{-1}(\mathrm{A}{}^t\mathrm{A})\mathrm{Q}$ d'après **c.**, quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{C}'$. Par suite, $\mathrm{A}{}^t\mathrm{A} = \Omega^{-1}({}^t\mathrm{AA})\Omega$ pour $\Omega = \mathrm{QP}^{-1} \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$.
Enfin, P et Q sont orthogonales car les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthonormales, si bien que $\Omega = \mathrm{Q}{}^t\mathrm{P}$ aussi : ${}^t\Omega\Omega = \mathrm{P}{}^t\mathrm{QQ}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$, de sorte que $\mathrm{A}{}^t\mathrm{A} = {}^t\Omega({}^t\mathrm{AA})\Omega$.

8. a. La partie $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ est fermée comme intersection du fermé $\mathcal{V}$ avec l'hyperplan fermé $\mathcal{H}$ d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Elle est également bornée car $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}$ implique $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si bien que $\mathcal{W}$ est inclus dans la boule fermée $\mathcal{B}(0, \sqrt{n})$.

b. La fonction φ, continue car polynomiale sur la partie $\mathcal{W}$ fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$, y est bornée et atteint ses bornes. Elle y admet donc un maximum global M. Soit $a \in \mathcal{W}$ tel que $\mathrm{M} = \varphi(a)$.

c. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$, de sorte que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

d. Si on avait $a \notin \mathcal{U}$, alors on aurait $\mathrm{M} = \varphi(a) = 0$ si bien que φ, par ailleurs positive ou nulle sur $\mathcal{W}$, y serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. C'est donc que $a \in \mathcal{U}$ et M est donc maximum de φ sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{H}$, c'est-à-dire maximum de φ sur $\mathcal{U}$ sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

e. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ avec :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}, \quad \nabla\varphi(x) = \Big(\prod_{i \neq 1} x_i, \dots, \prod_{i \neq n} x_i\Big) = \varphi(x)\Big(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\Big).$$

La contrainte $\mathcal{H}$ définie par l'équation $x_1+\cdots+x_n=1$ est linéaire, dirigée par l'hyperplan vectoriel $\mathcal{H}_0$ d'équation $x_1+\cdots+x_n=0$. Puisque la fonction φ admet au point a un extremum sous la contrainte $\mathcal{H}$, on a :

$$\begin{cases} a\in\mathcal{H} \\ \nabla\varphi(a)\in\mathcal{H}_0^{\perp}=\mathrm{Vect}(1,\dots,1)\end{cases} \iff \begin{cases} a_1+\cdots+a_n=1 \\ a_1=\cdots=a_n\end{cases}.$$

Par suite, $a=\frac{1}{n}(1,\dots,1)$ et $\mathrm{M}=\varphi(a)=\frac{1}{n^n}$.

f. Le cas $\mu_1=\cdots=\mu_n=0$ étant évident, on peut supposer $\operatorname{tr}\mathrm{S}=\mu_1+\cdots+\mu_n>0$. On a alors $\mu^*=\frac{1}{\operatorname{tr}\mathrm{S}}(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathcal{W}$ si bien, d'après **b.** et **e.**, que $\varphi(\mu^*)=\frac{\varphi(\mu)}{(\operatorname{tr}\mathrm{S})^n}\leqslant\mathrm{M}$ i.e.

$$\prod_{i=1}^n\mu_i\leqslant\left(\frac{\operatorname{tr}\mathrm{S}}{n}\right)^n$$

avec égalité si, et seulement si, $\mu^*=a$, ce qui équivaut à $\mu_1=\cdots=\mu_n$ ou encore à l'existence d'un réel λ tel que S soit semblable à $\lambda\mathrm{I}_n$ c'est-à-dire $\mathrm{S}=\lambda\mathrm{I}_n$.

g. Il suffit d'appliquer le résultat de la question **f.** à la matrice symétrique $\mathrm{S}=x\mathrm{I}_n+{}^t\mathrm{AA}$, dont $(x+\lambda_1,\dots,x+\lambda_n)$ est une liste étendue de valeurs propres, toutes positives ou nulles d'après **6.d.** :

$$\prod_{i=1}^n(x+\lambda_i)\leqslant\left(\frac{\operatorname{tr}(x\mathrm{I}_n+{}^t\mathrm{AA})}{n}\right)^n=\left(x+\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n.$$

Troisième partie

9. a. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n=\operatorname{Im}f\oplus\operatorname{Ker}f$, f est représenté par la matrice $\mathrm{A}_0=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{I}_r&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Puisque deux matrices représentatives de f sont semblables donc partagent la même trace, chacune d'elle a pour trace $\operatorname{tr}\mathrm{A}_0=r$.

b. La relation $f^2=f$ s'écrit matriciellement $\mathrm{A}'^2=\mathrm{A}'$ en base $\mathcal{C}$ i.e.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1^2 & 0\\ \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1 & 0\\ \mathrm{A}_3 & 0\end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{A}_1^2=\mathrm{A}_1$. On a par ailleurs $\operatorname{tr}\mathrm{A}_1=\operatorname{tr}\mathrm{A}'=r$ d'après **a.**. Ainsi A_1 représente un projecteur de $\mathbb{R}^r$ de rang $\operatorname{tr}\mathrm{A}_1=r$ d'après **a.**, c'est-à-dire $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^r}$, ce qui s'écrit matriciellement $\mathrm{A}_1=\mathrm{I}_r$.

c. D'après **4.c.** et **a.**, $\operatorname{tr}({}^t\mathrm{AA})\leqslant\operatorname{tr}\mathrm{A}^2=\operatorname{tr}\mathrm{A}=r$. D'après **6.f.** et **b.**, $\mathrm{D}={}^t\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1+{}^t\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3=\mathrm{I}_n+{}^t\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3$. Les valeurs propres $\lambda\neq0$ de ${}^t\mathrm{AA}$ étant les valeurs propres de D, ce sont les réels tels que $\lambda-1$ soit valeur propre de ${}^t\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3$; on a alors $\lambda-1\geqslant0$ i.e. $\lambda\geqslant1$ d'après **6.d.** (également valable pour une matrice A_3 rectangulaire).

d. Puisque $r=\operatorname{tr}\mathrm{A}=\operatorname{tr}\mathrm{A}^2$ d'après **a.**, la relation $\operatorname{tr}({}^t\mathrm{AA})=r$ traduit le cas d'égalité dans l'inégalité de la question **4.c.**. Elle a donc lieu si, et seulement si, A est symétrique, ce qui signifie que le projecteur f est orthogonal.

En conclusion (en imaginant une petite maladresse dans l'énoncé), les projecteurs f réalisant l'égalité $\operatorname{tr}({}^t\mathrm{AA})=r$ sont les projecteurs orthogonaux.

10. a. Il vient $({}^t\mathrm{AA})(\mathrm{A}{}^t\mathrm{A})={}^t\mathrm{A}(\mathrm{A}^2){}^t\mathrm{A}={}^t\mathrm{A}^2=\mathrm{I}_n$, si bien que ${}^t\mathrm{AA}$ est inversible à droite donc inversible, d'inverse $({}^t\mathrm{AA})^{-1}=\mathrm{A}{}^t\mathrm{A}$.

b. Soit λ une valeur propre de ${}^t\mathrm{AA}$. Puisque cette dernière matrice est inversible d'après **a.**, on a nécessairement $\lambda\neq0$. Pour $\mathrm{X}\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$({}^t\mathrm{AA})\mathrm{X}=\lambda\mathrm{X}\iff\frac{1}{\lambda}\mathrm{X}=({}^t\mathrm{AA})^{-1}\mathrm{X}\iff(\mathrm{A}{}^t\mathrm{A})\mathrm{X}=\frac{1}{\lambda}\mathrm{X}.$$

Le réel $\frac{1}{\lambda}$ est donc valeur propre de $\mathrm{A}{}^t\mathrm{A}$, avec $\mathrm{E}_\lambda({}^t\mathrm{AA})=\mathrm{E}_{1/\lambda}(\mathrm{A}{}^t\mathrm{A})$ d'où, d'après **7.c.**, valeur propre de ${}^t\mathrm{AA}$ avec $\dim\mathrm{E}_\lambda({}^t\mathrm{AA})=\dim\mathrm{E}_{1/\lambda}({}^t\mathrm{AA})$.

c. Une brave étude de la fonction $x\longmapsto x+\frac{1}{x}$ montre que celle-ci est décroissante sur $]0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$, donc minimale en 1, d'où le résultat.

d. Il ressort de la question **b.** que dans la liste étendue $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de valeurs propres de ${}^t\mathrm{AA}$, toutes strictement positives d'après **6.d.** et **a.**, chaque valeur propre λ apparaît autant de fois que la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. On en déduit que $\prod_{i=1}^n\lambda_i=1$, ce qui permet de conclure en s'appuyant sur la question **c.** :

$$\prod_{i=1}^n(1+\lambda_i)=\prod_{i=1}^n\sqrt{\lambda_i}\prod_{i=1}^n\left(\sqrt{\lambda_i}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\geqslant2^n.$$

e. Dans le raisonnement ci-dessus, l'égalité est réalisée si, et seulement si, $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ d'après **c.**, ce qui équivaut à ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ puisque ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est diagonalisable, c'est-à-dire à $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$ ou encore à $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}$ puisque $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$. Comme A est la matrice représentative de f en base orthonormale, la condition précédente signifie que l'endomorphisme f est symétrique. Il est dans ce cas nécessaire que les sous-espaces propres $\mathrm{E}_1(f)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f)$ soient orthogonaux. Réciproquement, s'ils le sont, étant par ailleurs supplémentaires, alors f est représentée dans une base orthonormale adaptée par la matrice symétrique $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{I}_d & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-d} \end{smallmatrix}\right)$ où $d = \dim \mathrm{E}_1(f)$, si bien que f est symétrique.
En conclusion, l'égalité $\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) = 2^n$ est réalisée si, et seulement si, les sous-espaces $\mathrm{E}_1(f)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Quatrième partie

11. La matrice ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi 0 ne figure pas parmi les valeurs propres de s_f, qui sont donc toutes strictement positives d'après **6.d.**. Le théorème spectral s'applique alors à l'endomorphisme s_f, symétrique d'après **6.c.** : il existe une base orthonormale $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s_f ; en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, strictement positives comme on vient de le voir, on a donc $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
On définit alors un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ par la donnée des images $v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, des vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Cet endomorphisme est symétrique car il est représenté par la matrice symétrique $\mathrm{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$ en base orthonormale $\mathcal{C}$ et ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ sont positives ou nulles. Enfin, les endomorphismes v^2 et s_f sont égaux car ils coïncident sur les vecteurs de la base $\mathcal{C}$: pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v^2(\varepsilon_i) = v\big(\sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i\big) = \lambda_i \varepsilon_i = s_f(\varepsilon_i)$.

12. Soit μ une valeur propre de w. Pour $x \in \mathrm{E}_\mu(w)$, on a $s_f(x) = w\big(w(x)\big) = w(\mu x) = \mu^2 x$ i.e. $x \in \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$, si bien que $\mathrm{E}_\mu(w) \subset \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$.
Par suite, sachant que les valeurs propres de w sont positives par hypothèse,

$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\, w} \dim \mathrm{E}_\mu(w) \leqslant \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\, w} \dim \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, s_f} \dim \mathrm{E}_\lambda(s_f),$$

où les deux sommes extrémales sont égales à n puisque les endomorphismes w et s_f, symétriques, sont diagonalisables. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc des égalités, si bien que les valeurs propres de w sont les racines de celles de s_f (aucun terme n'a été oublié en passant de l'avant dernière à la dernière somme car les éventuels termes manquants seraient supérieurs ou égaux à 1) et, pour chaque valeur propre μ de w, $\dim \mathrm{E}_\mu(w) = \dim \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$; avec l'inclusion précédente, on en déduit que $\mathrm{E}_\mu(w) = \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$.

13. L'existence a été justifiée en **11.**. Quant à l'unicité, elle est apportée par le résultat de la question **12.**, qui montre que le comportement d'un tel endomorphisme est imposé sur chacun des sous-espaces supplémentaires $\mathrm{E}_\lambda(s_f)$: il y agit comme l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$.
La question **12.** fait également apparaître que toute base orthonormale formée de vecteurs propres de s_f est également formée de vecteurs propres de v, qui y est donc représenté par une matrice diagonale.

14. C'est la reformulation matricielle du résultat précédent.

15. On raisonne par analyse-synthèse.
Soit (Ω, S) un couple solution. On a alors ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = {}^t\mathrm{S}\,{}^t\Omega\Omega\mathrm{S} = \mathrm{S}^2$ d'où, comme ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ et S sont symétriques à valeurs propres positives, $\mathrm{S} = \sqrt{{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}}$ d'après **14.**, inversible d'après **11.**, puis $\Omega = \mathrm{A}\mathrm{S}^{-1}$.
Réciproquement, la matrice ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ étant symétrique à valeurs propres positives, la matrice $\mathrm{S} = \sqrt{{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}}$ est bien définie d'après **14.** et inversible car 0 n'en est pas valeur propre d'après **11.**, si bien que $\Omega = \mathrm{A}\mathrm{S}^{-1}$ est bien définie. Il ne reste plus qu'à vérifier que Ω est orthogonale, or

$${}^t\Omega\Omega = {}^t\mathrm{S}^{-1}\,{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n,$$

d'où le résultat.

Cinquième partie

16. Le réel $d(\mathrm{M})$ est bien défini comme borne inférieure d'une partie non vide et minorée par 0 de $\mathbb{R}$.

17. Soit $\mathrm{R} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $\mathrm{N} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\mathrm{RN}\|_2^2 = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{N}{}^t\mathrm{RRN}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{NN}) = \|\mathrm{N}\|_2^2$$

et de même $\|\mathrm{NR}\|_2 = \|\mathrm{N}\|_2$.
Ayant établi en **7.d.** qu'un produit de matrices orthogonales est orthogonal, et remarquant sans peine que l'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale, les applications $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{VR}^{-1}$ et $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{R}^{-1}\mathrm{V}$ sont bien définies sur $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Elles admettent respectivement pour réciproques les applications $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{VR}$ et $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{RV}$, et sont donc bijectives.
Par suite,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{RM}) &= \inf_{\mathrm{V}\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{RM}-\mathrm{V}\|_2 = \inf_{\mathrm{V}\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \left\|\mathrm{R}(\mathrm{M}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{V})\right\|_2 \\ &= \inf_{\mathrm{V}\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \left\|\mathrm{M}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{V}\right\|_2 = \inf_{\mathrm{W}\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{M}-\mathrm{W}\|_2 = d(\mathrm{M}) \end{aligned}$$

et de même $d(\mathrm{MR}) = d(\mathrm{M})$.

18. On a successivement, d'après **17.**, $d(\mathrm{A}) = d(\Omega\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}) = d(\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}) = d(\mathrm{D}{}^t\mathrm{P}) = d(\mathrm{D})$ car les matrices Ω, P et ${}^t\mathrm{P}$ sont orthogonales.

19. **a.** La matrice W est symétrique réelle donc diagonalisable.

b. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle w(x)\,|\,x\rangle = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{WX} = \frac{1}{2}({}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{VX} + {}^t\mathrm{XVX}) = \frac{1}{2}\big(\langle v(x)\,|\,x\rangle + \langle x\,|\,v(x)\rangle\big) = \langle v(x)\,|\,x\rangle$$

et

$$\|v(x)\|^2 = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{VVX} = {}^t\mathrm{XX} = \|x\|^2$$

puisque V est orthogonale. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\big|\langle w(x)\,|\,x\rangle\big| = \big|\langle v(x)\,|\,x\rangle\big| \leqslant \|v(x)\|\,\|x\| = \|x\|^2$$

d'où l'on tire :

$$\langle x - w(x)\,|\,x\rangle = \|x\|^2 - \langle w(x)\,|\,x\rangle \geqslant \|x\|^2 - \big|\langle w(x)\,|\,x\rangle\big| \geqslant 0.$$

c. Étant donnés une valeur propre λ de $\mathrm{id}-w$ et un vecteur propre x associé, on a $\langle(\mathrm{id}-w)(x)\,|\,x\rangle = \lambda\,\|x\|^2$ d'où

$$\lambda = \frac{\langle x - w(x)\,|\,x\rangle}{\|x\|^2} \geqslant 0$$

d'après **b.** car $\|x\|^2 > 0$.

d. En appliquant la dernière inégalité établie en **b.** au vecteur $x = e_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient $1 - w_{i,i} = \langle e_i - w(e_i)\,|\,e_i\rangle \geqslant 0$.

e. Si $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{W}$ admet une trace nulle, par ailleurs égale à la somme de ses valeurs propres d'après **a.**, toutes positives ou nulles d'après **c.**, et donc toutes nulles. La matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{W}$ se retrouve alors semblable à la matrice nulle donc nulle : $\mathrm{W} = \mathrm{I}_n$.
Remarque. Une analyse fine du raisonnement de la question **b.** montre que le cas d'égalité conduit à $\mathrm{V} = \mathrm{I}_n$ (puis $\mathrm{W} = \mathrm{I}_n$).

20. **a.** Pour $\mathrm{V} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, il vient :

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}-\mathrm{V}\|_2^2 - \|\mathrm{D}-\mathrm{I}_n\|_2^2 &= \big((\mathrm{D}-\mathrm{V}) - (\mathrm{D}-\mathrm{I}_n)\,\big|\,(\mathrm{D}-\mathrm{V}) + (\mathrm{D}-\mathrm{I}_n)\big) \\ &= 2\,(\mathrm{I}_n - \mathrm{V}\,|\,\mathrm{D}) - (\mathrm{I}_n - \mathrm{V}\,|\,\mathrm{I}_n + \mathrm{V}) \end{aligned}$$

où $(\mathrm{I}_n - \mathrm{V}\,|\,\mathrm{I}_n + \mathrm{V}) = \|\mathrm{I}_n\|_2^2 - \|\mathrm{V}\|_2^2 = 0$ car V est orthogonale. Par suite,

$$\|\mathrm{D}-\mathrm{V}\|_2^2 - \|\mathrm{D}-\mathrm{I}_n\|_2^2 = 2\,(\mathrm{I}_n - \mathrm{W}\,|\,\mathrm{D}) + 2\,(\mathrm{W}-\mathrm{V}\,|\,\mathrm{D}) = 2\,(\mathrm{I}_n - \mathrm{W}\,|\,\mathrm{D})$$

car $2\,(\mathrm{W}-\mathrm{V}\,|\,\mathrm{D}) = ({}^t\mathrm{V}-\mathrm{V}\,|\,\mathrm{D}) = 0$ puisque ${}^t\mathrm{V}-\mathrm{V}$ est antisymétrique alors que D est symétrique :

$$({}^t\mathrm{V}-\mathrm{V}\,|\,\mathrm{D}) = -\,\mathrm{tr}\big(({}^t\mathrm{V}-\mathrm{V})\mathrm{D}\big) = -\,\mathrm{tr}\big(\mathrm{D}({}^t\mathrm{V}-\mathrm{V})\big) = -\,(\mathrm{D}\,|\,{}^t\mathrm{V}-\mathrm{V}) = 0.$$

b. En notant $\mu_1, \dots, \mu_n$ les coefficients diagonaux de D, strictement positifs d'après **18.**, on a :

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{W}\,|\,\mathrm{D}) = \sum_{i=1}^{n}(1 - w_{i,i})\mu_i \geqslant 0$$

d'après **19.d.**, si bien que d'après **a.** :

$$\forall \mathrm{V} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \quad \|\mathrm{D} - \mathrm{I}_n\|_2 \leqslant \|\mathrm{D} - \mathrm{V}\|_2$$

avec égalité si, et seulement si, $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, i.e. $\mathrm{W} = \mathrm{I}_n$ d'après **19.e.**.

c. Il ressort de la question **b.** que :

$$d(\mathrm{D}) = \inf_{\mathrm{V} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{D} - \mathrm{V}\|_2 = \|\mathrm{D} - \mathrm{I}_n\|_2 .$$

On peut alors conclure d'après **18.** :

$$d(\mathrm{A}) = d(\mathrm{D}) = \|\mathrm{P}(\mathrm{D} - \mathrm{I}_n)^t\mathrm{P}\|_2 = \|\mathrm{S} - \mathrm{I}_n\|_2 = \left\|\sqrt{{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n\right\|_2.$$

Si $\mathrm{V} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ vérifie $d(\mathrm{A}) = \|\mathrm{D} - \mathrm{V}\|_2$, on a déjà signalé en **b.** que $\mathrm{W} = \mathrm{I}_n$, d'où l'on tire

$$\|\mathrm{I}_n - \mathrm{V}\|_2^2 = \|\mathrm{I}_n\|_2^2 - 2\,(\mathrm{I}_n|\mathrm{V}) + \|\mathrm{V}\|_2^2 = 2\,\|\mathrm{I}_n\|_2^2 - (\mathrm{I}_n|\mathrm{V}) - (\mathrm{V}|\mathrm{I}_n) = 2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{I}_n - 2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{W} = 0$$

si bien que $\mathrm{V} = \mathrm{I}_n$.