Mon parcours pour réussir en maths

- Je révise en autonomie
- Je progresse avec un prof
- Je m'entraîne sur des annales corrigées

Je cherche un prof de maths

Avis Google France
★★★★★ 4,9 sur 5

CORRIGÉ DU SUJET HEC MATHS 1 ECS 2016

Revenir à tous les corrigés des annales maths BCE

Partie I. Partitions de l'identité

1/ a/ A est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc

$$\boxed{Sp(A) = \{-1, 0\}.}$$

A a une colonne nulle et deux colonnes non proportionnelles, donc $rg\,(A) = 2$.

Donc, par le théorème du rang, $\dim\,(\ker\,(A)) = \dim\,(\mathcal{M}_{3,1}\,(\mathbb{R})) - rg\,(A) = 3 - 2 = 1$.

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Et de même $\dim\,(\ker\,(A + I_3)) = 1$.

$A \in \mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$, A admet deux valeurs propres et $\dim\,(\ker\,(A)) + \dim\,(\ker\,(A + I_3)) = 2$,

donc $\dim\,(\ker\,(A)) + \dim\,(\ker\,(A + I_3)) \neq 3$, donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

b/ Après calculs, on trouve : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A^3 + A^2 = 0$,

donc

$$\boxed{X^3 + X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

c/ Supposons qu'il existe un polynôme T de degré 2 et annulateur de A.

On note $T = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$T\,(A) = 0$, donc $aA^2 + bA + cI_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} c & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c - b + a \end{pmatrix} = 0$, donc $c = b = a = 0$.

Contradiction puisque $a \neq 0$.

Donc

$$\boxed{\text{il n'existe pas de polynôme de degré 2 annulateur de } A.}$$

d/ $Q\,(X) = X^3 + X^2$ est un polynôme annulateur de A, donc de f.

Donc $f^3 + f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc $f^3 + f^2 + Id_{\mathbb{R}^3} = Id_{\mathbb{R}^3}$.

En prenant $Q_1\,(X) = X^3 + X^2$, et $Q_2\,(X) = 1$,
donc $Q_1\,(f) = f^3 + f^2$ et $Q_2\,(f) = Id_{\mathbb{R}^3}$,

on a bien $Q_1\,(f) + Q_2\,(f) = Id_{\mathbb{R}^3}$, $Q_1\,(f)^2 = Q_1\,(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $Q_2\,(f)^2 = Q_2\,(f) = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Donc

$$\boxed{Q_1\,(X) = X^3 + X^2, \text{ et } Q_2\,(X) = X \text{ conviennent.}}$$

2/ a/ f est diagonalisable, donc

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\,(f)\,.}$$

Pour la suite de la question, on pose $Q = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)$.

Soit $x \in E$. Alors $\exists!\,(x_1, x_2, ..., x_k) \in \prod_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\,(f)\ /\ x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Soit alors $i \in [\![1, k]\!]$.

$$\begin{aligned}
Q(f)(x_i) &= \left[\bigodot_{j=1}^{k}(f-\lambda_j Id_E)\right](x_i)\\
&= \left[\left(\bigodot_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i}}(f-\lambda_j Id_E)\right)\circ(f-\lambda_i Id_E)\right](x_i)\\
&= \left(\bigodot_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i}}(f-\lambda_j Id_E)\right)\underbrace{(f(x_i)-\lambda_i x_i)}_{=0 \text{ car } x_i\in E_{\lambda_i}(f)}\\
&= \left(\bigodot_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i}}(f-\lambda_j Id_E)\right)(0_E)
\end{aligned}$$

Donc $Q(f)(x_i)=0_E$.

Donc, par linéarité de $Q(f)$,$Q(f)(x)=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{Q(f)(x_i)}_{=0_E}=0_E$.

Donc $Q(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$,donc

$$\boxed{Q=\prod_{j=1}^{k}(X-\lambda_j) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

b/ Soit $i\in[\![1,k]\!]$.

$$(X-\lambda_i)\times L_i=(X-\lambda_i)\times\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i}}\left(\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)=\underbrace{\prod_{\substack{1\leqslant k\\ j\neq i}}\left(\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\right)}_{=c,\ c \text{ réel fixé}}\times Q(X).$$

Donc $(f-\lambda_i Id_E)\circ L_i(f)=c.Q(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$ car Q est un polynôme annulateur de f.

Donc $(f-\lambda_i Id_E)\circ v_i=0_{\mathcal{L}(E)}$,donc $Im(v_i)\subset\ker(f-\lambda_i Id_E)$.

Donc

$$\boxed{Im(v_i)\subset E_{\lambda_i}(f).}$$

c/ ● Soit $i\in[\![1,k]\!]$.

L_i est donné sous forme factorisée, donc les racines de L_i sont les réels $\lambda_j, j\in[\![1,k]\!]\setminus\{i\}$.

Et on a clairement $L_i(\lambda_i)=1$.

Donc $L_i(\lambda_j)=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}$.

● Soit $j\in[\![1,k]\!]$.$\sum_{i=1}^{k}L_i(\lambda_j)=\underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1}+\sum_{\substack{1\leqslant k\\ i\neq j}}\underbrace{L_i(\lambda_j)}_{=0}=1$,donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}L_i(\lambda_j)=1.}$$

● Soit $x\in E.E=\bigoplus_{i=1}^{k}E_{\lambda_i}(f)$, donc $\exists!\,(x_1,x_2,...,x_k)\in\prod_{j=1}^{k}E_{\lambda_j}(f)\ /\ x=\sum_{j=1}^{k}x_j$.

Soit $(i,j)\in[\![1,k]\!]^2$.

Ou bien $x_j\neq 0$. Alors x_j est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_j,donc x_j est vecteur propre de $L_i(f)$ associé à la valeur propre $L_i(\lambda_j)$,donc $L_i(f)(x_j)=L_i(\lambda_j).x_j$.

Ou bien $x_j=0$,et alors la formule précédente est clairement vraie.

D'où $v_i(x_j)=L_i(f)(x_j)=L_i(\lambda_j).x_j$.

Soit $j\in[\![1,k]\!]$.$\left(\sum_{i=1}^{k}v_i\right)(x_j)=\sum_{i=1}^{k}v_i(x_j)=\sum_{i=1}^{k}L_i(\lambda_j).x_j=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k}L_i(\lambda_j)\right)}_{=1}.x_j=x_j$.

On pose $g=\sum_{i=1}^{k}v_i.g(x)=g\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)=\sum_{j=1}^{k}g(x_j)=\sum_{j=1}^{k}x_j=x$.

Donc $\forall x\in E,\ \left(\sum_{i=1}^{k}v_i\right)(x)=x$,donc $\sum_{i=1}^{k}v_i=Id_E$

et

$$\boxed{v_1,v_2,...,v_k \text{ constituent une partition de l'identité de } E.}$$

d/ $\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{v_i(x)}_{\in Im(v_i)}$,donc $E \subset \sum_{i=1}^{k} Im(v_i)$. L'inclusion inverse étant claire, on a

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{k} Im(v_i).}$$

Or $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad Im(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$,donc $E = \sum_{i=1}^{k} Im(v_i) \subset \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f) = E,$

donc $\sum_{i=1}^{k} Im(v_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

Comme $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad Im(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$,la somme $\sum_{i=1}^{k} Im(v_i)$ est directe aussi

et $\bigoplus_{i=1}^{k} Im(v_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

Notons alors, pour $i \in [\![1,k]\!], \quad r_i = Im(v_i)$ et $\alpha_i = E_{\lambda_i}(f)$.

On a donc $\sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, donc $\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\alpha_i - r_i)}_{\geqslant 0} = 0.$

Or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nulle, donc $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad r_i = \alpha_i$.

Et comme on a toujours $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad Im(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$,on en déduit que

$$\boxed{\forall i \in [\![1,k]\!], \quad Im(v_i) = E_{\lambda_i}(f).}$$

Soit $x \in E$. On a toujours $\exists! (x_1, x_2, ..., x_k) \in \prod_{j=1}^{k} E_{\lambda_j}(f) \ / \ x = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Donc $x = x_1 + y$, où $y = \sum_{j=2}^{k} x_j$.

On note $F = \bigoplus_{j=2}^{k} E_{\lambda_j}(f)$.

On a $E = E_{\lambda_1}(f) + F$, et $\dim(E_{\lambda_1}(f)) + \dim(F) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \sum_{j=2}^{k} \dim(E_{\lambda_j}(f)) = \dim(E)$,

donc $E = E_{\lambda_1}(f) \bigoplus F$.

De plus, $v_1(x_1) = L_1(f)(x_1) = L_1(\lambda_1).x_1 = x_1$.

Et $v_1(y) = \sum_{j=2}^{k} v_1(x_j) = \sum_{j=2}^{k} L_1(f)(x_j) = \sum_{j=2}^{k} \underbrace{L_1(\lambda_j)}_{=0}(x_j) = 0.$

Donc, $v_1(x) = v_1(x_1) + \sum_{j=2}^{k} v_1(x_j) = x_1,$

donc

$$\boxed{v_1 \text{ est le projecteur sur } Im(v_1) = E_{\lambda_1}(f) \text{ parallèlement } \ F = \bigoplus_{j=2}^{k} E_{\lambda_j}(f).}$$

3/ a/ On a $Id_E = \sum_{i=1}^{k} u_i$, donc $\forall x, \quad x = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{u_i(x)}_{\in Im(u_i)}$,donc $E \subset \sum_{i=1}^{k} Im(u_i)$. L'inclusion inverse

étant claire, on a

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{k} Im(u_i).}$$

On note, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathcal{C}_i$ une base de $Im(u_i)$.

On note $\mathcal{C}$ la concaténation des $\mathcal{C}_i$, $1 \leqslant k$.

Soit $x \in E. E = \sum_{i=1}^{k} Im(u_i)$,donc $\exists (x_1, x_2, ..., x_k) \in \prod_{i=1}^{k} Im(u_i)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Or pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, x_i est combinaison des éléments de $\mathcal{C}_i$ (puisque $\mathcal{C}_i$ est une base de $Im(u_i)$),

donc x_i est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{C}$ (puisque $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}$).

Donc x est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{C}$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de E, donc $\dim(E) \leqslant card(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{card(\mathcal{C}_i)}_{=r_i}.$

Donc

$$\boxed{n \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i.}$$

b/ On a $E = \sum_{i=1}^{k} Im(u_i)$. Donc par le cours,

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{k} Im\left(u_i\right) \text{ ssi } n = \sum_{i=1}^{k} r_i.}$$

c/ (i) On suppose que les endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des projecteurs.

Soit $1 \leqslant i \leqslant k$. On note, $M_i = Mat_{\mathcal{B}}\left(u_i\right)$.

u_i est un projecteur, donc $\exists P_i \in GL_n\left(\mathbb{R}\right) \ / \ M_i = P_i \Delta_i P_i^{-1}$, où $\Delta_i = Diag\left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r_i \text{ fois}}, \underbrace{0, \ldots 0}_{n-r_i \text{ fois}}\right)$.

(Éventuellement, on peut avoir $r_i = 0$ ou $r_i = n$).

Deux matrices semblables ayant même trace, on a $tr\left(M_i\right) = tr\left(\Delta_i\right) = r_i$.

$u_1, \ldots, u_k$ forment une partition de l'identité de E, donc $\sum_{i=1}^{k} u_i = Id_E$, donc $\sum_{i=1}^{k} M_i = I_n$.

D'où : $n = tr\left(I_n\right) = tr\left(\sum_{i=1}^{k} M_i\right) = \sum_{i=1}^{k} tr\left(M_i\right)$ par linéarité de la trace. Donc $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

On a donc bien

$$\boxed{(2) \Rightarrow (1).}$$

(ii) On suppose que $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

Donc d'après la question 3.b/, $E = \bigoplus_{i=1}^{k} Im\left(u_i\right)$.

Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Soit $x \in E$.

On a $u_j\left(x\right) = \underbrace{0}_{\in Im(u_1)} + \cdots + \underbrace{0}_{\in Im(u_{j-1})} + \underbrace{u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_j)} + \underbrace{0}_{\in Im(u_{j+1})} + \cdots + \underbrace{0}_{\in Im(u_k)}$ et $Id_E = \sum_{i=1}^{k} u_i$,

d'où :

$$u_j\left(x\right) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ u_j\left(x\right) = \underbrace{u_1 \circ u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_1)} + \cdots + \underbrace{u_{j-1} \circ u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_{j-1})} + \underbrace{u_j \circ u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_j)}$$

$$+\underbrace{u_{j+1} \circ u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_{j+1})} + \cdots + \underbrace{u_k \circ u_j\left(x\right)}_{\in Im(u_k)}$$

Or $E = \bigoplus_{i=1}^{k} Im\left(u_i\right)$, donc par unicité de la décomposition, on a $\begin{cases} u_j \circ u_j\left(x\right) = u_j\left(x\right) \\ u_i \circ u_j\left(x\right) = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Donc pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $\forall x \in E, \ \ u_i \circ u_j\left(x\right) = 0$, donc $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a donc bien

$$\boxed{(1) \Rightarrow (3).}$$

(iii) On suppose que pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $j \in [\![1, k]\!]$.

$Id_E = \sum_{i=1}^{k} u_i$, donc $u_j = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ u_j = u_j \circ u_j + \sum_{i \neq j} \underbrace{u_i \circ u_j}_{=0} = u_j \circ u_j$.

Donc $u_j^2 = u_j$, donc u_j est un projecteur.

Donc on a bien $(3) \Rightarrow (2)$.

Et on a montré que $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$.

$$\boxed{\text{Les propriétés } (1), (2) \text{ et } (3) \text{ sont équivalentes.}}$$

COURS DE MATHS
Les meilleurs professeurs particuliers
Pour progresser et réussir
Cours particuliers en maths
Avis Google France ★★★★★ 4,9 sur 5

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

4/ a/ D'après le cours, p est un projecteur orthogonal ssi p est un projecteur et un endomorphisme symétrique.

● p est un projecteur ssi $p \circ p = p$ ssi $P^2 = P$

● $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et $P = Mat_{\mathcal{B}}(p)$

D'où : p est un endomorphisme symétrique ssi ${}^tP = P$.

Donc

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal ssi } P^2 = P \text{ et } {}^tP = P.}$$

b/ ● Supposons qu'il existe α réel et p projecteur orthogonal tel que $f = \alpha p$.

On note $P = mat_{\mathcal{B}}(p)$.

$tr(M)M^2 = tr(\alpha P)(\alpha P)^2 = \alpha^3 tr(P)P^2$ par linéarité de la trace.

Donc $tr(M)M^2 = \alpha^3 tr(P)P$ car P est un projecteur.

De même $tr\left(M^2\right)M = tr\left(\alpha^2 P^2\right)(\alpha P) = \alpha^3 tr\left(P^2\right)P = \alpha^3 tr(P)P$.

Donc $tr(M)M^2 = tr\left(M^2\right)M$

De plus ${}^tM = \alpha\,{}^tP = \alpha P$ car P est un projecteur orthogonal, donc ${}^tM = M$.

● Supposons que $tr(M)M^2 = tr\left(M^2\right)M$ et ${}^tM = M$.

Ou bien $tr\left(M^2\right) = 0$. On pose $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, donc $M^2 = \left(\sum\limits_{s=1}^{n} m_{i,s}m_{s,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Or M est symétrique, donc $M^2 = \left(\sum\limits_{s=1}^{n} m_{i,s}m_{j,s}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Donc $tr\left(M^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} m_{i,s}m_{i,s} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(m_{i,s})^2$. Or $tr\left(M^2\right) = 0$ et une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, donc $\forall (i,s) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,s} = 0$.

Donc $M = 0$ et en prenant $\alpha = 0$ et $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a bien $f = \alpha p$ avec p projecteur orthogonal.

Ou bien $tr(M) = 0$. Alors $tr\left(M^2\right)M = 0$, donc $tr\left(M^2\right) = 0$ ou $M = 0$ et on est ramené au cas précédent.

Ou bien $tr(M) \neq 0$ et $tr\left(M^2\right) \neq 0$.

Alors on pose $\alpha = \frac{tr\left(M^2\right)}{tr(M)}$, $P = \frac{tr(M)}{tr(M^2)}M$ et p l'endomorphisme de E de matrice P dans la base $\mathcal{B}$.

On a bien $M = \alpha P$ et ${}^tP = P$ car $\frac{tr(M)}{tr(M^2)}$ réel et ${}^tM = M$.

D'autre part $P^2 = \left(\frac{tr(M)}{tr(M^2)}\right)^2 M^2 = \frac{tr(M)}{tr(M^2)} \times \frac{1}{tr(M^2)} \cdot \underbrace{tr(M)M^2}_{=tr(M^2)M} = \frac{tr(M)}{tr(M^2)}M = P$.

$P^2 = P$ et ${}^tP = P$, donc p est un projecteur orthogonal (par 4.a), et on a bien trouvé α et p projecteur orthogonal tels que $f = \alpha p$.

5/ a/

function t=tr(A) (on entre une matrice carrée)

$n = length(A(:,1))$

$t = 0$

$for\ \ i = 1 : n$

$\quad t = t + A(i,i)$

end

$endfunction$

b/ Signification de la ligne (5). On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

On affecte à b la valeur $True$ si b contient déjà $True$ **et** $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Donc tant que les coefficients $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, b reçoit $True$, et si à un moment on a $a_{i,j} \neq a_{j,i}$, alors b reçoit $False$. Dans ce dernier cas, b garde la valeur $False$ jusqu'à la fin des deux boucles, car $False\ \&\ False = False$ et $False\ \&\ True = False$.

● $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

b est initialisé à $\%T$.

Pour $i = 1$

Pour $j = 2$, b est $Vrai$ **et** $"a_{1,2} = a_{2,1}"$ est $Vrai$, donc b garde la valeur $\%T$.

Pour $j=3$,b est $Vrai$ **et**$''a_{1,3}=a_{3,1}''$ est $Vrai$, donc b garde la valeur $\%T$.

De même pour $i=2$. Et b aura la valeur à la fin de la fonction, ce qui est bien cohérent avec le fait que A est symétrique.

$\bullet A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&2&5\\2&5&-2\end{pmatrix}$.

b est initialisé à .

Pour $i=1$

Pour $j=2$,b est $Vrai$ \textbf{et}$''a_{1,2}=a_{2,1}''$ est $Faux$, donc b prend la valeur $\%F$.

Pour $j=3,\ b$ est $Faux$, donc peu importe la valeur de $''A(i,j)==A(j,i)\ ''$, donc b garde la valeur $\%F$.

De même pour $i=2$. Et b aura la valeur $\%F$ à la fin de la fonction.

c/ Il reste à tester si $tr\,(M)\,M^2=tr\left(M^2\right)M$, c'est-à dire si $A=B$.

Dans l'instruction $''\ if\ \ b\ \ then\ \ \ldots\ ''$, on n'effectue le $''\ then\ ''$ que si b est $Vrai$, c'est-à dire si M est symétrique. On a alors A et B symétriques, donc il suffit de tester si les termes des triangles supérieurs de A et B sont égaux pour savoir si A et B sont égaux.

La ligne manquante est : $b=(b\ \&\ \ (A(i,j)==B(i,j)))$.

$\bullet M=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. M est bien symétrique. Après calculs $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&3\\3&0\end{pmatrix}$,

donc $b=\%F$.

$\bullet M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. M est bien symétrique. Après calculs $A=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}=B$, donc $b=\%T$.

6/ a/ Supposons $X\in\ker(S)$. Alors $SX=0$, donc ${}^tS\,SX=0$, donc $X\in\ker\left({}^tS\,S\right)$.

Supposons $X\in\ker\left({}^tS\,S\right)$. Alors ${}^tS\,S\,X=0$, donc ${}^tX\,{}^tS\,S\,X=0$, donc ${}^t(SX)\,SX=0$.

On considère alors le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc $\|SX\|^2=0$.

Donc $SX=0$ et $X\in\ker(S)$.

On a donc montré que

$$\boxed{\ker(S)=\ker\left({}^tS\,S\right).}$$

On a ${}^tS\,S\in\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et $S\in\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^k$ canoniquement associé à ${}^tS\,S$ et ψ l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à S. $\mathbb{R}^k$ est donc l'ensemble de départ des deux applications linéaires φ et ψ.

Alors, par le théorème du rang,

$$\begin{aligned}rg\,(S)=\dim\left(\mathbb{R}^k\right)-\dim(\ker(S)) &= \dim\left(\mathbb{R}^k\right)-\dim\left(\ker\left({}^tS\,S\right)\right)\\ &= rg\left({}^tS\,S\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{rg\,(S)=rg\left({}^tS\,S\right).}$$

b/ On note, pour $j\in[\![1,k]\!]$, $\ S_j=\begin{pmatrix}s_{1,j}\\s_{2,j}\\\vdots\\s_{n,j}\end{pmatrix}$.

Soit $y\in E$.

$y\in F\Leftrightarrow\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^k\ /\ y=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j s_j$

$\Leftrightarrow\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^k\ /\ Y=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j S_j$

$\Leftrightarrow\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^k\ /\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \ y_i=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j s_{i,j}$

$\Leftrightarrow\exists Z\in\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\ /\ Y=SZ$ (On a posé $Z=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\end{pmatrix}$).

Donc

$$\boxed{y\in F\Leftrightarrow\exists Z\in\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\ /\ Y=SZ.}$$

c/ $F=\{y\in F\ \text{ tels que }\exists Z\in\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\ /\ Y=SZ\}$.

$\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tels que } \exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \ / \ Y = SZ\} =$
Or $\{SZ, \ \ Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\}$.

$y \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in F, \ \ \langle y, x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \forall Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}), \ \ {}^tY \times SZ = 0$ (expression du produit scalaire dans la base orthonormée $\mathcal{B}$)

$\Leftrightarrow \forall\, Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}), \ \ \left({}^tYS\right) \times Z = 0$

$\Leftrightarrow \ {}^tY\, S = 0$

$\Leftrightarrow \ {}^tS\, Y = 0$ (en transposant)

Donc

$$\boxed{y \in F^{\perp} \Leftrightarrow {}^tS\, Y = 0.}$$

d/ Soit $x \in E$ et $y = p_F(x)$.

$y = p_F(x)$ donc $y \in F$, donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \ / \ Y = SZ$.

$y = p_F(x)$, donc $x - y \in F^{\perp}$, donc ${}^tS\,(X - Y) = 0$, donc ${}^tSX = {}^tSY$.

Donc

$$\boxed{\exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \ / \ Y = SZ \text{ et } {}^tSX = {}^tS\,S\,Z.}$$

e/ On suppose que $\mathcal{F}$ est libre.

Donc $rg(S) = k$, et par la question a), $rg\left({}^tS\,S\right) = k$.

Or ${}^tS\,S \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, donc ${}^tS\,S$ est inversible.

De plus, d'après **d/** $\exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \ / \ Y = SZ$ et ${}^tSX = {}^tS\,S\,Z$,

donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \ / \ Y = SZ$ et $Z = \left({}^tS\,S\right)^{-1}{}^tSX$,

donc $Y = S\,\left({}^tS\,S\right)^{-1}{}^tSX$.

Donc

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(p_F) = S\,\left({}^tS\,S\right)^{-1}\,{}^tS.}$$

7/ a/ M est une matrice symétrique réelle, donc est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, et il existe une matrice Q orthogonale et une matrice D diagonale telles que $M = Q \times D \times {}^tQ$. On note $D = Diag(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k)$. Donc

$$\boxed{\text{il existe une matrice } Q \text{ orthogonale, et } k \text{ réels } \rho_1, \rho_2, ..., \rho_k \text{ tels que } M = Q \times Diag(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k) \times {}^tQ.}$$

b/ On a :

$$M\,M^{(-)}\,M \ = \ Q \times Diag(\rho_1, ..., \rho_k) \times \underbrace{{}^tQ \times Q}_{=I_k} \times Diag(h(\rho_1), ..., h(\rho_k)) \times \underbrace{{}^tQ \times Q}_{=I_k} \times Diag(\rho_1, ..., \rho_k) \times {}^tQ$$

car Q est une matrice orthogonale.

Donc $M\,M^{(-)}\,M = Q \times Diag\left(h(\rho_1)\,\rho_1^2, ..., h(\rho_k)\,\rho_k^2\right) \times {}^tQ$.

Or pour $i \in [\![1, k]\!]$, $h(\rho_i)\,\rho_i^2 = \begin{cases} \rho_i^2 \times \frac{1}{\rho_i} \text{ si } \rho_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \rho_i = 0 \end{cases} = \begin{cases} \rho_i \text{ si } \rho_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \rho_i = 0 \end{cases}$

Donc pour $i \in [\![1, k]\!]$, $h(\rho_i)\,\rho_i^2 = \rho_i$, donc

$$\boxed{M\,M^{(-)}\,M = Q \times Diag(\rho_1, ..., \rho_k) \times {}^tQ = M.}$$

De même, $M^{(-)}\,M\,M^{(-)} = Q\left((h(\rho_1))^2\,\rho_1, ..., (h(\rho_k))^2\,\rho_k\right) \times {}^tQ$

et pour $i \in [\![1, k]\!]$, $(h(\rho_i))^2\,\rho_i = \begin{cases} \rho_i \times \frac{1}{\rho_i^2} \text{ si } \rho_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \rho_i = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_i} \text{ si } \rho_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \rho_i = 0 \end{cases} = h(\rho_i)$.

Donc

$$\boxed{M^{(-)}\,M\,M^{(-)} = Q \times Diag(h(\rho_1), ..., h(\rho_k)) \times {}^tQ = M^{(-)}}$$

$M\,M^{(-)}$

$= Q \times Diag(\rho_1, ..., \rho_k) \times \underbrace{{}^tQ \times Q}_{=I_k} \times Diag(h(\rho_1), ..., h(\rho_k))\,{}^tQ$

$= Q \times Diag(\rho_1 h(\rho_1), ..., \rho_k h(\rho_k)) \times {}^tQ$.

Donc,

${}^t\left(M\,M^{(-)}\right) = {}^t\left({}^tQ\right) \times {}^t\left(Diag(\rho_1 h(\rho_1), ..., \rho_k h(\rho_k))\right) \times {}^tQ$

$= Q \times Diag\left(\rho_1 h\left(\rho_1\right), ..., \rho_k h\left(\rho_k\right)\right) \times {}^t Q.$

Car une matrice diagonale est symétrique.

Donc

$$\boxed{{}^t\left(M\, M^{(-)}\right) = M\, M^{(-)}}$$

On prouve de même que

$$\boxed{{}^t\left(M^{(-)}\, M\right) = M^{(-)}\, M.}$$

Et on a bien montré que $M^{(-)}$est une inverse de Penrose-Moore de M.

c/$(i) N = \underbrace{NM}\, N = \underbrace{{}^t(N\, M)}\; N = {}^t M\, {}^t N\, N = M\, {}^t N\, N$ car M est symétrique.

Donc

$$\boxed{N = M\, {}^t N\, N.}$$

$M = \underbrace{MN}\, M = \underbrace{{}^t(M\, N)}\; M = {}^t N\, {}^t M\, M.$

Or M est symétrique, donc $M = {}^t M = {}^t M\, {}^t\left({}^t M\right)\, {}^t\left({}^t N\right) = {}^t M\, MN.$

Et en utilisant à nouveau le fait que M est symétrique, on a

$$\boxed{M = M^2 N.}$$

(ii) On supose que $M^2 U = 0$. On note $U_1, U_2, ..., U_k$ les colonnes de U.

Alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]\,,\; M^2 U_k = 0.$

Donc ${}^t M\, M\, U_j = 0$ car M est symétrique, donc ${}^t U_j\, {}^t M\, M\, U_j = 0$, donc ${}^t\left(MU_j\right)\; MU_j = 0.$

Et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{k,1}\left(\mathbb{R}\right)$, on a $||MU_j||^2 = 0$, donc $MU_j = 0.$

Donc $\forall j \in [\![1, k]\!]\,,\; MU_j = 0$, donc

Donc $\forall j \in [\![1,k]\!],\ MU_j = 0$, donc

$$\boxed{MU = 0.}$$

(iii) On pose $U = N - M^{(-)}$.

On a d'après (i), car N et $M^{(-)}$ sont des inverses de Penrose-Moore,

$M^2\,U = M^2N - M^2M^{(-)} = M - M = 0$. Donc $M^2U = 0$, donc d'après (ii), $MU = 0$,

donc $MN = MM^{(-)}$.

De plus, en reprenant le même type de calculs qu'au (i),

$M = M\,\underbrace{NM} = M\,{}^t(NM) = M\,{}^tM\,{}^tN = M^2\,{}^tN$ car N est symétrique.

Et en prenant $U = {}^tN - {}^t\left(M^{(-)}\right)$, on trouve de même que ci-dessus, $M\,{}^tN = M\,{}^t\left(M^{(-)}\right)$.

Donc $N \underbrace{=}_{(i)} M\,{}^tN\,N \underbrace{=}_{(iii)} M\,{}^t\left(M^{(-)}\right)\,N \underbrace{=}_{M\ \mathrm{sym}} {}^t\left(M^{(-)\,M}\right)\,N \underbrace{=}_{\mathrm{déf}} M^{(-)}M\,N$

Donc $N \underbrace{=}_{(iii)} M^{(-)}\,M\,M^{(-)} \underbrace{=}_{\mathrm{déf}} M^{(-)}$. Donc

$$\boxed{N = M^{(-)}.}$$

Donc si N est une inverse de Penrose-Moore de M, alors N est unique et $N = M^{(-)}$.

On a montré au a) que $M^{(-)}$ était une inverse de Penmore-Moore de M.

Donc

$$\boxed{M^{(-)}\ \text{est l'unique inverse de Penrose-Moore de}\ M.}$$

8/ a/ Résultat préliminaire : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.

On a $Im\,(AB) \subset Im\,(A)$, donc $rg\,(AB) \leqslant rg\,(A)$.

Une matrice et sa transposée ayant même rang, on a

$rg\,(AB) = rg\left({}^t(AB)\right) = rg\left({}^tB\,{}^tA\right) \leqslant rg\left({}^tB\right) = rg\,(B)$.

Donc $rg\,(AB) \leqslant rg\,(A)$ et $rg\,(AB) \leqslant rg\,(B)$.

Ici, $P = \underbrace{S}_{=A}\ \underbrace{\left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS}_{=B}$, donc $rg\,(P) \leqslant rg\,(S)$.

De plus, $P = S\ \left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS$, donc ${}^tS\,P\,S = {}^tSS\ \left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS\,S = {}^tS\,S$ par définition de $\left({}^tS\,S\right)^{(-)}$ au début du 15.

Donc ${}^tS\,P\,S = {}^tS\,S$, donc $rg\left({}^tS\,P\,S\right) = rg\left({}^tS\,S\right) = rg\,(S)$ d'après 14.a), donc $rg\left({}^tS\,P\,S\right) = rg\,(S)$.

De plus, d'après le résultat préliminaire, $rg\left({}^tS\,P\,S\right) \leqslant rg\,(PS) \leqslant rg\,(P)$.

Donc $rg\,(S) \leqslant rg\,(P)$.

Donc

$$\boxed{rg\,(S) = rg\,(P).}$$

b/ En utilisant les propriétés de $\left({}^tS\,S\right)^{(-)}$, on montre que ${}^tP = P$ et que $P^2 = P$, donc que P est la matrice d'un projecteur orthogonal que l'on note p.

D'après 14.c/ pour $x \in F^{\perp}$, On a ${}^tS\,X = 0$, donc $PX = 0$, donc $F^{\perp} \subset \ker\,(p)$.

Or $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - \dim\,(F) = n - rg\,(S) = n - rg\,(P) = \dim\,(\ker\,(p))$. Donc $F^{\perp} = \ker\,(p)$.

Donc

$$\boxed{p\ \text{est le projecteur orthogonal sur}\ F.}$$

9/ a/ On sait que $rg\,(S) = rg\ \left({}^tS\,S\right)$. Or ${}^tS\,S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ${}^tS\,S$ n'est pas inversible, donc $rg\ \left({}^tS\,S\right) \leqslant 1$, donc $rg\,(S) \leqslant 1$ et (s_1, s_2) est une famille liée.

Comme $s_1 \neq 0, \exists\theta \in \mathbb{R}\ /\ s_2 = \theta s_1$, donc

$$\boxed{\exists\theta \in \mathbb{R}\ /\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \beta_i = \theta\alpha_i.}$$

b/ On a :

$${}^tS\,S \ = \ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \theta\alpha_1 & \cdots & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \theta\alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \theta\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 & \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\ \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 & \theta^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \|s_1\|^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}}_{=M}.$$

Les deux colonnes de M sont proportionnelles, donc M n'est pas inversible, et 0 est valeur propre de M. Un vecteur propre associée est, par exemple, $\begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}$.

M est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et il existe Q orthogonale et Δ diagonale telles que $M = Q \times \Delta \times {}^tQ$.

On pose, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

M et Δ sont semblables, donc ont même trace, donc $tr\,(M) = tr\,(\Delta)$, donc $\lambda = 1 + \theta^2$.

Un vecteur propre associé à $1 + \theta^2$ est, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille de vecteurs propres, clairement orthonormée. Elle est donc libre, de cardinal 2, et comme $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$, c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Donc, en posant $Q = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^tS\,S = Q \times \begin{pmatrix} \|s_1\|^2 (1+\theta^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times {}^tQ$.

Donc

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } {}^tQ\,{}^tS\,S\,Q \text{ est diagonale.}}$$

c/ D'après la question **7/ b/**, on a :

$$\begin{aligned} \left({}^tS\,S\right)^{(-)} &= Q \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times {}^tQ = \frac{1}{1+\theta^2} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2 (1+\theta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|s_1\|^2 (1+\theta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\left({}^tS\,S\right)^{(-)} = \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.}$$

d/ On reprend les notations de la question 8, et on note P la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$.

On a donc

$$\begin{aligned} PX &= S\left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS\,X \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2 (1+\theta^2)^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \theta\alpha_1 \\ \alpha_2 & \theta\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \theta\alpha_1 & \theta\alpha_2 & \cdots & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2 (1+\theta^2)^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 (1+\theta^2) & \alpha_1\theta (1+\theta^2) \\ \alpha_2 (1+\theta^2) & \alpha_2\theta (1+\theta^2) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n (1+\theta^2) & \alpha_n\theta (1+\theta^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $PX = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\|s_1\|^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{p_F(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\|s_1\|^2}.s_1 = \frac{\langle s_1, x \rangle}{\|s_1\|^2} s_1.}$$

... et on retrouve la formule du cours, car $F = vect\,(s_1, s_2) = vect\,(s_1)$ puisque (s_1, s_2) est liée et $s_1 \neq 0$.

COURS PARTICULIERS

Nous avons sélectionné pour vous les meilleurs professeurs particuliers.

POUR ACCÉLÉRER MA PROGRESSION

Je trouve des cours particuliers

Avis Google France ★★★★★ 4,9 sur 5

Partie III : densité et gaussienne centrée

10/ ● Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, donc $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,1\right)$.

● Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}\left(0,1\right)$. On note Φ sa fonction de répartition et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ sa densité usuelle.

On note $T = \frac{Z^2}{2}$

On a $T\left(\Omega\right) = \mathbb{R}_+$, donc, pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_T\left(x\right) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F_T\left(x\right) = P\left(T \leqslant x\right) = P\left(Z^2 \leqslant 2x\right) = P\left(\left|Z\right| \leqslant \sqrt{2x}\right)$

$= P\left(-\sqrt{2x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{2x}\right) = \Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2x}\right)$.

Or Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus $x \mapsto \sqrt{2x}$ et $x \mapsto -\sqrt{2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. F_T étant nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a aussi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Enfin $\lim\limits_{x\to 0^-} F_T\left(x\right) = 0$, $F_T\left(0\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_T\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2x}\right)\right) = 0$ car Φ est continue en 0 et $\sqrt{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, donc F_T est continue en 0.

F_T est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, donc

$$\boxed{T \text{ est une variable à densité.}}$$

On obtient une densité de T en dérivant F_T sur $\mathbb{R}^*$ et en donnant une valeur arbitraire positive à $F_T\left(0\right)$.

Donc une densité f_T est donnée par :

$$f_T\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) + \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\left(-\sqrt{2}\sqrt{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f_T\left(x\right) = \begin{cases} 2 \times \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-x\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} =$$

D'où : $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\exp\left(-x\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Donc $f_T\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-x\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

f_T étant une densité, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T\left(t\right)\,dt = 1$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-t\right)\,dt = 1$.

Donc, on a $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1$.

Donc $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, et on trouve :

$$\boxed{f_T\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-x\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

. Donc

$$\boxed{T \text{ suit la loi } \gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).}$$

● On note, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $T_i = \frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$. Comme $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,1\right)$, on sait que $T_i \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par le point précédent.

Les variables T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes (par le lemme des coalitions car les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le sont), et toutes de loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc, par stabilité de la loi γ, $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ suit la loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, donc

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).}$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \chi^2\left(n\right).}$$

11/ a/ On pose $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$H = MG$, donc pour $i \in [\![1,n]\!]$, $H_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{m_{i,j}}_{\text{réel}} G_j$.

$\left(G_1,\ldots,G_n\right)$ est un vecteur gaussien, donc par définition, pour $i \in [\![1,n]\!]$, H_i est une variable gaussienne centrée.

Soit alors $a = \left(a_1,\ldots,a_n\right)$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i H_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} G_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i m_{i,j} G_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} a_i \right)}_{\text{réel}} G_j.$$

$(G_1, ..., G_n)$ est un vecteur gaussien, donc par définition, $\sum_{i=1}^{n} a_i H_i$ est une variable gaussienne centrée.

Donc

$$\boxed{(H_1, ..., H_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$$

b/ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, G_i admet un moment d'ordre 2, donc d'après le cours,

$$\boxed{\text{pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ , } G_i G_j \text{ admet une espérance.}}$$

12/ a/ Soit $a = (a_1, ..., a_n)$.

Si $a = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i G_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i G_i$ est une gaussienne centrée.

On suppose $a \neq 0$ pour la suite du raisonnement.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

● ou bien $a_i \neq 0$. Alors $a_i G_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, a_i^2\right)$ (stabilité par transformation affine de la loi normale).

● ou bien $a_i = 0$. Alors $a_i G_i$ est la variable constante nulle.

On note $I = \{i \in [\![1, n]\!] \ / \ a_i \neq 0\}$. $I \neq \varnothing$ car $a \neq 0$.

Les variables $a_i G_i, \ i \in I$, sont indépendantes et toutes de loi normale, donc, par stabilité de la loi normale, $\sum_i a_i G_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_i a_i^2\right)$.

Or $\sum_{i \in I} a_i G_i = \sum_{i=1}^{n} a_i G_i$ car on rajoute des variables constantes nulles et $\sum_i a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ car on rajoute des termes nuls,
donc $\sum_{i=1}^{n} a_i G_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} a_i G_i$ est une gaussienne centrée.

Donc pour tout $a = (a_1, ..., a_n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_i G_i$ est une gaussienne centrée,

donc

$$\boxed{(G_1, G_2, ..., G_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$.

$E(G_i G_j) = E(G_i) E(G_j)$ car G_i et G_j sont indépendantes.

Donc $E(G_i G_j) = 0$ car $E(G_i) = 0$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $E(G_i G_i) = E\left(G_i^2\right) \underbrace{=}_{\text{Koenig-Huygens}} \underbrace{V(G_i)}_{=1} + \underbrace{[E(G_i)]^2}_{=0} = 1.$

Donc

$$\boxed{\Lambda(G) = I_n.}$$

b/ On note $Q = (q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$H = QG$, donc par définition du produit matriciel, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $H_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} G_j$.

Q est orthogonale, donc $Q\,{}^t Q = I_n$

● Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$(G_1, ..., G_n)$ est un vecteur gaussien d'après la question précédente.

Donc $(H_1, ..., H_n)$ est un vecteur gaussien d'après la question 11/ a/.

En prenant $a = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, avec 1 en $i^{ème}$ position, on a H_i est une gaussienne centrée.

Or $V(H_i) = V\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} G_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (q_{i,j})^2 \underbrace{V(G_j)}_{=1}$ car les variables $G_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

Donc $V(H_i) = \sum_{j=1}^{n} (q_{i,j})^2 = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} \times q_{i,j} = 1$ car on reconnaît un terme diagonal de $Q\,{}^t Q = I_n$.

Donc

$$\boxed{H_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).}$$

● Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$E(H_iH_j) = E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} q_{i,k}G_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} q_{j,l}G_l\right)\right)$

$= E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{i,k}q_{j,l}G_kG_l\right)$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{i,k}q_{j,l}E(G_kG_l)$ par linéarité de l'espérance

$= \sum_{k=1}^{n} q_{i,k}q_{j,k}\underbrace{E(G_k^2)}_{=1} + \sum_{k\neq l} q_{i,k}q_{j,l}\underbrace{E(G_kG_l)}_{=0}$ d'après $a)$

$= \sum_{k=1}^{n} q_{i,k}q_{j,k}$

On reconnaît le terme général de $Q\,{}^tQ$.

Donc $\Lambda(H) = Q\,{}^tQ = I_n$ car Q est une matrice orthogonale.

Donc

$$\boxed{\Lambda(H) = \Lambda(G).}$$

Donc pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(H_i \leqslant x_i)\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(G_i \leqslant x_i)\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(G_i \leqslant x_i)$ par indépendance des $G_i, 1 \leqslant i \leqslant n$

$= \prod_{i=1}^{n} P(H_i \leqslant x_i)$ car H_i et G_i ont même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc

$$\boxed{\text{les variables } H_1, H_2, ..., H_n \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

13/ a/ $\sum_{i=1}^{k} P_i = I_n$ et $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, donc d'après la question $3.c/$, $P_1, P_2, ..., P_k$ sont des matrices de projecteurs notés respectivement $p_1, p_2, ..., p_k$.

De plus, $P_1 = mat_{\mathcal{B}}(p_1), ..., P_k = mat_{\mathcal{B}}(p_k)$ sont symétriques réelles et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, donc d'après la question 4.a),

$$\boxed{P_1, ..., P_k \text{ sont des matrices de projecteurs orthogonaux.}}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$, avec $i \neq j$.

Soit $(x,y) \in Im(p_i) \times Im(p_j)$.

$\langle x,y\rangle = \langle p_i(x), p_j(y)\rangle$ car $Im(p_i) = \ker(p_i - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $Im(p_j) = \ker(p_j - Id_{\mathbb{R}^n})$

Donc $\langle x,y\rangle = \langle x, p_i(p_j(y))\rangle$ car p_i est un endomorphisme symétrique (sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ orthonormée est symétrique réelle)

Or $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ d'après la question 3.c/ puisque $i \neq j$, donc $\langle x,y\rangle = 0$.

Donc

$$\boxed{Im(p_i) \text{ et } Im(p_j) \text{sont orthogonaux.}}$$

b/ D'après la question 3, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} Im(p_i)$.

On note, pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathcal{B}'_i$ une base orthonormée de $Im(p_i)$, et $\mathcal{B}'$ la concaténation des $\mathcal{B}'_i, 1 \leqslant i \leqslant k$. $\mathcal{B}'$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Q est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, c'est donc une matrice orthogonale.

On note pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\Delta_i = Q\,P_i\,{}^tQ = mat_{\mathcal{B}'}(p_i)$.

Pour $i \in [\![1,k]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $Im(p_i)$. Donc les vecteurs de $\mathcal{B}'_i$ ont pour image eux-mêmes car ils sont dans $Im(p_i)$, et les vecteurs de $\mathcal{B}' \backslash \mathcal{B}'_i$ sont dans $(Im(p_i))^{\perp}$ d'après la question précédente, donc dans $\ker(p_i)$.

Donc pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\Delta_i = Diag\left(\underbrace{0,...,0}_{r_1 \text{ fois}}, ..., \underbrace{0,...,0}_{r_{i-1} \text{ fois}}, \underbrace{1,...,1}_{r_i \text{ fois}}, \underbrace{0,...,0}_{r_{i+1} \text{ fois}}, ..., \underbrace{0,...,0}_{r_k \text{ fois}}\right)$.

Donc

$$\boxed{\text{il existe } Q \text{ orthogonale telle que pour tout } i \in [1,k],\ Q\,P_i\,{}^tQ \text{ est diagonale.}}$$

c/ On suppose que $r_1 \neq 0$. ${}^tG\,P_1\,G = {}^tG\,{}^tQ\,\Delta_1\,Q\,G = {}^t(QG)\,\Delta_1\,(QG)$

$(G_1, ..., G_k)$ est un vecteur gaussien et toutes les variables aléatoires ont une variance égale à 1, donc avec la même démarche qu'à la question 12.a), on montre que $G_1, ..., G_k$ suivent toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose $H = QG$.

Q est une matrice orthogonale, et $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc d'après la question 12.b/, $H_1, \ldots, H_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

De plus, ${}^t(QG)\ \Delta_1\ (QG) = \sum_{i=1}^{r_1} H_i^2$, et les variables aléatoires $H_1, \ldots, H_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc, d'après la question 10, avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, $\sum_{i=1}^{r_1} H_i^2 \hookrightarrow \chi^2(r_1)$. Donc

$$\boxed{{}^tG\,P_1\,G \hookrightarrow \chi^2(r_1).}$$

d/ Avec les mêmes notations qu'au **c/**, on a

$${}^tG\,P_1\,G = \sum_{i=1}^{r_1} H_i^2,\quad {}^tG\,P_2\,G = \sum_{i=r_1+1}^{r_2} H_i^2,\quad \ldots\quad, {}^tG\,P_k\,G = \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} H_i^2.$$

Or les variables $H_1, H_2, \ldots, H_k$ sont mutuellement indépendantes, donc par le lemme des coalitions,

$$\boxed{{}^tG\,P_1\,G, {}^tG\,P_2\,G, \ldots, {}^tG\,P_k\,G \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

Contact

3 rue de l'Estrapade 75005 Paris

contact@groupe-reussite.fr

01 84 88 32 69

Qui sommes-nous ?

Témoignages

Notre newsletter

Nous rejoindre

Devenir professeur

Notre équipe

Copyright @ GROUPE REUSSITE - Mentions légales

groupe-reussite.fr est évalué 4,9/5 par 819 clients sur Google France