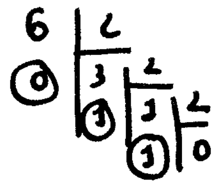
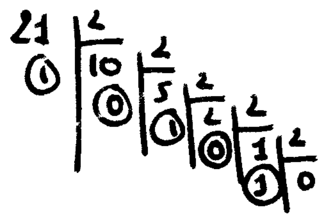
PARTIE I Introduction informatique

(Q1) Rappelons que pour obtenir l'écriture binaire d'un entier n, de la droite vers la gauche il suffit de considérer la suite des restes dans les divisions successives de n par 2 jusqu'à obtenir un quotient nul.



Alors $6 = \overline{110}^2$ donc $\text{bin}(6) = (0,0,1,1,0)$.



$21 = \overline{10101}^2$ donc $\text{bin}(21) = (1,0,1,0,1)$.

(Q2) L'algorithme s'appuie sur le rappel proposé dans la question 1.

```
Program essec03_M2;

type ecriture=array[1..5] of integer;
var n,k:integer;l:ecriture;

procedure bin(n:integer;var L:ecriture);

var i,q:integer;

begin

for i:=1 to 5 do l[i]:=0;

i:=6;q:=n;

repeat
i:=i-1;l[i]:= q mod 2;q:=q div 2;
until q=0;

end;


begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
bin(n,l);


for k:=1 to 5 do write(' ',l[k]);

end.
```

(Q3) → $\text{bin}(6) = (0,0,1,1,0)$.

Alors $L(1)=L(2)=L(5)=0$ et $L(3)=L(4)=1$.

$\underbrace{2L(1)+L(2)+1 = 1}_{\text{famille}}$ et $\underbrace{4L(3)+2L(4)+L(5)+1 = 7}_{\text{valeur}}$

La carte n°6 est le roi de trèfle.

→ $\text{bin}(1) = (0,0,0,0,1)$

Alors $L(1)=L(2)=L(3)=L(4)=0$ et $L(5)=1$.

$2L(1)+L(2)+1 = 1$ et $4L(3)+2L(4)+L(5)+1 = 2$

La carte n°1 est le huit de trèfle.

→ La carte n est la carte n° $\overline{a_4a_3}^2+1$ de la famille n° $\overline{a_2a_1a_0}^2+1$

$n = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}^2$. La dame de cœur est la carte N° $6 = 5+1 = \overline{101}^2+1$ de la famille N°$3 = 2+1 = \overline{10}^2+1$. Ainsi le numéro de cette carte est $\overline{10101}^2 = \underline{21}$!

PARTIE II Position du problème et recherche des fonctions solutions

Q1

- $i_\varphi(\Omega) = \varphi(P(\Omega)) = \varphi(1) = 0$ d'où (i).
- Soit A un événement tel que $P(A) = P(\bar{A})$. Alors $P(A) = 1 - P(A)$ donc $P(A) = \frac{1}{2}$.

  $i_\varphi(A) = \varphi(P(A)) = \varphi(\frac{1}{2}) = 1$. Ceci achève de montrer (ii)
- Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A \cap B) \neq 0$.

  Notons que $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ donc $0 < P(A \cap B) \leq P(A)$ et $0 < P(A \cap B) \leq P(B)$

  Par conséquent $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

  $i_\varphi(A \cap B) = \varphi(P(A \cap B)) = \varphi(P(A)P(B)) = \varphi(P(A)) + \varphi(P(B)) = i_\varphi(A) + i_\varphi(B)$ d'où (iii).
- Soient A et B deux événements tels que $P(A) = P(B) \neq 0$.

  Alors $i_\varphi(A) = \varphi(P(A)) = \varphi(P(B)) = i_\varphi(B)$ d'où (iv).

Alors i_φ vérifie (i), (ii), (iii) et (iv).

Q2 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$\varphi_{\alpha,\beta}$ vérifie (1) et (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ln 1 + \beta = 0 \\ \alpha \ln \frac{1}{2} + \beta = 1 \\ \forall (p,q) \in]0,1]^2, \alpha \ln(pq) + \beta = \alpha \ln p + \beta + \alpha \ln q + \beta \end{cases}$

$\varphi_{\alpha,\beta}$ vérifie (1) et (2) $\Leftrightarrow \beta = 0$, $\alpha = -\frac{1}{\ln 2}$, $\forall (p,q) \in]0,1]^2$, $\alpha \ln p + \alpha \ln q + \beta = \alpha \ln p + \alpha \ln q + 2\beta$

$\varphi_{\alpha,\beta}$ vérifie (1) et (2) $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\ln 2}$ et $\beta = 0$.

Il existe un couple de réels (α, β) et un seul tel que $\varphi_{\alpha,\beta}$ vérifie (1) et (2), ce couple est $(-\frac{1}{\ln 2}, 0)$

Q3 a) Soit p un élément de $]0,1]$. Considérons le changement de variable $q = \frac{t}{p}$.

$$\frac{1}{p}\int_{p/2}^{p} \varphi(t)\,dt \underset{q=\frac{t}{p};\ dt = p\,dq}{=} \frac{1}{p}\int_{1/2}^{1} \varphi(pq)\,p\,dq = \int_{1/2}^{1} \varphi(pq)\,dq = \int_{1/2}^{1} (\varphi(p) + \varphi(q))\,dq = (1 - \tfrac{1}{2})\varphi(p) + \int_{1/2}^{1} \varphi(q)\,dq$$

Ainsi $\forall p \in]0,1]$, $\frac{1}{p}\int_{p/2}^{p} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\varphi(p) + \int_{1/2}^{1} \varphi(q)\,dq$.

b) $\forall p \in]0,1]$, $\varphi(p) = \frac{2}{p}\int_{p/2}^{p} \varphi(t)\,dt - 2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$.

Soit Φ une primitive de φ sur $]0,1]$ (φ est continue sur $]0,1]$).

$\forall p \in]0,1]$, $\int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt = \Phi(p) - \Phi(p/2)$. Φ étant dérivable sur $]0,1]$, $p \mapsto \frac{p}{2}$ également on peut dire que $p \mapsto \int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt$ est dérivable sur $]0,1]$ car $\forall p \in]0,1]$, $\frac{p}{2} \in]0,1]$.

De plus $p \mapsto \frac{1}{p}$ est dérivable sur $]0,1]$. Alors $p \mapsto \frac{2}{p}\int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt$ est dérivable sur $]0,1]$.

$p \mapsto -2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$ est également dérivable sur $]0,1]$ comme fonction constante.

Alors, par somme, φ est dérivable sur $]0,1]$.

Notons que la dérivée de $\ell : p \mapsto \int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt$ est $p \to \Phi'(p) - \frac{1}{2}\Phi'(p/2)$ et que :

$\forall p \in]0,1]$, $\ell'(p) = \varphi(p) - \frac{1}{2}\varphi(p/2) = \varphi(p) - \frac{1}{2}(\varphi(p) + \varphi(1/2)) = \frac{1}{2}\varphi(p) - \frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\varphi(p) - \frac{1}{2}$.

$\forall p \in]0,1]$, $p\varphi(p) = p\left[\frac{2}{p}\int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt - 2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq\right] = 2\int_{p/2}^{p}\varphi(t)\,dt - 2p\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$

En dérivant il vient : $\forall p \in]0,1]$, $\varphi(p) + p\varphi'(p) = 2\left(\frac{1}{2}\varphi(p) - \frac{1}{2}\right) - 2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$

Ainsi $\forall p \in]0,1]$, $p\varphi'(p) = -1 - 2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$.

Alors $\forall p \in]0,1]$, $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p\varphi'(p) + \int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$.

c) $\forall p \in]0,1]$, $\varphi'(p) = -\frac{1}{p} - \frac{2}{p}\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq$. Posons $\alpha = -(1 + 2\int_{1/2}^{1}\varphi(q)\,dq)$.

Alors $\forall p \in]0,1]$, $\varphi'(p) = \frac{\alpha}{p}$. Donc $\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall p \in]0,1]$, $\varphi(p) = \alpha \ln|p| + \beta$.

donc $\forall p \in]0,1]$, $\varphi(p) = \alpha \ln p + \beta$. $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$.

Ainsi $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$. Mieux $\varphi = \varphi_{-\frac{1}{\ln 2}, 0}$ (d'après Q2)

Q4) Q2 et Q3 montrent qu'il existe une application continue de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et une seule qui vérifie (1) et (2). Cette application est $\varphi_{-\frac{1}{\ln 2}, 0}$.

PARTIE III Incertitude des événements

(Q1) $P(A) = \frac{1}{32}$. $i(A) = \varphi(P(A)) = -\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{32} = -\frac{1}{\ln 2} \ln 2^{-5} = 5$. $i(A) = 5$.

(Q2) $\text{card} E = 2^n$. $P(A) = \frac{1}{2^n}$. $i(A) = -\frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = n$. $i(A) = n$.

(Q3) $A \subset B$ donc $P(A) \leq P(B)$. $\ln(P(A)) \leq \ln(P(B))$. $-\frac{1}{\ln 2} \ln P(A) \geq -\frac{1}{\ln 2} \ln P(B)$.

$\forall (A,B) \in \Omega^2$, $A \subset B$ et $P(A) \neq 0 \Rightarrow i(B) \leq i(A)$.

(Q4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} \ln x\right) = +\infty$. Rappel : $\forall A \in \mathcal{B}$, $P(A) \neq 0 \Rightarrow i(A) = \varphi(P(A))$.

Ainsi plus la probabilité d'un événement est petite plus sa incertitude est grande.

PARTIE IV Incertitude d'une variable aléatoire discrète

(Q1) $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U_n = k) = \frac{1}{n}$. $H(U_n) = \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) = n\, h\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(-\frac{1/n}{\ln 2} \ln \frac{1}{n}\right)$

Ainsi $H(U_n) = \frac{\ln n}{\ln 2}$.

(Q2) $H(Y) = h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{4} \frac{\ln(1/4)}{\ln 2}\right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln(1/2)}{\ln 2}\right)$.

$H(Y) = \frac{1}{2} \frac{\ln 2^2}{\ln 2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $H(Y) = \frac{3}{2}$.

$H(U_2) = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$; $H(U_3) = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ et $H(Y) = \frac{3}{2}$.

$\ln 9 > \ln 8$ donc $\ln 3^2 > \ln 2^3$; $2 \ln 3 > 3 \ln 2$; $\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{3}{2}$. $H(Y) < H(U_3)$.

Ainsi $H(U_2) < H(Y) < H(U_3)$.

(Q3) $x \mapsto -x \frac{\ln x}{\ln 2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h est continue sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-x \frac{\ln x}{\ln 2}\right) = 0 = h(0)$ donc h est continue (à droite) en 0.

h est continue sur $[0,1]$.

$h(0)=0\geqslant 0$ et $\forall x\in]0,1]$, $h(x)=-x\dfrac{\ln x}{\ln 2}\geqslant 0$. h est positive sur $[0,1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)=+\infty$; h n'est pas dérivable en 0.

$\forall x\in]0,1]$, $h'(x)=-\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln x+x\times\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{\ln 2}(\ln x+1)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln\dfrac{1}{e}-\ln x\right)$.

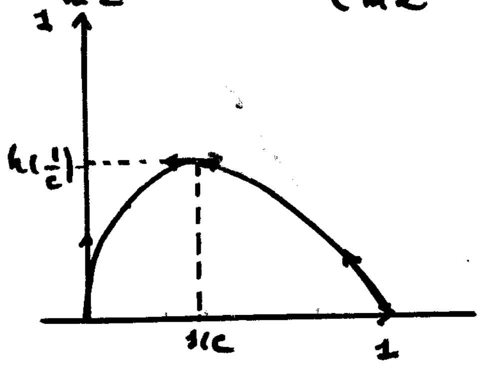
$\forall x\in]0,\frac{1}{e}[$, $h'(x)>0$; $h'(\frac{1}{e})=0$; $\forall x\in]\frac{1}{e},1[$, $h'(x)<0$.

Comme h est continue sur $[0,1]$, ceci suffit pour dire que h est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{e}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{e},1]$

Notons que $h(1)=0$ et que $h'(1)=-\dfrac{1}{\ln 2}$. $h(\frac{1}{e})=\dfrac{1}{e\ln 2}$. $h'(1)\simeq$

$h(1/e)\simeq$

x	0		$1/e$		1
$h'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln 2}$	$\searrow$	0



(Q4) Supposons que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1,x_2,\dots,x_n$ deux à deux distincts. Posons $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $p_k=P(X=k)$

$H(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}h(p_k)\geqslant 0$ (h est positive sur $[0,1]$).

Notons que l'étude précédente permet de dire que $\forall x\in[0,1]$, $h(x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$ car $h(0)=h(1)=0$, h est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{e}]$ et strictement décroissante sur $[1/e,1]$.

Supposons que $H(X)=0$. Alors $\sum\limits_{k=1}^{n}h(p_k)=0$. h étant positive sur $[0,1]$:

$\forall k\in [\![1,n]\!]$, $h(p_k)=0$; $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $p_k\in\{0,1\}$.

$\forall l \in [\![1,n]\!]$, $p_l \in \{0,1\}$ et $p_1+p_2+\cdots+p_n = 1$.

Alors il existe un élément l_0 de $[\![1,n]\!]$ et un seul tel que $p_{l_0}=1$.

Donc $p_{l_0}=1$ et $\forall l \in [\![1,n]\!]$, $l \neq l_0 \Rightarrow p_l = 0$.

Par conséquent $P(X=x_{l_0})=0$ et $\forall l \in [\![1,n]\!]-\{l_0\}$, $P(X=x_l)=0$.

X est donc une variable quasi-certaine si $H(X)=0$.

Réciproquement supposons X quasi-certaine. Alors $\exists l_0 \in [\![1,n]\!]$, $P(X=x_{l_0})=1$ et $\forall l \in [\![1,n]\!]-\{l_0\}$, $P(X=x_l)=0$.

Par conséquent $H(X) = \sum_{l=1}^{n} h(P(X=x_l)) = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq l_0}}^{n} h(0) + h(1) = 0$; $H(X)=0$.

Alors X est une variable quasi-certaine si et seulement si $H(X)=0$

Q5 a) $\forall x \in [0,1]$, $h_2(x) = h(1-x)$ ou $\forall x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $h_2(\frac{1}{2}+x) = h_2(\frac{1}{2}-x)$

ce qui signifie que la courbe représentative de h_2 admet la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ pour axe de symétrie (courbe représentative dans un repère orthonormé ...)

b) $x \mapsto 1-x$ est continue sur $[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$ $1-x \in [0,1]$ et h est continue sur $[0,1]$ donc h_2 est continue sur $[0,1]$.

$x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$ et h est dérivable sur $]0,1[$

Ainsi h_2 est dérivable sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $h_2'(x) = h'(x) - h'(1-x) = -\frac{1}{\ln 2}[\ln x + 1] + \frac{1}{\ln 2}[\ln(1-x)+1]$

$\forall x \in]0,1[$, $h_2'(x) = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1-x) - \ln x\right]$.

h_2 est continue sur $[0,1]$, $\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$, $h_2'(x) > 0$, $h_2'(\frac{1}{2}) = 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{2},1[$, $h_2'(x) < 0$.

Alors h_2 est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$.

$h_2(0)=h_2(1)=0$. $h_2(\frac{1}{2})=2h(\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2}\,\frac{\ln 1/2}{\ln 2})=1$.

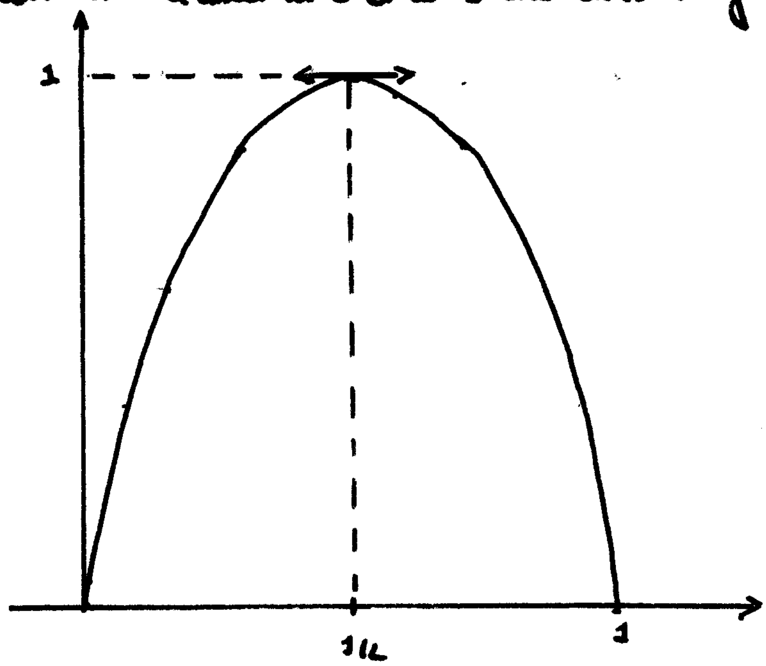
$$\lim_{x\to 0}\frac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0} \underset{h(0)=h(1)=0}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)-}{x-0}-\frac{h(1-x)-h(1)}{(1-x)-1}\right)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to 0}\frac{h(x)-0}{x-0}=+\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(1-x)-h(1)}{(1-x)-1}\right)=h'(1).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{h_2(x)-h_2(1)}{x-1} \overset{h(0)=h(1)=0}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)-h(1)}{x-1}-\frac{h(1-x)-h(0)}{(1-x)-0}\right)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

$$\text{et } \lim_{x\to 1}\frac{h(1-x)-h(0)}{(1-x)-0}=\lim_{y\to 0}\frac{h(y)-h(0)}{y-0}=+\infty.$$

h_2 n'est ni dérivable en 0 ni dérivable en 1 mais sa courbe représentative dans un repère orthonormé admet en 0 et en 1 une demi-tangente verticale.



c) $H(X)=h(P(X=0))+h(P(X=1))=h(1-p)+h(p)=h_2(p)\leq 1$.

Rappelons que h_2 est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$ et $h_2(\frac{1}{2})=1$. Alors $\forall x\in[0,1]$, $h_2(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Ainsi $H(X)=1 \Leftrightarrow h_2(p)=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$.

$H(X)\leq 1$ avec égalité si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

Q6 $P(Z=1)=P(\text{"}X_1+X_2 \text{ est impair"})=P\big((\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\})\cup(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})\big)$

Par incompatibilité il vient : $P(Z=1)=P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\})+P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})$

Par indépendance il vient : $P(Z=1)=P(X_1=0)P(X_2=1)+P(X_1=1)P(X_2=0)=(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)$.

$P(Z=1)=p_1+p_2-2p_1p_2$. $P(Z=0)=1-p_1-p_2+2p_1p_2$. $E(Z)=p_1+p_2-2p_1p_2$.

$1-2p=1-2P(Z=1)=1-2p_1-2p_2+4p_1p_2=1-2p_1-2p_2(1-2p_1)=(1-2p_1)(1-2p_2)$.

Si $p=P(Z=1)$: $1-2p=(1-2p_1)(1-2p_2)$.

Q7 Montrons le résultat par récurrence sur n.

→ $n=1$. X suit une loi binomiale de paramètres 1 et p.

$P(Z_1=1)=P(\text{"}X \text{ est impair"})=P(X=1)=p$. $1-2P(Z_1=1)=1-2p=(1-2p)^1$.

La propriété est vraie pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n+1$ et p.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires de Bernoulli sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$, indépendantes et de même paramètre p. $X_1+X_2+\dots+X_{n+1}$ a même loi que X. Posons $Y=X_1+\dots+X_n$; $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Posons $p'=P(\text{"}Y \text{ est impair"})$. L'hypothèse de récurrence indique que $2p'-1=(2p-1)^n$.

Alors $P(\text{"}X \text{ est impair"})=P(\text{"}Y+X_{n+1} \text{ est impair"})=P\big((\text{"}Y \text{ est pair"}\cap\{X_{n+1}=1\})\cup$
$(\text{"}Y \text{ est impair"}\cap\{X_{n+1}=0\})\big)=P(\text{"}Y \text{ est pair"}\cap\{X_{n+1}=1\})+P(\text{"}Y \text{ est impair"}\cap\{X_{n+1}=0\})$.

$X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes donc Y et X_{n+1} le sont également.

Alors $P(\text{"}X \text{ est impair"})=P(\text{"}Y \text{ est pair"})P(X_{n+1}=1)+P(\text{"}Y \text{ est impair"})P(X_{n+1}=0)$.

$P(\text{"}X \text{ est impair"})=(1-p')p+p'(1-p)$. $P(Z_{n+1}=1)=p+p'-2pp'$

Alors $1-2P(Z_{n+1}=1)=1-2p-2p'+4pp'=(1-2p)(1-2p')=(1-2p)(1-2p)^n=(1-2p)^{n+1}$.

Ceci achève la récurrence.

" $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1-2P(Z_n=1)=(1-2p)^n$ ".

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $H(Z_n)\leq 1$ car Z_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1-(1-2p)^n}{2}$ et $\frac{1-(1-2p)^n}{2}\in\,]0,1[$.

D'après Q5 : $H(Z_n)=1 \iff \frac{1-(1-2p)^n}{2}=\frac{1}{2} \iff (1-2p)^n=0 \iff p=\frac{1}{2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H(Z_n)\leq 1$ avec égalité si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

PARTIE IV Maximalité de l'entropie.

Q1 Posons $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\forall (p_1,\dots,p_{n-1})\in\mathcal{O}$, $u_k(p_1,\dots,p_{n-1})=p_k$

Posons $\forall (p_1,\dots,p_{n-1})\in\mathcal{O}$, $u(p_1,\dots,p_{n-1})=1-p_1-p_2-\dots-p_{n-1}$

. Pour tout k dans $[\![1,n-1]\!]$, u_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ (fonctions polynomiales).

. h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

. $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\forall (p_1,\dots,p_{n-1})\in\mathcal{O}$, $u_k(p_1,\dots,p_{n-1})=p_k\in\,]0,1[$

$\forall (p_1,\dots,p_{n-1})\in\mathcal{O}$, $u(p_1,\dots,p_{n-1})=1-p_1-p_2-\dots-p_{n-1}\in\,]0,1[$

Alors par composition, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $h\circ u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et $h\circ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

Alors $h_n=\sum_{k=1}^{n-1} u_k + u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$

Soit $T=(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$ un élément de $\mathcal{O}$

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\frac{\partial h_n}{\partial p_i}(T)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial u_k}{\partial p_i}(T)\,h'(u_k(T))+\frac{\partial u}{\partial p_i}(T)\,h'(u(T))$

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\frac{\partial h_n}{\partial p_i}(T)=h'(u_i(T))-h'(u(T))=h'(p_i)-h'(1-p_1-p_2-\dots-p_{n-1})$.

T est un point critique de $h_n \iff \forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $h'(p_i)=h'(1-p_1-\dots-p_{n-1})$

$\iff h'(p_1)=h'(p_2)=\dots=h'(p_{n-1})=h'(1-p_1-\dots-p_{n-1})$.

Rappelons que $\forall x\in\,]0,1[$, $h'(x)=-\frac{1}{\ln 2}(\ln x+1)$.

Ainsi $\forall (x,y)\in\,]0,1[^2$, $h'(x)=h'(y)\iff \ln x=\ln y\iff x=y$.

Ainsi T point critique de $h_n \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} \\ \text{et} \\ p_1 = 1-(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} \\ p_1 = 1-(n-1)p_1 \end{cases}$

T point critique de $h_n \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ p_k = \frac{1}{n} \Leftrightarrow T = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$.

Remarquons que si $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $p_k = \frac{1}{n}$ alors $(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}) \in O$

h_n admet un unique point critique sur O : $(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$.

Si h_n admet un admet un extremum en un point T de l'ouvert O alors T est un point critique de h_n donc $T = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$.

Ainsi <u>h_n admet au plus un extremum sur O.</u>

b) ℓ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, $\ell'(x) = -\frac{1}{\ln 2}(\ln x + 1)$.

ℓ' est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, $\ell''(x) = -\frac{1}{x \ln 2} < 0$.

Ainsi $-\ell$ est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée seconde est positive.

<u>Alors $-\ell$ est convexe sur $]0,1[$.</u>

Soit $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in]0,1[^n$ tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

$(-\ell)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-\ell)(p_k)$ car $-\ell$ est convexe sur $]0,1[$.

Alors $\ell(\frac{1}{n} \times 1) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell(p_k)$; $\sum_{k=1}^{n} \ell(p_k) \leq n\,\ell(\frac{1}{n}) = n\left(-\frac{1}{n}\frac{\ln(1/n)}{\ln 2}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} \ell(p_k) \leq -\frac{\ln(1/n)}{\ln 2} = \frac{\ln n}{\ln 2}$.

<u>$\forall (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in]0,1[^n$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ell(p_k) \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.</u>

c) Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k = P(X = x_k)$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k \in [0,1]$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

* **V1** On suppose que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k \neq 0$.

Alors $(p_1,\dots,p_n) \in]0,1]^n$ et $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Ainsi $\sum_{k=1}^n \ell(p_k) \leq \frac{\ln(n)}{\ln 2}$.

Donc $H(X) \leq \frac{\ln(n)}{\ln 2}$.

* **V2** Soit r le nombre d'éléments de $\{k \in [\![1,n]\!] \mid p_k \neq 0\} = K$

$\sum_{k=1}^n \ell(p_k) = \sum_{k \in K} \ell(p_k)$. Or $(p_k)_{k \in K}$ est une famille de d' éléments de $]0,1]$ de cardinal r et $\sum_{k \in K} p_k = 1$.

En appliquant b) avec r on peut dire que $\sum_{k \in K} \ell(p_k) \leq \frac{\ln r}{\ln 2}$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \ell(p_k) = \sum_{k \in K} \ell(p_k) \leq \frac{\ln r}{\ln 2} \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$; $H(X) \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

Finalement dans tous les cas $H(X) \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

• Supposons que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

$$H(X) = \sum_{k=1}^n \ell(p_k) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{p_k \ln p_k}{\ln 2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln 2} = n \, \frac{\frac{1}{n}\ln n}{\ln 2} = \frac{\ln n}{\ln 2}.$$

Si X suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $H(X) = \frac{\ln n}{\ln 2}$.

• Réciproquement supposons que $H(X) = \frac{\ln n}{\ln 2}$.

Posons $K = \{k \in [\![1,n]\!] \mid p_k \neq 0\}$ et $r = \mathrm{card}\, K$. $H(X) \leq \frac{\ln r}{\ln 2}$; $\frac{\ln n}{\ln 2} \leq \frac{\ln r}{\ln 2}$.

Alors $r \geq n$. Mais $K \subset [\![1,n]\!]$ donc $r = \mathrm{card}\, K \leq n$.

Ainsi $r = n$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k \neq 0$.

Donc $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in]0,1]^n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ et $\sum_{k=1}^n \ell(p_k) = \frac{\ln(n)}{\ln 2}$.

Ceci permet d'affirmer la fonction $\psi : (q_1,\dots,q_n) \to \sum_{\ell=1}^{n} h(q_\ell)$ admet un maximum sur $\hat{O} = \{(q_1,q_2,\dots,q_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell = 1\}$, que ce maximum vaut $\frac{\ln(n)}{\ln 2}$ et qu'il est atteint en $(p_1,p_2,\dots,p_n)$.

Soit $(q_1,q_2,\dots,q_n) \in \hat{\theta}$. $q_n = 1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} q_\ell$. Ainsi $\forall \ell \in [\![1,n-1]\!]$, $q_\ell \in]0,1]$ et $1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} q_\ell > 0$; alors $(q_1,q_2,\dots,q_{n-1}) \in \theta$.

Soit $(q_1,\dots,q_{n-1}) \in \theta$. Posons $q_n = 1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} q_\ell$.

$h_n(q_1,\dots,q_{n-1}) = \psi(q_1,q_2,\dots,q_n) \leq \psi(p_1,p_2,\dots,p_n)$.

Notons que $p_n = 1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} p_\ell > 0$ et $(p_1,p_2,\dots,p_{n-1}) \in]0,1[^{n-1}$; $(p_1,p_2,\dots,p_{n-1}) \in \theta$.

Alors $h_n(q_1,\dots,q_{n-1}) \leq \psi(p_1,p_2,\dots,p_n) = h_n(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$.

Ainsi h_n possède un maximum atteint en $(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$. Alors $(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$ est un point critique de h_n. d'après Q1 a) $(p_1,p_2,\dots,p_{n-1}) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ car $(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ est le seul point critique de h_n.

Par conséquent $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = \frac{1}{n}$ et $p_n = 1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} p_\ell = 1 - \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

Donc $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. X suit donc une loi uniforme sur $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

<u>Finalement $H(X) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme sur $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.</u>

Q2 a) $m = \frac{1}{p}$. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $p_\ell = P(G = \ell) = p q^{\ell-1}$ avec $q = 1-p$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $h(p_\ell) = -\frac{1}{\ln 2} p q^{\ell-1} \ln(p q^{\ell-1})$

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $h(p_\ell) = -\frac{1}{\ln 2}[(\ln p) p_\ell + (\ln q)(\ell-1) p_\ell] = -\frac{1}{\ln 2}[\ln \frac{p}{q}\, p_\ell + (\ln q)\,\ell\, p_\ell]$.

La série de terme général p_k converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

La série de terme général $k p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \frac{1}{p}$ ($E(G) = \frac{1}{p}$!)

Ainsi la série de terme général $h(p_k) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln \frac{p}{q} \, p_k + (\ln q) k p_k\right]$ converge

et $\sum_{k=1}^{+\infty} h(p_k) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k + (\ln q) \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k\right] = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln \frac{p}{q} + \frac{\ln q}{p}\right]$.

Donc $H(G)$ existe et $H(G) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln \frac{p}{q} + \frac{\ln q}{p}\right] = -\frac{1}{\ln 2}\left[\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \frac{\ln(1-p)}{p}\right]$.

---

b) Posons $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) = x - 1 - \ln x$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

g est continue sur $]0, +\infty[$, $\forall x \in]0, 1[$, $g'(x) < 0$, $g'(1) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $g'(x) > 0$.

Ainsi g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$.

Comme $g(1) = 0$: $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) > g(1) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $g(x) > g(1) = 0$.

Alors $g(1) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[- \{1\}$, $g(x) = x - 1 - \ln x > 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \in]0, +\infty[$ et $q_k \in]0, +\infty[$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_k) - \ln(q_k) = \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \leq \frac{p_k}{q_k} - 1$

(avec égalité si $\frac{p_k}{q_k} = 1$ ou $p_k = q_k$).

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q_k(\ln p_k - \ln q_k) \leq q_k\left(\frac{p_k}{q_k} - 1\right) = p_k - q_k$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{q_k}{\ln 2}(\ln p_k - \ln q_k) \leq \frac{1}{\ln 2}(p_k - q_k)$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $h(q_k) + \frac{1}{\ln 2} q_k \ln p_k \leq \frac{1}{\ln 2}(p_k - q_k)$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $q_\ell \ln p_\ell = q_\ell \ln(pq^{\ell-1}) = q_\ell \ln p + (\ell-1) q_\ell \ln q = \ln\frac{p}{q} q_\ell + (\ln q)\ell q_\ell$.

$\sum_{\ell=1}^{+\infty} q_\ell = 1$ et $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell q_\ell = m$ donc $\sum_{\ell=1}^{+\infty} q_\ell \ln p_\ell = \ln\frac{p}{q} + (\ln q) m$

$m = \frac{1}{p}$ donc $\sum_{\ell=1}^{+\infty} q_\ell \ln p_\ell = \ln\frac{p}{q} + \frac{\ln q}{p}$; $\frac{1}{\ln 2}\sum_{\ell=1}^{+\infty} q_\ell \ln q_\ell = -H(G)$.

(*) Rappelons que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $h(q_\ell) + \frac{1}{\ln 2} q_\ell \ln p_\ell \leqslant \frac{1}{\ln 2}(p_\ell - q_\ell)$, que

$\sum_{\ell=1}^{+\infty} p_\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty} q_\ell = 1$ et que $\sum_{\ell=1}^{+\infty} h(q_\ell) = H(X)$.

" En sommant (*) " de 1 à $+\infty$ il vient : $H(X) - H(G) \leqslant \frac{1}{\ln 2}\sum_{\ell=1}^{+\infty}(p_\ell - q_\ell) = 0$.

donc $H(X) - H(G)$

Alors $H(X) \leqslant H(G)$.

Pour $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = h(q_\ell) + \frac{1}{\ln 2} q_\ell \ln p_\ell$ & $v_\ell = \frac{1}{\ln 2}(p_\ell - q_\ell)$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell \leqslant v_\ell$, $\sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell = H(X) - H(G)$ & $\sum_{\ell=1}^{+\infty} v_\ell = 0$.

Alors $H(X) = H(G) \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty} v_\ell \underset{\substack{\uparrow \\ \forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ u_\ell \leqslant v_\ell}}{\Leftrightarrow} \forall \ell \in \mathbb{N}^*, u_\ell = v_\ell$

$H(X) = H(G) \Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $h(q_\ell) + \frac{1}{\ln 2} q_\ell \ln p_\ell \leqslant \frac{1}{\ln 2}(p_\ell - q_\ell)$.

$H(X) = H(G) \Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $p_\ell = q_\ell$ (fin de la page 13).

$H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G.

PARTIE VI Incertitude d'une variable aléatoire continue.

Q1 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$; f est une densité de X_0.

Observons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $h(f(t)) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right) = -\frac{1}{\ln 2}\left[-\ln\sqrt{2\pi} - \frac{t^2}{2}\right] f(t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $h(f(t)) = \left(\frac{1}{2} \frac{\ln 2\pi}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} t^2\right) f(t) = \frac{1}{2} \frac{\ln(2\pi)}{\ln 2} f(t) + \frac{1}{2\ln 2} t^2 f(t)$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut 1

car $E(X_0^2)$ existe et vaut $V(X_0) + (E(X_0))^2 = 1 + 0^2 = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2} \frac{\ln(2\pi)}{\ln 2} \times 1 + \frac{1}{2\ln 2} \times 1$.

$H(X_0)$ existe et vaut : $\frac{\ln(2\pi)+1}{2\ln 2}$.

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$; $\hat{f}$ est une densité de Y.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $h(\hat{f}(t)) = -\frac{1}{\ln 2} \hat{f}(t) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\ln 2} \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma)\hat{f}(t) + \frac{1}{\ln 2} \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \hat{f}(t)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\,dt$ existe et vaut 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 \hat{f}(t)\,dt$ existe et vaut $E((Y-E(Y))^2) = V(Y) = \sigma^2$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\hat{f}(t))\,dt = \frac{1}{\ln 2} \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma) \times 1 + \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{2\sigma^2} \times \sigma^2 = \frac{2\ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+1}{2\ln 2}$

Ainsi $H(Y)$ existe et vaut $\frac{\ln(2\pi\sigma^2)+1}{2\ln 2}$.

Q2 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_0(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

Passons pudiquement sur la partie de ... par rapport à 1.

$\forall t \in]-\infty, 0[$, $h(f_0(t)) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[$, $h(f_0(t)) = -\frac{1}{\ln 2} [\ln(\lambda e^{-\lambda t})] f_0(t)$.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $h(f_0(t)) = -\frac{1}{\ln 2} [\ln \lambda - \lambda t] f_0(t) = \left(-\frac{\ln \lambda}{\ln 2} + \frac{\lambda}{\ln 2} t \right) f_0(t)$

$\forall t \in [0, +\infty[$, $h(f_0(t)) = -\frac{\ln \lambda}{\ln 2} f_0(t) + \frac{\lambda}{\ln 2} t f_0(t)$.

Mieux $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(f_0(t)) = -\frac{\ln \lambda}{\ln 2} f_0(t) + \frac{\lambda}{\ln 2} t f_0(t)$!

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt$ existe et vaut 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_0(t)\,dt$ existe et vaut $E(X_0) = \frac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f_0(t))\,dt$ existe et vaut $-\frac{\ln \lambda}{\ln 2} + \frac{\lambda}{\ln 2} \frac{1}{\lambda}$.

Alors $H(X_0)$ existe et vaut $\frac{1 - \ln \lambda}{\ln 2}$.

b) $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \ln(f_0(x)) = f(x) \ln(\lambda e^{-\lambda x}) = f(x) \ln \lambda + f(x)(-\lambda x)$

$\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \ln(f_0(x)) = (\ln \lambda) f(x) - \lambda x f(x)$.

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ existe et vaut 1 et $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(x) \ln(f_0(x))\,dx$ existe et vaut $\ln \lambda - \lambda \times \frac{1}{\lambda} = -(1 - \ln \lambda)$.

Donc $-\frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} f(x) \ln(f_0(x))\,dx$ existe et vaut $\frac{1 - \ln \lambda}{\ln 2} = H(X_0)$.

$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))\,dx = \int_0^{+\infty} h(f(x))\,dx$ car f est nulle sur $]-\infty, 0]$ privé d'un ensemble fini de points et $h(0) = 0$

$$H(X_0)-H(X) = -\frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} f(x)\ln(f_0(x))\,dx - \int_0^{+\infty} h(f(x))\,dx$$

$$H(X_0)-H(X) = -\frac{1}{\ln 2}\left[\int_0^{+\infty}\left(f(x)\ln f_0(x) + \ln 2\, h(f(x))\right)dx\right]$$

Pour montrer que $H(X_0) \geq H(X)$ il suffit de prouver que cette dernière intégrale est négative.

Montrons que $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

Soit $x \in [0,+\infty[$.

1er cas.. $f(x)=0$. Alors $f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x)) = 0 \overset{h(0)=0}{\leq} f_0(x) = f_0(x) - f(x)$.

2e cas.. $f(x) > 0$.

$$f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x)) = f(x)\ln f_0(x) - f(x)\ln f(x) = f(x)\ln\left(\frac{f_0(x)}{f(x)}\right) \leq f(x)\left(\frac{f_0(x)}{f(x)} - 1\right)$$

Donc $f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

Alors $\int_0^{+\infty}\left[f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x))\right]dx \leq \int_0^{+\infty} f_0(x)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ (toutes les intégrales existent)

Alors $H(X_0)-H(X) = \underbrace{-\frac{1}{\ln 2}}_{\leq 0}\underbrace{\int_0^{+\infty}\left(f(x)\ln(f_0(x)) + \ln 2\, h(f(x))\right)dx}_{\leq 0} \geq 0$

Par conséquent $\underline{\underline{H(X) \leq H(X_0)}}$.

<u>Exercice</u>.. Examiner le cas d'égalité.