BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Code sujet
295
EML__MATS

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2008 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée

PROBLÈME

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0\,; +\infty[^2$: $\alpha\beta \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

2. En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(\,.\,|\,.\,)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u, v) \in E^2$, associe $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. **a.** Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que l'application $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(\,.\,|\,.\,)$ la restriction à F ou à F_n, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n.

On note $\|.\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$, définie, pour tout $u \in E$, par :
$$\|u\| = \sqrt{(u\,|\,u)}.$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} w^{(n)}(x), \text{ où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$
En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
Faire figurer les calculs sur la copie.

2. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

c. Contrôler alors les résultats obtenus en **II.1** et calculer H_4.
Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:

$$(P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n),$$

où $(.\,|\,.)$ est le produit scalaire sur F défini en **I.4.**

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P \mid H_n) = 0$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est orthogonale dans F.

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, ..., H_n)$ est une base de F_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0)$, où $\|.\|$ est définie en **I.4.**

b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F, pour tout $P \in F$, par :

$$f(P) = -P'' + 2\mathrm{X}P' + P, \quad g(P) = 2\mathrm{X}P - P', \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(g(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F.

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F, et on note Id_F l'application identique de F.

2. **a.** Établir : $\quad g \circ h = f - \mathrm{Id}_F \quad$ et $\quad h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$.

b. En déduire : $\quad f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)g(P)$.

4. **a.** Calculer $f(H_0)$.

b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad f(H_k) = (2k+1)H_k$.

5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:

$$(P' \mid Q') = \big(f(P) \mid Q\big) - (P \mid Q).$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\quad \forall P \in F_n, \quad f(P) \in F_n$.

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par :

$$\forall P \in F_n, \quad f_n(P) = f(P).$$

b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n.

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

1. Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.

2. Montrer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $(\varphi_a \mid \varphi_b) = \mathrm{e}^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} ||\varphi_{\sqrt{\ln n}}||^{-2}$.

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} ||\varphi_{\sqrt{n}}||^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ'.

2. Soient G et K les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

a. Déterminer les limites des fonctions Φ, G et K en $+\infty$.

b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

c. En déduire : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$.

d. Montrer : $\quad \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

3. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ à l'aide de la fonction Φ.

b. Soit c un réel strictement positif.

Pour tout réel x, on considère la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x+c)$.

Montrer : $\quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1$.