Jean-François COSSUTTA. Lycée Marcelin Berthelot Saint Maur 94.

LYON 2003

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Les fonctions $t \to \dfrac{1}{t}$ et sin sont continues sur $]0,+\infty[$. Par produit φ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\dfrac{\sin t}{t} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$ et φ est continue (à droite) en 0.

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

Alors pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ φ^n est continue sur $[0,+\infty[$ donc sur $[0,1]$, ce qui suffit pour dire que :

$$\boxed{J_n = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \text{ existe pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*.}$$

2. a. $\forall t \in]0,1],\ \sin t > 0$ donc $\forall t \in]0,1],\ \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t} > 0$. De plus $\varphi(0) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [0,1].}$$

φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[,\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}\big(t\,\cos t - \sin t\big)$. Posons $\forall t \in [0,1],\ \psi(t) = t\,\cos t - \sin t$.

ψ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1],\ \psi'(t) = \cos t - t\,\sin t - \cos t = -t\,\sin t$.

Alors ψ est continue sur $[0,1]$ et $\forall t \in]0,1],\ \psi'(t) < 0$ donc ψ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Comme $\psi(0) = 0$, $\forall t \in]0,1],\ \psi(t) < 0$. Par conséquent $\forall t \in]0,1],\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}\,\psi(t) < 0$.

φ est continue sur $[0,1]$ et $\forall t \in]0,1],\ \varphi'(t) < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$$

b. • Soit t un élément de $]0,1]$. Ce qui précède donne $0 < \varphi(t) < \varphi(0) = 1$. Donc $|\varphi(t)| = \varphi(t) < 1$.

• Soit t un élément de $]1,+\infty]$. $|\sin t| \leqslant 1$ donc $|\varphi(t)| = \dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant \dfrac{1}{t} < 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[,\ |\varphi(t)| < 1.}$$

3. a. Posons : $\forall t \in [0,+\infty[, f(t) = \sin t - t + t^2$. f est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f'(t) = \cos t - 1 + 2\,t$ et $f''(t) = -\sin t + 2$.

f'' est positive sur $[0,+\infty[$ donc f' est croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $f'(0) = 0$, f' est positive sur $[0,+\infty[$.

f est alors croissante sur $[0,+\infty[$ et comme $f(0) = 0$, f est positive sur $[0,+\infty[$.

Ainsi : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \sin t - t + t^2 \geqslant 0$ ou $\forall t \in [0,+\infty[,\ \sin t \geqslant t(1-t)$.

Alors $\forall t \in]0,+\infty[,\ \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t} \geqslant 1 - t$. Comme $\varphi(0) = 1 = 1 - 0$ on a :

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[,\ \varphi(t) \geqslant 1 - t.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) \geqslant 1 - t \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,1],\ \big(\varphi(t)\big)^n \geqslant \big(1-t\big)^n$.

En intégrant il vient : $J_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\, \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \big(1-t\big)^n\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\cdot$ Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n \geqslant \frac{1}{n+1}\cdot}$$

PARTIE II : Etude de I_1

1. a. Soit x un élément de $[1,+\infty[$.

Une intégration par parties simple (avec $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$) donne :

$\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\,(-\cos t)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-\cos t)\, \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{(-\cos x)}{x} - \frac{(-\cos 1)}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[,\ \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.}$$

b. $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Ainsi $x \to \cos 1 - \dfrac{\cos x}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ sont de même nature. Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $K_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $J_1 = \displaystyle\int_0^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{K_1 = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } I_1 = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$$

2. a. $\forall t \in [0,+\infty[,\ 1 \geqslant |\sin t| \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ |\sin t| \geqslant |\sin t|^2 = \sin^2 t = \dfrac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big)$.

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[,\ |\sin t| \geqslant \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big).}$$

b. Utilisons une méthode analogue à celle de 1.a. pour obtenir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit x un élément de $[1,+\infty[$. Une intégration par parties simple (avec $u(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\cos(2\,t)$) donne :

$$\int_1^x \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Alors $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(2\,x)}{2x} - \frac{(\sin 2)}{2} + \int_1^x \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\,x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\,x} = 0$, par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2\,x)}{2x} = 0$.

Ainsi $x \to \dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x} - \dfrac{\sin 2}{2}$ admet une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\,x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\right|\mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

c. $\forall t \in [1,+\infty[,\ |\varphi(t)| = \dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2\,t} - \dfrac{\cos(2\,t)}{2\,t} \geqslant 0$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2\,t} - \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\right)\mathrm{d}t$ diverge.

Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge alors également.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_1 \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

PARTIE III : Etude de I_n pour $n \geqslant 2$

1. a Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

φ^n est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(t)^n| = \dfrac{|\sin t|^n}{t^n} \leqslant \dfrac{1}{t^n}$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ $(n \geqslant 2)$ et les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t$ est absolument convegente donc convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2, +\infty[\![\text{ l'intégrale } K_n \text{ est convergente.}}$$

b. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

Comme K_n est absolument convergente : $|K_n| = \left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\,\mathrm{d}t$.

De plus $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(t)^n| \leqslant \dfrac{1}{t^n}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ converge donc : $|K_n| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}.$$

Par conséquent $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ |K_n| \leqslant \frac{1}{n-1}}$$

2.a. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^1 \Big((\varphi(t))^{n+1} - (\varphi(t))^n\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t) - 1)\,\mathrm{d}t$.

Or $\forall t \in [0, 1],\ 0 \leqslant \sin 1 = \varphi(1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 1$. Par conséquent : $\forall t \in [0, 1],\ \big(\varphi(t)\big)^n \geqslant 0$ et $\varphi(t) - 1 \leqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0, 1],\ \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t) - 1) \leqslant 0$ et ainsi : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t) - 1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

Finalement : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ J_{n+1} \leqslant J_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

b. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall t \in [0, 1],\ \big(\varphi(t)\big)^n \geqslant 0$ donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ J_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

La suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ est convergente.}}$$

c. Soient a un élément de $]0,1[$ et n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

φ est décroissante, positive et majorée par 1 sur $[0,1]$.

Par conséquent $\forall t\in[0,a],\ 0\leqslant \varphi(t)\leqslant 1$ et $\forall t\in[a,1],\ 0\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(a)$.

Ainsi $\forall t\in[0,a],\ 0\leqslant \big(\varphi(t)\big)^n\leqslant 1$ et $\forall t\in[a,1],\ 0\leqslant\big(\varphi(t)\big)^n\leqslant\big(\varphi(a)\big)^n$.

Alors $\displaystyle\int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^a 1\,\mathrm{d}t=a$ et $\displaystyle\int_a^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^1\big(\varphi(a)\big)^n\,\mathrm{d}t=(1-a)\big(\varphi(a)\big)^n$

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall a\in]0,1[,\ \int_0^a\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\leqslant a \text{ et } \int_a^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\leqslant(1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.}$$

d. Soit a un élément de $]0,1[$.

$\displaystyle\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ 0\leqslant J_n=\int_0^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^a\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t+\int_a^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\leqslant a+(1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.$

Donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ 0\leqslant J_n\leqslant a+(1-a)\big(\varphi(a)\big)^n\quad(*)$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n=\ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(\varphi(a)\big)^n=0$ car $|\varphi(a)|<1$. En passant à la limite dans $(*)$ on obtient $0\leqslant\ell\leqslant a$.

$$\boxed{\forall a\in]0,1[,\ 0\leqslant\ell\leqslant a}$$

En faisant tendre a vers 0 dans l'encadrement précédent on obtient $\ell=0$.

$$\boxed{\ell=0,\text{ donc la suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge vers } 0}$$

3.a. Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle J_n=\int_0^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle K_n=\int_1^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t$ convergent donc :

$$\boxed{\text{pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![,\ I_n=\int_0^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3.b. $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant|I_n|=|J_n+K_n|\leqslant|J_n|+|K_n|\leqslant|J_n|+\frac{1}{n-1}.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|J_n|=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$ alors, par encadrement on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0.}$$

PARTIE IV : Etude de la série de terme général $\mathbf{I_n}$

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$K_{2p}+K_{2p+1}=\int_1^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^{2p}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^{2p+1}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^{2p}\big(1+\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Or $\forall t\in[1,+\infty[,\ \big(\varphi(t)\big)^{2p}\geqslant 0$ et $\forall t\in[1,+\infty[,\ 1+\varphi(t)\big)\geqslant 0$ car $\forall t\in]0,+\infty[,\ |\varphi(t)|\leqslant 1$.

Par conséquent $\forall t\in[1,+\infty[\ \big(\varphi(t)\big)^{2p}\big(1+\varphi(t)\big)\geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\big(\varphi(t)\big)^{2p}\big(1+\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ K_{2p}+K_{2p+1}\geqslant 0.}$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant K_{2p}+K_{2p+1}=I_{2p}-J_{2p}+I_{2p+1}-J_{2p+1}$.

Donc $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ I_{2p}+I_{2p+1}\geqslant J_{2p}+J_{2p+1}$. En sommant de 1 à N on obtient :

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{N}\Big(I_{2p}+I_{2p+1}\Big)\geqslant\sum_{p=1}^{N}\Big(J_{2p}+J_{2p+1}\Big).}$$

3. Soit N un élment de $\mathbb{N}^*$. En utilisant I.3.b et IV 2. on obtient :

$$\sum_{p=2}^{2N+1}I_p=\sum_{p=1}^{N}\Big(I_{2p}+I_{2p+1}\Big)\geqslant\sum_{p=1}^{N}\Big(J_{2p}+J_{2p+1}\Big)\geqslant\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+2}\right)=\sum_{p=3}^{2N+2}\frac{1}{p}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{p}$ est divergente et à terme positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ce qui suffit pour dire que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=3}^{2N+2}\frac{1}{p}=+\infty$ et ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=2}^{2N+1}I_p=+\infty$.

Ceci suffit pour dire que la suite des sommes partielles de la série de terme général I_p ne converge pas. Alors

$$\boxed{\text{La série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$$

SECOND PROBLÈME

PARTIE I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

1. f est non inversible donc f n'est pas bijective. Comme f est un endomorphisme de E, qui est de dimension finie, f n'est pas injective. Son noyau n'est donc pas réduit à 0_E donc 0 est valeur propre de f.

f est diagonalisable car f est un endomorphisme symétrique. Supposons que 0 soit la seule valeur propre de E. Alors le sous-espace propre de f associé à 0 est E donc $\operatorname{Ker} f = E$ et f est l'endomorphisme nul de E ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de } f \text{ et } f \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$$

2. a. Tout cela est du cours. Soit x un élément de $E_f(\lambda)$ et y un élément de $E_f(\mu)$. $f(x) = \lambda\, x$ et $f(y) = \mu\, y$.

$\lambda < x, y >=< \lambda\, x, y >=< f(x), y >=< x, f(y) >=< x, \mu\, y >= \mu\ < x, y >$ (f est symétrique).

$$\boxed{\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ \lambda < x, y >= \mu\ < x, y >.}$$

b. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.

$\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ \lambda < x, y >= \mu\ < x, y >$ donc $\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ (\lambda - \mu) < x, y >= 0$.

Comme $\lambda - \mu$ n'est pas nul : $\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ < x, y >= 0$. $E_f(\lambda)$ et $E_f(\mu)$ sont donc orthogonaux.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

3. Soient x un élément de $\operatorname{Ker} f$ et y un élément de $\operatorname{Im} f$. $f(x) = 0_E$ et il existe un élément t de E tel que $y = f(t)$.

$< x, y >=< x, f(t) >=< f(x), t >=< 0_E, t >= 0$.

$\forall x \in \operatorname{Ker} f,\ \forall y \in \operatorname{Im} f,\ < x, y >= 0$ donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. En particulier leur intersection est $\{0_E\}$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Comme E est de dimension finie ceci achève de prouver que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

<u>*Remarque*</u> $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f$ *et* $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f$.

4. a. f est diagonalisable et admet $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes λ_0, λ_1, ..., λ_k.

Par conséquent : $E = E_f(\lambda_0) \oplus E_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_k)$. Ce qui signifie que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout élément } x \text{ de } E\text{, il existe un unique } (k+1)\text{-uplet } (x_0, x_1, \ldots, x_k)\\ \text{de } E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k) \text{ tel que } x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k.\end{array}}$$

b. Soit j un élément de $[\![0, k]\!]$ et soit x un élément de E.

$(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ est l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$p_j(x) = p_j\left(\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{k} p_j(x_\ell)$.

x_j appartient à $E_f(\lambda_j)$ donc $p_j(x_j) = x_j$. Soit ℓ un élément de $[\![0, k]\!]$ distinct de j.

x_ℓ appartient à $E_f(\lambda_\ell)$ qui est orthogonal à $E_f(\lambda_j)$ donc qui est contenu dans l'orthogonal de $E_f(\lambda_j)$. Alors $p_j(x_\ell) = 0_E$.

Finalement $p_j(x) = \sum_{\ell=0}^{k} p(x_\ell) = x_j$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } j \text{ est dans } [\![0, k]\!]\text{, si } x \text{ est dans } E \text{ et si } (x_0, x_1, \ldots, x_k) \text{ est l'unique } (k+1)\text{-uplet de}\\ E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k) \text{ tel que } x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k \text{ alors : } p_j(x) = x_j.\end{array}}$$

En reprenant les notations précèdentes on a : $Id_E(x) = x = \sum_{\ell=0}^{k} x_\ell = \sum_{\ell=0}^{k} p_\ell(x) = (p_0 + p_1 + \cdots + p_k)(x)$ et ceci pour tout x dans E. Par conséquent :

$$\boxed{Id_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.}$$

5 .a. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0, k]\!]$. Soit x un élément de E.

Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$(p_i \circ p_j)(x) = p_i\big(p_j(x)\big) = p_i(x_j)$. j étant différent de i, $p_i(x_j) = 0_E$ car x_j appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_i)$.

Finalement $\forall x \in E,\ \big(p_i \circ p_j\big)(x) = 0_E$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![0, k]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$$

b. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$$f(x) = f\left(\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{k} f(x_\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, x_\ell = \sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x)\ (\lambda_0 = 0).$$

Donc : $\forall x \in E,\ f(x) = \left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x)$. Alors :

$$\boxed{f = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell = \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \cdots + \lambda_k\, p_k.}$$

<u>Remarque</u> *Il est aisé de montré que :* $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ f^r = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell^r = \lambda_1\, p_1^r + \lambda_2\, p_2^r + \cdots + \lambda_k\, p_k^r$.

c. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

x_0 appartient à $E_f(\lambda_0)$ donc à $\operatorname{Ker} f$. Posons $y = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell$ et montons que y appartient à $\operatorname{Im} f$.

$\forall \ell \in [\![1, k]\!],\ \lambda_\ell \neq 0$ donc $y = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_\ell}\, \lambda_\ell\, x_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_\ell}\, f(x_\ell)\right) = f\left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\lambda_\ell}\, x_\ell\right)$.

Ainsi y appartient à l'image de f.

On a donc $x = x_0 + y$ avec x_0 dans $\operatorname{Ker} f$ et y dans $\operatorname{Im} f$. Ceci suffit pour dire que $p(x) = y$.

Donc $p(x) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} p_\ell\right)(x)$ et ceci pour tout élément x de E. Alors :

$$\boxed{p = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.}$$

<u>Remarque</u> *Notons que nous avons montré que* $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots E_f(\lambda_k)$ *est contenu dans* $\operatorname{Im} f$. *En fait il n'est pas difficile de voir que* $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots E_f(\lambda_k) = \operatorname{Im} f$.

6. a. $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i$ et $f^\sharp = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j$.

$$f \circ f^\sharp = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left((\lambda_i\, p_i) \circ \left(\frac{1}{\lambda_j}\, p_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\, p_i \circ p_j\right).$$

Rappelons que $\forall i \in [\![0, k]\!],\ p_i \circ p_i = p_i$ et que $\forall (i, j) \in [\![0, k]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors : $f \circ f^\sharp = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i}\, p_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i = p$.

$$\boxed{f\circ f^\sharp=\sum_{i=1}^{k}p_i=p.}$$

b. Soient x et y deux éléments de E.

$f(x)-p(y)=f(x)-(f\circ f^\sharp)(y)=f(x)-f\big(f^\sharp(y)\big)=f\big(x-f^\sharp(y)\big)$.

Ainsi on a $f(x)=p(y)$ si et seulement si $f\big(x-f^\sharp(y)\big)=0_E$, ou si et seulement si $x-f^\sharp(y)$ appartient au noyau de f.

$$\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ f(x)=p(y)\Longleftrightarrow x-f^\sharp(y)\in \operatorname{Ker} f.}$$

7. a. Soit y un élément de E. $\operatorname{Im} f$ étant un sous-espace vectoriel de E le cours sur les projections orhogonales montre que $\underset{z'\in \operatorname{Im} f}{\operatorname{Min}}\|z'-y\|$ existe et que la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\operatorname{Im} f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y)-y\|=\underset{z'\in \operatorname{Im} f}{\operatorname{Min}}\|z'-y\|$.

Alors $\underset{x\in E}{\operatorname{Min}}\|f(x)-y\|$ existe et la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\operatorname{Im} f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y)-y\|=\underset{x\in E}{\operatorname{Min}}\|f(x)-y\|$.

Dès lors soit x un élément de E. $f(x)$ est de tout évidence un élément de $\operatorname{Im} f$.

Ainsi $\|f(x)-y\|=\underset{x\in E}{\operatorname{Min}}\|f(x)-y\|$ si et seulement si $f(x)=p(y)$ donc si et seulements si $x-f^\sharp(y)$ est un élément de $\operatorname{Ker} f$.

Si x et y sont deux éléments de E : • $\underset{z\in E}{\operatorname{Min}}\|f(z)-y\|$ existe ; • $\|f(x)-y\|=\underset{z\in E}{\operatorname{Min}}\|f(z)-y\|\Longleftrightarrow x-f^\sharp(y)\in \operatorname{Ker} f$.

b. $f^\sharp(y)-f^\sharp(y)=0_E$ donc $f^\sharp(y)-f^\sharp(y)$ appartient alors à $\operatorname{Ker} f$ et ainsi : $\|f\big(f^\sharp(y)\big)-y\|=\underset{z\in E}{\operatorname{Min}}\|f(z)-y\|$.

Montrons alors $f^\sharp(y)$ est LE vecteur x de E de plus petite norme vérifiant $\|f(x)-y\|=\underset{z\in E}{\operatorname{Min}}\|f(z)-y\|$.

<u>Version 1</u> Soit x un autre élément de E tel que $\|f(x)-y\|=\underset{z\in E}{\operatorname{Min}}\|f(z)-y\|$. Alors $x-f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

Montrons que $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$. $\forall \ell\in [\![1,k]\!],\ p_\ell(y)\in E_f(\lambda_\ell)$ donc $\forall \ell\in [\![1,k]\!],\ \dfrac{1}{\lambda_\ell}\,p_\ell(y)\in E_f(\lambda_\ell)$.

Alors $f^\sharp(y)$ appartient à $E_f(\lambda_1)\oplus E_f(\lambda_2)\oplus\cdots E_f(\lambda_k)$ qui est contenu dans $\operatorname{Im} f$. $f^\sharp(y)\in \operatorname{Im} f$.

$x-f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux donc $x-f^\sharp(y)$ et $f^\sharp(y)$ sont orthogonaux.

Le théorème de pythagore donne $\|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|\big(x - f^\sharp(y)\big) + f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$.

Alors $\|f^\sharp(y)\|^2 \leqslant \|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$. Donc $\|f^\sharp(y)\| \leqslant \|x\|^2$. Mieux $\|f^\sharp(y)\| < \|x\|^2$ si x est différent de $f^\sharp(y)$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est dans } E,\ f^\sharp(y) \text{ est le vecteur } x \text{ de } E \text{ de plus petite norme vérifiant } \|f(x) - y\| = \operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\|.}$$

Version 2 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\|f(x) - y\| = \operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

$\mathcal{S} = \{x \in E \mid x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f\} = \{f^\sharp(y) + t ; t \in \operatorname{Ker} f\} = \{f^\sharp(y) - t ; t \in \operatorname{Ker} f\}$ non ?

On cherche x_0 dans $\mathcal{S}$ tel que $\|x_0\| = \operatorname*{Min}_{x \in \mathcal{S}} \|x\|$. Cela revient à chercher t_0 dans $\operatorname{Ker} f$ tel que $\|f^\sharp(y) - t_0\| = \operatorname*{Min}_{t \in \operatorname{Ker} f} \|f^\sharp(y) - t\|$.

Le cours sur les projections orthogonales montre que la projection orthogonale u de $f^\sharp(y)$ sur $\operatorname{Ker} f$ est l'unique élément de $\operatorname{Ker} f$ tel que $\|f^\sharp(y) - u\| = \operatorname*{Min}_{t \in \operatorname{Ker} f} \|f^\sharp(y) - t\|$.

Donc $f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y) - u\| = \operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\|$.

Comme $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$ qui est l'orthogonale de $\operatorname{Ker} f$, sa projection orthogonale u sur $\operatorname{Ker} f$ est nulle. Ainsi

$f^\sharp(y) = f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y)\| = \|f^\sharp(y) - u\| = \operatorname*{Min}_{x \in S} \|x\|$.

PARTIE II : Application à un exemple

1. La matrice A de f dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique donc f est symétrique.

La somme de la deuxième colonne et de la quatrième colonne de A est nulle donc $f(e_2) + f(e_4) = 0_E$ ou $f(e_2 + e_4) = 0_E$. Ainsi $e_2 + e_4$ est un élément non nul de $\operatorname{Ker} f$. f n'est pas injective donc pas inversible.

La matrice A n'étant pas la matrice nulle, f n'est pas l'endomorphisme nul de E.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme non nul et non inversible de } E.}$$

2. Soit λ un élément de $\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_3$ transforme $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)\, L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)\, L_2$ transforme cette dernière matrice en

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire si et seulement si B_λ n'est pas inversible.

B_λ étant triangulaire supérieure elle est non inversible si et seulement si l'un des coefficients de sa diagonale est nul.

Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $(3-\lambda)^2 - 1 = 0$ ou $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$; c'est à dire si et seulement si $3 - \lambda = 1$ ou $3 - \lambda = -1$ ou $1 - \lambda = 1$ ou $1 - \lambda = -1$.

Les valeurs propres de A sont donc 0, 2 et 4.

$$\boxed{f \text{ admet exactement 3 valeurs propres distinctes} : \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 4.}$$

3. D'après la première partie : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2\,p_1 + 4\,p_2$. Alors :

$$\boxed{A = 2\,M_1 + 4\,M_2.}$$

4. a. Soit x un élement de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$u \in E_f(\lambda_2) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -3\,x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} .$$

$$u \in E_f(\lambda_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = -3\,x_2 = -\frac{1}{3}\,x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow x_3 = -x_1 \text{ et } x_2 = x_4 = 0$$

$E_f(\lambda_2)$ est donc la droite vectorielle engendrée par $v_2' = e_1 - e_3$.

$v_2 = \dfrac{1}{\|v_2'\|}\,v_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_1 - e_3\Big)$ est un vecteur unitaire de $E_f(\lambda_2)$.

$$\boxed{E_f(\lambda_2) \text{ est de dimension 1 et } v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_1 - e_3\Big) \text{ est un élément de } E_f(\lambda_2) \text{ tel que } \|v_2\| = 1.}$$

b. Soit x un élément de E. $p_2(x) \in E_f(\lambda_2)$ donc il existe un réel γ tel que $p_2(x) = \gamma\,v_2$.

$x - p_2(x)$ appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_2)$ donc est orthogonal à v_2.

Ainsi $0 =< x - p_2(x), v_2 >=< x, v_2 > - < p_2(x), v_2 >=< x, v_2 > - < \gamma\,v_2, v_2 >=< x, v_2 > -\gamma\,\|v_2\|^2$.

$0 =< x, v_2 > -\gamma$. Ainsi $\gamma =< x, v_2 >$ et $p_2(x) =< x, v_2 >\ v_2$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_2(x) =< x, v_2 >\ v_2.}$$

c. Soit x un élément de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$< x, v_2 >=< (x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 + x_4\,e_4, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3) >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x_1 - x_3)$

$p_2(x) =< x, v_2 > \ v_2 = \dfrac{1}{2}\,(x_1 - x_3)\,(e_1 - e_3)$.

Alors $p_2(e_1) = \dfrac{1}{2}\,(e_1 - e_3)$, $p_2(e_2) = 0_E$, $p_2(e_3) = -\frac{1}{2}\,(e_1 - e_3)$ et $p_2(e_4) = 0_E$. Donc :

$$\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. Soit $A^\sharp$ la matrice de $f^\sharp$ dans la base $\mathcal{B}$. $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1}\,p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2}\,p_2 = \dfrac{1}{2}\,p_1 + \dfrac{1}{4}\,p_2$. Donc $A^\sharp = \dfrac{1}{2}\,M_1 + \dfrac{1}{4}\,M_2$.

$A = 2\,M_1 + 4\,M_2$ donne $\dfrac{1}{2}\,M_1 = \dfrac{1}{4}\,A - M_2$ et ainsi $A^\sharp = \dfrac{1}{4}\,A - \dfrac{3}{4}\,M_2$.

$A^\sharp = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement :

$$\boxed{\text{La matrice de } f^\sharp \text{ relativement à la base } \mathcal{B} \text{ est : } A^\sharp = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$
