

(Q1) a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice n dans $\mathcal{B}$.

→ L'ensemble des valeurs propres de f_n est $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$

→ Pour tout i dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ le sous-espace propre $\text{SEP}(f_n, \lambda_i)$ de f_n associé à la valeur propre λ_i est de dimension n_i .

→ $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^q \text{SEP}(f_n, \lambda_i)$ car f_n est diagonalisable.

Pour tout i dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ considérons une base $\mathcal{B}_i$ de $\text{SEP}(f_n, \lambda_i)$.

Alors $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_q$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de f_n dans $\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale par blocs $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_q \end{pmatrix}$ où pour tout i dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ $D_i = \lambda_i I_{n_i}$ où I_{n_i} est la matrice identité de $M_{n_i}(\mathbb{R})$.

n et 0 sont semblables car ce sont deux matrices de f_n .

Ainsi $\text{tr}(n) = \text{tr}(D)$. Or $\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^q \text{tr}(D_i) = \sum_{i=1}^q \text{tr}(\lambda_i I_{n_i}) = \sum_{i=1}^q \lambda_i \text{tr}(I_{n_i})$

Or $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\text{tr}(I_{n_i}) = n_i$. Donc $\text{tr}(n) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^q \lambda_i n_i$.

Finalement : $\text{tr}(n) = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i$

b) Reprenons les notations de a). n et 0 sont semblables donc il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $0 = P^{-1} n P$.

Alors $0^2 = (P^{-1} n P)^2 = P^{-1} n^2 P$. Par conséquent n^2 et 0^2 sont semblables.

Ainsi $\text{tr}(n^2) = \text{tr}(0^2)$. Or $0^2 = \begin{pmatrix} 0_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0_q^2 \end{pmatrix}$.

Donc $\text{tr}(n^2) = \text{tr}(0^2) = \sum_{i=1}^q \text{tr}(0_i^2) = \sum_{i=1}^q \text{tr}(\lambda_i^2 I_{n_i}) = \sum_{i=1}^q \lambda_i^2 \text{tr}(I_{n_i})$.

$\text{tr}(n^2) = \sum_{i=1}^q \lambda_i^2 n_i = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i^2$.

Pour $\pi = (\alpha_{ij})$ et $\pi' = (\alpha'_{ij})$, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$ et $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} \alpha_{kj}$.

$$\text{tr}(\pi\pi') = \sum_{j=1}^n \alpha_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha'_{jk} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \alpha'_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha'_{kj} \alpha_{jk}$$

$$\text{Ainsi on a : } \text{tr}(\pi\pi') = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha'_{kj} \alpha_{jk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha'_{kj} \alpha_{jk}$$

Rappelons que π est symétrique alors $\pi = \pi'$. ce qui précède permet alors

$$\text{de dire que : } \text{tr}(\pi\pi) = \text{tr}(\pi^2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2.$$

Q2) a) On suppose que Z est définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \dots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \dots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix}$

où pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, $Z_{i,j}$ est une

variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Dans la suite on s'intéressera à une $Z = (Z_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$.

Z possède une espérance ce qui signifie que pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, $E(Z_{i,j})$ existe.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$. Notons que $AZ \in \Pi_r(\mathbb{R})$

$$\forall \omega \in \Omega, (AZ)(\omega) = A Z(\omega) = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} Z_{k,j}(\omega) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$$

$$\text{Pour une } i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, Z'_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} Z_{k,j}$$

$$1) \quad \forall \omega \in \Omega, (AZ)(\omega) = (Z'_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$$

2) Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $Z'_{i,j}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

3) Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $Z'_{i,j}$ possède une espérance comme combinaison linéaire de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ qui possède une espérance.

$$4) \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, E(Z'_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} E(Z_{k,j}) \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

Ainsi peut-on dire que $\rightarrow AZ$ est une mesure aléatoire qui possède une espérance.

$$\rightarrow E(AZ) \text{ est la matrice } \left(\sum_{\ell=1}^r a_{\ell j} E(Z_{\ell,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \text{ de } M_r(\mathbb{R}).$$

$$\text{Or } A E(Z) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \times (E(Z_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} = \left(\sum_{\ell=1}^r a_{\ell i} E(Z_{\ell,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}.$$

Ainsi AZ possède une (matrice) espérance et $E(AZ) = A E(Z)$.

Remarque... Le résultat vaut aussi si $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ où $p \in \mathbb{N}^0$... nous a, avant nous!

Nous posons $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq q}}$. Z est toujours $(Z_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$.

$$\forall \omega \in \Omega, (ZB)(\omega) = Z(\omega)B = (Z_{ij}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq q}} = \left(\sum_{\ell=1}^r Z_{i,\ell}(\omega) b_{\ell,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

$$\text{Pour } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, Z''_{i,j} = \sum_{\ell=1}^r b_{\ell,j} Z_{i,\ell}. \quad ZB = (Z''_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

$$\text{Alors si } \forall \omega \in \Omega, (ZB)(\omega) = (Z''_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

et pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $Z''_{i,j}$ est une variable aléatoire mu qui possède une espérance.
 (i, ℓ, j) comme combinaison linéaire de variables aléatoires mu (i, ℓ, j) qui possèdent une espérance.

$$\text{si } \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, E(Z''_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^r b_{\ell,j} E(Z_{i,\ell}) = \sum_{\ell=1}^r E(Z_{i,\ell}) b_{\ell,j}.$$

Ainsi peut-on dire que • ZB est une mesure aléatoire ayant n lignes et q colonnes

• ZB possède une (matrice) espérance

$$\bullet E(ZB) = (E(Z''_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = \left(\sum_{\ell=1}^r E(Z_{i,\ell}) b_{\ell,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} = E(Z)B$$

Ainsi ZB possède une (matrice) espérance et $E(ZB) = E(Z)B$.

b) soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance

$$Z = (Z_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \text{ où, pour tout } (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, Z_{ij} \text{ est une variable}$$

aléatoire sur $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mu)$ qui possède une espérance.

Pour $\forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \hat{Z}_{ij} = Z_{ji}$

${}^tZ = (\hat{Z}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$ et pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \hat{Z}_{ij} = Z_{ji}$ est une

variable aléatoire sur $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mu)$ qui possède une espérance.

Alors tZ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes qui possède une (matrice) espérance.

$$E({}^tZ) = (E(\hat{Z}_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} = (E(Z_{ji}))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} = {}^tE(Z).$$

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une (matrice) espérance alors tZ est une matrice aléatoire à r lignes et n colonnes ayant une (matrice) espérance et $E({}^tZ) = {}^tE(Z) \dots$ ce qui répond largement à la question !

Reprenons les notations et les hypothèses précédentes en supposant que $r = n$. Z est alors une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes.

$\text{tr}(Z) = \sum_{i=1}^n Z_{ii}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Z_{ii}$ est une variable aléatoire sur $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mu)$ qui possède une espérance.

Alors $E(\text{tr}(Z))$ existe et vaut $\sum_{i=1}^n E(Z_{ii})$.

Rappelons que $E(Z)$ existe et que $E(Z) = (E(Z_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Alors $\text{tr}(E(Z)) = \sum_{i=1}^n E(Z_{ii}) = E(\text{tr}(Z))$.

Si Z est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes qui possède une (matrice) espérance, $E(\text{tr}(Z))$ existe et $E(\text{tr}(Z)) = \text{tr}(E(Z))$.

Q3) Noter que les formules qui suivent sont assez simples à établir mais il convient de justifier l'existence des variances et des espérances qui interviennent.

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ possède une (matrice) espérance et une matrice-covariance

$V(Y) = E((Y - E(Y))^t (Y - E(Y)))$. Avant de commencer détailler un peu cela.

$$Y - E(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 - E(Y_1) \\ \vdots \\ Y_n - E(Y_n) \end{pmatrix} \text{ d'où } {}^t(Y - E(Y)) = (Y_1 - E(Y_1) \dots Y_n - E(Y_n)).$$

Alors $(Y - E(Y))^t (Y - E(Y))$ est la matrice aléatoire $((Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$.

$V(Y)$ existe d'ac l'espérance de cette matrice aléatoire $\otimes k$.

Cela signifie que $E((Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j)))$ existe pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Pour conclure $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\text{cov}(Y_i, Y_j)$ existe. En particulier pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V(Y_i) = \text{cov}(Y_i, Y_i)$ existe.

Noter aussi que : $V(Y) = E((Y - E(Y))^t (Y - E(Y))) = (\text{cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ ce qui n'est pas un scop .

o) $Y^t Y$ est la matrice aléatoire $(Y_i Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E(Y_i Y_j)$ existe car Y_i et Y_j possèdent une variance d'ac un moment d'ordre 2. Alors $Y^t Y$ possède une (matrice) espérance qui est

$$(E(Y_i Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y_i)$ existe d'ac $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ et ${}^t Y = (Y_1 \dots Y_n)$ sont deux matrices aléatoires qui possèdent une (matrice) espérance.

Noter que $E(Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{pmatrix}$ et $E({}^t Y) = (E(Y_1) \dots E(Y_n))$.

$$\text{Alors } E(Y) E({}^t Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{pmatrix} (E(Y_1) \dots E(Y_n)) = (E(Y_i) E(Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

$$\text{Ainsi } E(Y^t Y) - E(Y) E({}^t Y) = (E(Y_i Y_j))_{1 \leq i, j \leq n} - (E(Y_i) E(Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$E(Y^t Y) - E(Y) E({}^t Y) = (E(Y_i Y_j) - E(Y_i) E(Y_j))_{1 \leq i, j \leq n} = (\text{cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leq i, j \leq n} = V(Y).$$

$$\underline{\underline{V(Y) = E(Y^t Y) - E(Y) E(^t Y)}}.$$

Remarque utile : Noter que l'espérance de $E(Y^t Y)$ assure l'espérance de $V(Y)$.

En effet l'espérance de $E(Y^t Y)$ donne l'espérance de $E(Y_i Y_j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, qui donne l'espérance $E(Y_i^2)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, qui donne l'espérance de $\text{var}(Y_i)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ donc l'espérance de $V(Y)$.

b) Montrons que $V(BY)$ est. Il suffit de montrer l'espérance de $E(BY^t(BY))$.

$Y^t Y$ est une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes ayant une espérance (car $V(Y)$ existe) et ${}^t B \in \Pi_{n,r}(\mathbb{R})$ donc $Y^t Y {}^t B$ est une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes ayant une espérance d'après Q2 a).

Comme $B \in \Pi_{r,n}(\mathbb{R})$, toujours d'après Q2 a), $B Y^t Y {}^t B$ est une matrice aléatoire à r lignes et r colonnes ayant une espérance.

Ainsi $B Y^t (BY) = B Y^t Y {}^t B$ possède une espérance.

Puis Q2 a) nous permet de dire que $E(Y^t Y {}^t B) = E(Y^t Y) {}^t B$ et que $E(B Y^t Y {}^t B) = B E(Y^t Y {}^t B)$.

$$\text{Ainsi } E(BY^t(BY)) = E(BY^t Y {}^t B) = B E(Y^t Y) {}^t B.$$

$B Y^t (BY)$ possède une matrice espérance donc BY possède une matrice de variance-covariance.

$$\text{De plus } V(BY) = E(BY^t(BY)) - E(BY) E(^t(BY)) = B E(Y^t Y) {}^t B - E(BY) E(^t(BY)).$$

$$\rightarrow {}^t(BY) = {}^t Y {}^t B.$$

$\rightarrow {}^t Y$ est une matrice aléatoire ayant n lignes et n colonnes qui possède une matrice espérance qui vaut $E(Y)$ d'après notre hypothèse de Q2 b) et le fait que $E(Y)$ existe.

$$\rightarrow {}^t B \in \Pi_{n,r}(\mathbb{R})$$

Ainsi Q2 a) nous permet de dire que ${}^t(BY) = {}^t Y {}^t B$ possède une matrice espérance qui vaut $E({}^t Y) {}^t B$.

Ainsi $E(t(BY)) = E(tY)^t B$.

Nôtre hypothèse de $\mathcal{Q}2b$ nous permet alors de dire que $BY = {}^t({}^t(BY))$ possède une (matrice) espérance qui vaut ${}^t E({}^t(BY))$

Ainsi $E(BY) = {}^t E({}^t(BY)) = {}^t (E(tY)^t B) = B {}^t E(tY) = B {}^t ({}^t E(Y)) = B E(Y)$

Donc $E(BY) = B E(Y)$!! ce que le $\mathcal{Q}2a$ du type nous autorise à dire immédiatement au type des matrices...

Finalement $V(BY) = E(BY {}^t(BY)) - E(BY) E({}^t(BY)) = B E(Y {}^t Y) {}^t B - B E(Y) E({}^t Y) {}^t B$

$V(BY) = B (E(Y {}^t Y) - E(Y) E({}^t Y)) {}^t B = B V(Y) {}^t B$.

Si $B \in \Pi_{r,n}(\mathbb{R})$, $V(BY)$ existe et $V(BY) = B V(Y) {}^t B$.

c) Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

${}^t Y A Y = \sum_{i=1}^n (Y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_i Y_j$

$\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, $E(Y_i Y_j)$ existe donc $E({}^t Y A Y)$ existe et

vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E(Y_i Y_j)$

$A E(Y {}^t Y) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \times (E(Y_i Y_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} E(Y_k Y_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Alors $\text{tr}(A E(Y {}^t Y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} E(Y_k Y_i)$ ou $\text{tr}(A E(Y {}^t Y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E(Y_j Y_i)$

ou encore $\text{tr}(A E(Y {}^t Y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E(Y_i Y_j) = E({}^t Y A Y)$

Si $A \in \Pi_n(\mathbb{R})$, $E({}^t Y A Y)$ existe et $E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A E(Y {}^t Y))$.

Proposer une seconde version qui utilise davantage ce qui précède + quelques extrapolations...

$\text{tr}({}^t Y A Y) = \text{tr}(A Y {}^t Y)$ (propriété de la trace expliquée...)

$Y {}^t Y$ est une matrice algébrique à n lignes et n colonnes ayant une espérance.

Comme $A \in M_n(\mathbb{R})$, §2 a) montre que $E(A Y {}^t Y)$ existe et vaut $A E(Y {}^t Y)$.

Alors $E(\text{tr}(A Y {}^t Y))$ existe et vaut $\text{tr}(E(A Y {}^t Y))$ d'après §2 b)

Ainsi $E(\text{tr}({}^t Y A Y))$ existe et vaut $\text{tr}(E(A Y {}^t Y))$.

Or $E(A Y {}^t Y) = A E(Y {}^t Y)$; ainsi $E(\text{tr}({}^t Y A Y))$ existe et vaut $\text{tr}(A E(Y {}^t Y))$.

Ne reste plus qu'à montrer que $\text{tr}({}^t Y A Y) = {}^t Y A Y$ car ${}^t Y A Y$ est une matrice algébrique à 1 ligne et 1 colonne.

Ainsi $E({}^t Y A Y)$ existe et vaut $\text{tr}(A E(Y {}^t Y))$.

Puis on la rend égale.

$$E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A E(Y {}^t Y)) \text{ et } E(Y {}^t Y) = V(Y) + E(Y) E({}^t Y) = J + E(Y) {}^t E(Y) = J + m {}^t e_m$$

$$\text{Alors } E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A(J + m {}^t e_m)) = \text{tr}(A J + A m {}^t e_m) = \text{tr}(A J) + \text{tr}(A m {}^t e_m).$$

$$\text{Or } \text{tr}(A m {}^t e_m) = \text{tr}((A m) {}^t e_m) = \text{tr}({}^t e_m (A m)) = \text{tr}({}^t e_m A m) \stackrel{f}{=} e_m A m$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A J) + e_m A m.}}$$

$e_m A m$ est une matrice carrée à 1 ligne et 1 colonne.

PARTIE II. Le modèle linéaire.

A. Quelques résultats algébrique

Q1) Soit $X \in \pi_{\ell}(\mathbb{R})$ donc ${}^tX \in \pi_{\ell}(\mathbb{R})$. Alors $H = X {}^tX \in \pi_{\ell}(\mathbb{R})$.

De plus ${}^tH = {}^t({}^tXX) = {}^tX {}^t({}^tX) = {}^tXX = H$; H est symétrique.

$H = {}^tXX$ est une matrice symétrique (celle de $\pi_{\ell}(\mathbb{R})$).

b) Soit $t = (t_1, \dots, t_{\ell}) \in \text{Ker } h$. $t {}^t t = 0_{\ell \times \ell}$; $H \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{\ell} \end{pmatrix} = 0_{\pi_{\ell,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $H t = 0_{\pi_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ (au sens où l'on connait toute la suite d'identification préparée).

Alors ${}^tXX t = 0_{\pi_{\ell,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^t t {}^tX X t = 0_{\ell \times \ell}$; ${}^t(X t) X t = 0$.

$\|X t\| = 0$, ainsi $X t = 0_{\pi_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $g(t) = 0_{\ell \times n}$. Ainsi $t \in \text{Ker } g$.

de la même façon on peut dire que $h = \text{dim } \mathbb{R}^{\ell} = \text{dim } \text{Ker } g + \text{rg } g = \text{dim } \text{Ker } g + k$.

Ainsi $\text{dim } \text{Ker } g = 0$; $\text{Ker } g = \{0_{\ell \times \ell}\}$. Par conséquent $t = 0_{\ell \times \ell}$.

Ceci achève de prouver que $\text{Ker } g = \{0_{\ell \times \ell}\}$.

g est un automorphisme injectif de $\mathbb{R}^{\ell}$ et de $\mathbb{R}^{\ell} = k < +\infty$ donc g est un automorphisme de $\mathbb{R}^{\ell}$. ce qui permet de dire que :

H est inversible.

Q2) Utiliser le théorème fondamental relatif à la méthode des moindres carrés.

$y \in \pi_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in \pi_{n,\ell}(\mathbb{R})$ et $\text{rg } X = \ell$.

Alors $\rightarrow$ $\min_{\alpha \in \pi_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$ existe

$\alpha \in \pi_{\ell,1}(\mathbb{R})$

$\rightarrow \exists ! \hat{\alpha} \in \pi_{\ell,1}(\mathbb{R})$, $\|X\hat{\alpha} - y\| = \min_{\alpha \in \pi_{\ell,1}(\mathbb{R})} \|X\alpha - y\|$

$\rightarrow {}^tXX$ est inversible et $\hat{\alpha} = ({}^tXX)^{-1} {}^tX y = H^{-1} {}^tX y$

des identifications proposées nous permettent d'écrire que :

$$10. \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|X\alpha - y\| \text{ existe}$$

$$20. \exists! \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^k, \|X\vec{\alpha} - y\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|X\alpha - y\|$$

$$30. \vec{\alpha} = H^{-1} X^t y.$$

Ainsi $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$ existe, $\exists! \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^k, \|y - X\vec{\alpha}\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$ et $\vec{\alpha} = H^{-1} X^t y$.

Remarque - Retenable d'écrire $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ que $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_k \end{pmatrix}$.

Q3) $\square$ $p(y)$ est la projection orthogonale de y sur $\text{Im } f$.

Ainsi $p(y)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|y - p(y)\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - f(\alpha)\|$.

avec $\|y - p(y)\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$.

$p(y) \in \text{Im } f$; $\exists \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^k, p(y) = X\vec{\alpha}$. Alors $\|y - X\vec{\alpha}\| = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \|y - X\alpha\|$

d'après Q2 : $\vec{\alpha} = \hat{\alpha}$. Ainsi $p(y) = X\hat{\alpha}$.

$p(y) = X\hat{\alpha}$

Alors $p(y) = X H^{-1} X^t y$. Notons que ceci vaut pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

Notons p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique

est $X H^{-1} X^t$. $\forall y \in \mathbb{R}^n, p(y) = \tilde{p}(y)$. Alors : $p = \tilde{p}$.

p et $\tilde{p}$ ont la même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $P = X H^{-1} X^t$.

$p^2 = p$ car p est une projection donc $P^2 = P$.

${}^t p = {}^t (X H^{-1} X^t) = ({}^t X) {}^t (H^{-1}) {}^t X^t = X ({}^t H)^{-1} {}^t X = X H^{-1} {}^t X = P$ ↙ est symétrique

Finalement : $P = P^2 = {}^t P$... ce qui n'est pas un scoop car P est la matrice

d'une projection orthogonale (donc d'un endomorphisme symétrique) dans un base orthogonale

b) $\mathbb{R}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ car p est un projecteur orthogonal.

$\text{Im } p = \text{Im } f$ par définition de p . Ainsi $\dim \text{Im } p = \text{rg } f = k > 0$.

Alors $\dim \text{Ker } p = n - \dim \text{Im } p = n - k > 0$.

Soit $\mathcal{B}_1 = (z_1, \dots, z_k)$ une base de $\text{Im } p$ et $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ une base de $\text{Ker } p$.

Alors 1° $\mathcal{B} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$;

2° $\forall i \in [1, k], p(z_i) = z_i$ et $\forall i \in [k+1, n], p(z_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $P' = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k, n-k}(\mathbb{R}) \\ 0_{n-k, k}(\mathbb{R}) & 0_{n-k, n-k}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$

Ainsi $\text{tr}(P') = \text{tr}(I_k) = k = \dim \text{Im } p$.

Donc $\text{tr}(P') = k = \text{rg}(p) = \text{rg}(P)$.

Or P et P' sont semblables car ce sont deux matrices de p .

Ainsi $\text{tr}(P) = \text{tr}(P') = k = \text{rg}(P)$.

$$\underline{\underline{\text{tr}(P) = \text{rg}(P) = k.}}$$

c) Pour tout i dans $[1, k]$ notons $C_i(X)$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de X .

notons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n \dots$ ou de $\Pi_{k,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in [1, k], C_i(X) = X e_i = f(e_i)$.

$\forall i \in [1, k], C_i(X) = 0 \Rightarrow f(e_i) = 0 \Rightarrow e_i \in \text{Ker } f \Rightarrow e_i = 0 !!$

Ainsi $\forall i \in [1, k], C_i(X) \neq 0$. Or pour $\forall i \in [1, k], C_i(X) \in \text{Im } p$.

Alors $\forall i \in [1, k], C_i(X) \neq 0$ et $p(C_i(X)) = C_i(X)$ ou $p(C_i(X)) = C_i(X)$.

des colonnes de X sont des vecteurs propres de la matrice P associés à la
valeur propre 1

Remarque... $(C_1(X), C_2(X), \dots, C_k(X))$ est une famille de cardinal k qui

à gauche $\text{Im } f$ qui est de dimension k . Ainsi $(C_1(X), \dots, C_k(X))$

est une base de $\text{Im } f$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^n \dots$ mais pas plus

"base de vecteurs propres..." n'a donc pas beaucoup de sens !

d) $\mathbb{R}^n = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$. Soit $(j'_1, \dots, j'_r)$ une base orthogonale de $\text{Im } P$ et $(j'_{r+1}, \dots, j'_n)$ une base orthogonale de $\text{Ker } P$.

$B' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et $\pi_{B'}(P) = D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq i, j \leq n}}$

où $d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \in [1, r] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ car $\forall i \in [1, r], \forall j \in [1, r], \langle j'_i, j'_j \rangle = \delta_{ij}$ et $\forall i \in [r+1, n], \forall j \in [1, r], \langle j'_i, j'_j \rangle = 0$.

Soit S la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base B' .

1°) S est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthogonale à une base orthogonale; ainsi S est inversible et $S^{-1} = {}^t S$.

$$\text{et } S^{-1} P S = D.$$

$$\text{Alors } P = S D S^{-1} = S D {}^t S.$$

Repère une matrice orthogonale S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P = S D {}^t S$, où

$$D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq i, j \leq n}} \text{ est la matrice diagonale définie par } \begin{cases} d_{ij} = 1 & \text{si } i=j \in [1, r] \\ d_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

de r premières colonnes de S constituent une base orthogonale de $\text{Im } P = \text{Im } f$!!

Q4 a) $\hat{u} = y - X\hat{\alpha} \stackrel{\text{Q3 a)}}{=} y - P y = (I_n - P) y$. $\tilde{u} = Q y = Q(u + X\alpha) = Qu + QX\alpha$

$$X\alpha \in \text{Im } P \text{ donc } PX\alpha = X\alpha. \text{ Alors } QX\alpha = (I_n - P)X\alpha = X\alpha - PX\alpha = 0.$$

$$\text{Finalement } \underline{\hat{u}} = Qu. \text{ Notons aussi que } \underline{\tilde{u}} = Qy.$$

b) ${}^t Q = {}^t (I_n - P) = {}^t I_n - {}^t P = I_n - P = Q.$

$$Q^2 = (I_n - P)^2 = I_n^2 - 2I_n P + P^2 \stackrel{\uparrow I_n P = P I_n}{=} I_n - 2P + P = I_n - P = Q.$$

$$\underline{Q = Q^2 = {}^t Q} \quad (\text{normal car } Q \text{ est la matrice d'un opérateur orthogonal de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \text{Ker } P).$$

$$\text{tr}(\mathcal{G}) = \text{tr}(\mathcal{I}_n - P) = \text{tr}(\mathcal{I}_n) - \text{tr}(P) = n - k. \quad \underline{\underline{\text{tr}(\mathcal{G}) = n - k.}}$$

b) $\hat{u} = \mathcal{G}u$ donc $t\hat{u}\hat{u} = t(\mathcal{G}u)\mathcal{G}u = t\mathcal{G}t\mathcal{G}u = t\mathcal{G}u = t\mathcal{G}\hat{u} = t\mathcal{G}u$.

$$\underline{\underline{t\hat{u}\hat{u} = t\mathcal{G}u.}}$$

$$t_y \mathcal{G}y = t_y \hat{u} = t_y \mathcal{G}u = t(u + x\alpha) \mathcal{G}u = t\mathcal{G}u + t(x\alpha) \mathcal{G}u$$

$$\mathcal{G}y = \hat{u} = \mathcal{G}u$$

Or $t(x\alpha) \mathcal{G}u = \langle x\alpha, \mathcal{G}u \rangle = 0$ car $x\alpha \in \text{Im } P$, $\mathcal{G}u \in \text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - P) \stackrel{\alpha?}{=} \text{Ker } P$ et $\text{Im } P$ et $\text{Ker } P$ sont orthogonaux.

Ainsi $\underline{\underline{t_y \mathcal{G}y = t\mathcal{G}u.}}$

Q5 a) Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

• Supposons que A est positive. Alors $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $t_z A z \geq 0$.

Soit λ une valeur propre de A . $\exists z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $A z_0 = \lambda z_0$.

$$\text{Alors } 0 \leq t_{z_0} A z_0 = t_{z_0} (\lambda z_0) = \lambda t_{z_0} z_0 = \lambda \|z_0\|^2$$

Ainsi $\|z_0\|^2 \neq 0$ et $\lambda \|z_0\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$.

Les valeurs propres de A sont positives.

• Réciproquement supposons les valeurs propres de A positives.

Puisque A est positive.

A est symétrique et $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthogonale $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs

propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Notons que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$.

$$\text{Soit } z \in \mathbb{R}^n. \quad z = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i \rangle z_i. \quad \text{Donc } A z = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i \rangle A z_i = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i \rangle \lambda_i z_i$$

$$\text{Alors } t_z A z = \langle z, A z \rangle = \sum_{i=1}^n \langle z, z_i \rangle \langle z, z_i \rangle \lambda_i = \sum_{i=1}^n (\langle z, z_i \rangle)^2 \lambda_i \geq 0$$

$(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est une base orthogonale

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $t_z A z \geq 0$. A est positive.

Soit A une matrice symétrique de $\Pi_n(\mathbb{R})$. A est positive, c'est à dire $\forall z \in \mathbb{R}^n, {}^t z A z \geq 0$
 n'et n'ont ni valeurs propres positives.

b) $L \in \Pi_{n,p}(\mathbb{R})$ donc ${}^t L \in \Pi_{p,n}(\mathbb{R})$. Alors ${}^t L L \in \Pi_p(\mathbb{R})$.

${}^t({}^t L L) = {}^t L {}^t({}^t L) = {}^t L L$; ${}^t L L$ est donc symétrique

$\forall z \in \mathbb{R}^p, {}^t z ({}^t L L) z = {}^t (L z) L z = \|L z\|^2 \geq 0$. $\forall z \in \mathbb{R}^p, {}^t z ({}^t L L) z \geq 0$.

${}^t L L$ est une matrice symétrique réelle positive de $\Pi_p(\mathbb{R})$.

B. Estimation des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et σ^2

(Q1) a) Rappelons que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes, que $E(U) = 0_n$ et $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Alors $\forall i \in \{1, n\}, E(U_i)$ existe et vaut 0

$\rightarrow V(i, j) \in \{1, n\}^2$, $\text{cov}(U_i, U_j)$ existe et vaut σ^2 si $i = j$, 0 si $i \neq j$.

$X \in \Pi_{n,p}(\mathbb{R})$. Posons $X \alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$. Alors $Y = X \alpha + U = \begin{pmatrix} U_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ U_n + \beta_p \end{pmatrix}$.

d'après ce qui précède : $\rightarrow$ pour tout i dans $\{1, n\}, E(U_i + \beta_i)$ existe et vaut β_i

$\rightarrow$ pour tout (i, j) dans $\{1, n\}^2$, $\text{cov}(U_i + \beta_i, U_j + \beta_j)$ existe

et vaut $\text{cov}(U_i, U_j)$ donc σ^2 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

Ainsi Y possède une (matrice) espérance qui est $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ donc $X \alpha$ et

Y possède une matrice de variance-covariance qui est $\sigma^2 I_n$.

Par conséquent $E(Y)$ et $V(Y)$ existent, $E(Y) = X \alpha$ et $V(Y) = \sigma^2 I_n$.

$H^{-1}{}^tX \in M_{l,n}(\mathbb{R})$ et γ est une matrice aléatoire à n lignes et 1 colonne qui possède une espérance.

D'après 1.9.2 a) (...espérance), $H^{-1}{}^tX\gamma$ est une matrice aléatoire à l lignes et 1 colonne qui possède une (matrice) espérance égale à $H^{-1}{}^tX E(\gamma)$.

Ainsi $\hat{G} = H^{-1}{}^tX\gamma$ possède une matrice espérance égale à $H^{-1}{}^tX X\alpha$.

$$\text{Car } H^{-1}{}^tX X\alpha = H^{-1}H\alpha = \alpha.$$

Donc $E(\hat{G})$ existe et vaut α .

b) Posons $B = H^{-1}{}^tX$. $B \in M_{l,n}(\mathbb{R})$ et γ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une matrice de variance-covariance qui vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après 9.3 b), $B\gamma$ possède une matrice de variance-covariance qui vaut $B V(\gamma) {}^tB$.

Ainsi $\hat{G} = H^{-1}{}^tX\gamma = B\gamma$ possède une matrice de variance-covariance qui vaut $B V(\gamma) {}^tB$.

$$V(\hat{G}) = B V(\gamma) {}^tB = H^{-1}{}^tX \sigma^2 I_n {}^t(H^{-1}{}^tX) = \sigma^2 H^{-1}{}^tX X {}^t(H^{-1}) = \sigma^2 H^{-1}H H^{-1} = \sigma^2 H^{-1}.$$

$\hat{G}$ possède une matrice de variance-covariance et $V(\hat{G}) = \sigma^2 H^{-1}$.

(9.2) a) ${}^tB \in M_{l,n}(\mathbb{R})$ et γ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ qui possède une (matrice) espérance valant $X\alpha$.

Alors ${}^tB\gamma$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^l$ qui possède une (matrice) espérance valant ${}^tB X\alpha$.

On veut donc trouver une condition sur B pour que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^l, {}^tB X\alpha = \alpha$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^l, {}^tB X\alpha = \alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}^l, ({}^tB X - I_l)\alpha = 0_{\mathbb{R}^l} \Leftrightarrow {}^tB X - I_l = 0_{M_l(\mathbb{R})}.$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^l, {}^tB X\alpha = \alpha \Leftrightarrow {}^tB X = I_l.$$

Si B est une matrice nulle de $M_{n,l}(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^l$ $\hat{G} = {}^tB\gamma$ est un

matriciellement nul de α et nul de α ${}^tB X = I_l$ ou ${}^tX B = I_l$

Δ On a pu é de ne pas parler d'unicité... $B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$!!

Remarque... $\tilde{G} = H^{-1} X Y = {}^t(X {}^t H^{-1}) Y = {}^t(X H^{-1}) Y$ car H^{-1} est symétrique dans la norme où H est symétrique.

Notons donc que $X H^{-1} \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R})$ et que ${}^t(X H^{-1}) X = {}^t H^{-1} {}^t X X = H^{-1} H = I_k$ de toute évidence $X H^{-1}$ n'est pas nulle car ${}^t(X H^{-1}) X = I_k$.

b) $F = {}^t B \cdot H^{-1} X$ d'ac ${}^t F X = {}^t B X - H^{-1} {}^t X X = I_k - I_k = 0_{\Pi_k(\mathbb{R})}$.

$\uparrow$
 ${}^t B X = I_k$ car B vérifie la condition de a)

${}^t F X = 0_{\Pi_k(\mathbb{R})}$

$\tilde{C} = {}^t B Y$ et $v(Y)$ est et vaut $\sigma^2 I_n$.

Alors $v(\tilde{C})$ existe et vaut ${}^t B v(Y) {}^t ({}^t B)$ d'après 1) Q3 b).

Ainsi $v(\tilde{C}) = {}^t B \sigma^2 I_n B = \sigma^2 {}^t B B$. $v(\tilde{C}) = \sigma^2 {}^t B B$

d'ac $v(\tilde{C}) - v(\tilde{G}) = \sigma^2 ({}^t B B - H^{-1})$.

Notons que $\sigma^2 ({}^t B B - H^{-1})$ est une matrice symétrique de $\Pi_k(\mathbb{R})$ car ${}^t B B$ et H^{-1} sont deux matrices symétriques de $\Pi_k(\mathbb{R})$. On est de même de ${}^t B B \cdot H^{-1}$.

Pour montrer que $v(\tilde{C}) - v(\tilde{G})$ est positive il suffit de montrer que ${}^t B B - H^{-1}$ est positive car $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme cela, via que pour uie, calculons ${}^t F F$.

${}^t F = {}^t B \cdot H^{-1} {}^t X$ d'ac $F = B - {}^t ({}^t X) {}^t (H^{-1}) = B - X H^{-1}$.

Alors ${}^t F F = {}^t F (B - X H^{-1}) = {}^t F B - {}^t F X H^{-1} = {}^t F B = ({}^t B \cdot H^{-1} {}^t X) B = {}^t B B \cdot H^{-1} {}^t X B = {}^t B B \cdot H^{-1} !!$

$\uparrow$
 ${}^t F X = 0_{\Pi_k(\mathbb{R})}$

$\uparrow$
 ${}^t X B = I_k$

Ainsi ${}^t B B \cdot H^{-1} = {}^t F F$ avec $F \in \Pi_{n,k}(\mathbb{R})$

d'après 1) Q3 b) ${}^t F F$ est symétrique réelle et strictement positive.

Ainsi ${}^t B B \cdot H^{-1}$ est positive; $\sigma^2 ({}^t B B \cdot H^{-1})$ aussi.

$v(\tilde{C}) - v(\tilde{G})$ est positive.

Q3) a) $\hat{U} = Y \cdot X \hat{G} = Y \cdot X H^{-1} X' Y = Y \cdot P Y = Q Y = Q(X\alpha + U) = QX\alpha + QU$.

Or $PX\alpha = X\alpha$ donc $QX\alpha = 0$. Ainsi $\hat{U} = QU$.

$\mathbb{E} PX\alpha = XH^{-1} X' X\alpha = XH^{-1} H\alpha = X\alpha$.

b) $E(\hat{U}) = Q E(U)$ ($E(\hat{U})$ existe car $E(U)$ existe) et $E(U) = 0$

Ainsi $E(\hat{U}) = 0$.

$V(U)$ existe et $\hat{U} = QU$ donc $V(\hat{U})$ existe et vaut : $Q V(U) Q'$
d'après I 3 b). Rappelons que $V(U) = \sigma^2 I_n$.

Ainsi $V(\hat{U}) = Q \sigma^2 I_n Q' = \sigma^2 Q Q' = \sigma^2 Q' Q = \sigma^2 Q$. $V(\hat{U}) = \sigma^2 Q$.

Supposons $(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n)$ indépendantes. Alors $\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \text{cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j) = 0$.

Ainsi $V(\hat{U}) = \text{diag}(V(\hat{U}_1), \dots, V(\hat{U}_n))$.

De plus $\forall i \in \{1, n\}, V(\hat{U}_i) > 0$.

Alors $\text{rg } V(\hat{U}) = n$. Or $V(\hat{U}) = \sigma^2 Q$ et $\text{rg } Q = n - k < n$.

d'où la contradiction.

$\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n$ ne sont pas indépendantes.

c) $\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$ donc ${}^t \hat{U} \hat{U} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n) \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{pmatrix}$; ${}^t \hat{U} \hat{U} = \sum_{i=1}^n \hat{U}_i^2$.

${}^t \hat{U} \hat{U} = (QU)QU = {}^t U {}^t Q Q U = {}^t U Q^2 U = {}^t U Q U$; ${}^t \hat{U} \hat{U} = {}^t U Q U$.

${}^t Y Q Y = {}^t Y Q(X\alpha + U) = {}^t Y Q X\alpha + {}^t Y Q U \underset{QX\alpha=0}{=} {}^t Y Q U = {}^t (X\alpha + U) Q U = {}^t X\alpha Q U + {}^t U Q U$.

Or ${}^t X\alpha Q U \underset{QX\alpha=0}{=} {}^t X\alpha {}^t Q U = {}^t (QX\alpha) U = 0$. Alors ${}^t Y Q Y = {}^t U Q U$

Finalement : $t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^n \hat{U}_i^2 = tUGU = t\gamma GU$.

d) $E(U)$ espère d vaut 0, $V(U)$ espère d vaut $\sigma^2 I_n$.

D'après I(9) c) $E(tUGU)$ espère d vaut : $\text{tr}(GU E(U)) + tE(U)GE(U)$.

Donc $E(t\hat{U}\hat{U})$ espère d vaut : $\text{tr}(G\sigma^2 I_n) + 0 = \sigma^2 \text{tr}(G) = \sigma^2(n-k)$.

$E(t\hat{U}\hat{U}) = \sigma^2(n-k)$.

$E(t\hat{U}\hat{U})$ espère d vaut $\sigma^2(n-k)$ donc $E(\Delta_n)$ espère d vaut $\frac{1}{n-k} \sigma^2(n-k) = \sigma^2$

Δ_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

C.. Etude d'une suite d'estimateurs.

Q1) Posons $GU = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$ et $G = (g_{ij})$.

$$\text{Avec } tUGU = \sum_{i=1}^n U_i T_i = \sum_{i=1}^n U_i \sum_{j=1}^n g_{ij} U_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} U_i U_j$$

Avec $tUGU = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} U_i U_j$.

Q2) $(tUGU)^2 = (tUGU)(tUGU) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} U_i U_j \times \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n g_{k\ell} U_k U_\ell$

$$(tUGU)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n g_{ij} g_{k\ell} U_i U_j U_k U_\ell$$

"En développant plusieurs cas nous allons noter que $U_i U_j U_k U_\ell$ possède une espérance et la calculer".

Soit $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. (and $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$!)

1^{er} Cas... cas $\{i, j, l, e\} = 4$.

U_i, U_j, U_l, U_e sont quatre variables aléatoires indépendantes ayant une espérance nulle. Alors $E(U_i U_j U_l U_e)$ existe et vaut $E(U_i) E(U_j) E(U_l) E(U_e)$ donc 0 !

2nd Cas... cas $\{i, j, l, e\} = 3$

$\exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{D}^3$, tel que $\begin{cases} \{i, j, l, e\} = \{1, 1, 1, 1\} \text{ et} \\ U_i U_j U_l U_e = U_{a_1}^2 U_{a_2} U_{a_3}. \end{cases}$

$U_{a_1}, U_{a_2}, U_{a_3}$ sont indépendantes donc $U_{a_1}^2, U_{a_2}$ et U_{a_3} sont indépendantes et possèdent une espérance. Alors $E(U_{a_1}^2 U_{a_2} U_{a_3})$ existe et vaut $E(U_{a_1}^2) E(U_{a_2}) E(U_{a_3})$ donc vaut 0. $E(U_i U_j U_l U_e)$ existe et vaut 0.

3rd Cas... cas $\{i, j, l, e\} = 2$

$\exists (a_1, a_2) \in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{D}^2$, tel que $\begin{cases} \{i, j, l, e\} = \{1, 1, 1, 1\} \\ U_i U_j U_l U_e = U_{a_1}^2 U_{a_2}^2 \end{cases}$

$U_{a_1}^2$ et $U_{a_2}^2$ sont indépendantes et possèdent une espérance. Alors $E(U_i U_j U_l U_e)$ existe et vaut $E(U_{a_1}^2) E(U_{a_2}^2) = \sigma^2 \times \sigma^2 = \sigma^4$

($\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{D}$, $E(U_a^2) = V(U_a) + (E(U_a))^2 = \sigma^2 + 0 = \sigma^2$).

$\exists (a_1, a_2) \in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{D}^2$, tel que $\begin{cases} \{i, j, l, e\} = \{1, 1, 1, 1\} \\ U_i U_j U_l U_e = U_{a_1}^3 U_{a_2} \end{cases}$

$U_{a_1}^3$ et U_{a_2} sont indépendantes et possèdent une espérance. $E(U_{a_1}^3 U_{a_2})$ existe et vaut $E(U_{a_1}^3) E(U_{a_2})$ donc 0.

$E(U_i U_j U_l U_e)$ existe et vaut 0.

4th Cas cas $\{i, j, l, e\} = 1$. $i = j = l = e$. $U_i U_j U_l U_e = U_i^4$ et U_i^4 possède une espérance qui vaut $3\sigma^4$. $E(U_i U_j U_l U_e)$ existe et vaut $3\sigma^4$.

Finalement $\forall (i, j, k, l) \in \overline{1, n}^4$, $E(U_i U_j U_k U_l)$ est

$$\text{Ainsi } E((tU\varphi U)^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij} q_{kl} E(U_i U_j U_k U_l).$$

Notons aussi ainsi que si $(i, j, k, l) \in \overline{1, n}^4$, $E(U_i U_j U_k U_l)$ est nul que si $(i=j \text{ et } k=l)$ ou $(i=k \text{ et } j=l)$ ou $(i=l \text{ et } j=k)$.

Ainsi $(i, j, k, l) \in \overline{1, n}^4$.

$$\text{Si } i \neq j \quad E(U_i U_j U_k U_l) = \begin{cases} \sigma^4 & \text{si } (k=i \text{ et } l=j) \text{ ou } (k=j \text{ et } l=i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij} q_{kl} E(U_i U_j U_k U_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma^4 q_{ij} [q_{ij} + q_{ji}] = 2 \sigma^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2$$

$\boxed{\varphi = \varphi^t}$

$$\text{Si } i=j \quad E(U_i U_j U_k U_l) = E(U_i^2 U_k U_l) = \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{si } k=l=i \\ \sigma^4 & \text{si } k=l \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ii} q_{kl} E(U_i^2 U_k U_l) &= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 3\sigma^4 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ii} q_{kl} \times \sigma^4 \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{ii} q_{kk} \sigma^4 \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 \times 2\sigma^4 + \sum_{i=1}^n q_{ii} \sum_{k=1}^n q_{kk} \sigma^4 \\ &= 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 + (\text{tr}(\varphi))^2 \sigma^4 \end{aligned}$$

$$\text{Alors } E((tU\varphi U)^2) = \sigma^4 \left[2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 + (\text{tr}(\varphi))^2 \right]$$

$$E((tU\varphi U)^2) = \sigma^4 \left[2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2}_{= \text{tr}(\varphi\varphi) = \text{tr}(\varphi^2)} + \text{tr}(\varphi)^2 \right] = \sigma^4 [2 \text{tr}(\varphi^2) + (\text{tr}(\varphi))^2]$$

$$\underline{\underline{E((\text{tr}(\Phi U))^2) = \sigma^4 [(tr(\Phi))^2 + 2 tr(\Phi^2)] .}}$$

$$tr(\Phi) = n-k \text{ et } tr(\Phi^2) = tr(\Phi) = n-k.$$

$$\text{Ainsi } E((\text{tr}(\Phi U))^2) = \sigma^4 [(n-k)^2 + 2(n-k)] = \sigma^4 (n-k)(n-k+2).$$

$$\underline{\underline{E((\text{tr}(\Phi U))^2) = \sigma^4 (n-k)(n-k+2) .}}$$

$$\textcircled{Q3} \quad V(\Delta_n) = V\left(\frac{\text{tr}(\Phi U)}{n-k}\right) = \frac{1}{(n-k)^2} V(\text{tr}(\Phi U)) = \frac{1}{(n-k)^2} [E((\text{tr}(\Phi U))^2) - (E(\text{tr}(\Phi U)))^2]$$

$$V(\Delta_n) = \frac{1}{(n-k)^2} [E((\text{tr}(\Phi U))^2) - (\sigma^2(n-k))^2] = \frac{1}{(n-k)^2} [\sigma^4 (n-k)(n-k+2) - \sigma^4 (n-k)^2]$$

$$V(\Delta_n) = \frac{\sigma^4}{n-k} [n-k+2 - (n-k)] = \frac{2\sigma^4}{n-k} . \quad \underline{\underline{V(\Delta_n) = \frac{2\sigma^4}{n-k} .}}$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = P(|\Delta_n - E(\Delta_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\Delta_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2\sigma^4}{(n-k)\varepsilon^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le 1^{er} terme d'encadrement dans

alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\Delta_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0$.

$(\Delta_n)_{n \geq k+1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine

égale à σ^2 .

La suite d'observateurs $(\Delta_n)_{n \geq k+1}$ de σ^2 est convergente.