Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
  I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle\, . \,, . \,\rangle$ défini par :
  si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, alors $\langle\, x \,,\, y \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
  En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $\langle\, x \,,\, y \,\rangle = {}^tX\,Y$.
  La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\ \|$.
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

a. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = P\,D\,{}^{t}P$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Vérifier que $(M - 2\mathrm{I}_3)^3 = \mathrm{I}_3$.

b. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c. Calculer le produit ${}^{t}M\,M$.

Partie II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^{t}A$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:
$$\langle g(y)\,,\,x\rangle = \langle y\,,\,f(x)\rangle \quad \text{puis} \qquad \langle (g\circ f)(x)\,,\,x\rangle = \|f(x)\|^2.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $g\circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g\circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g\circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^{t}A\,A = Q\,\Delta^2\,{}^{t}Q$.

6. Montrer que la famille $\big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\big)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a. Vérifier que les nombres réels μ_1, μ_2 , $\dots, \mu_n$ sont tous non nuls.

b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(\dfrac{1}{\mu_1}f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}f(e'_n)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

c. Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\,\Delta\,{}^{t}Q$.

Partie III

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R\,\Delta\,{}^{t}Q$ où M est la matrice définie dans *I.2* .

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I - Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\, \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\, \pi]$:

$$1 + 2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

b. Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$:

$$\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}\ .$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \,]0;\, \pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0;\, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\[2mm] \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in \,]0;\, \pi] \end{cases}\ .$$

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0;\, \pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x.$

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

II - Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de *I.2.* et *I.4.*).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et de n.

4. Etablir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} \quad .$$

III - Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note : $\displaystyle F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

2.a. Montrer, pour tout réel t de $[0;\, 1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \quad .$$

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que : $\displaystyle G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

3.a. En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\, G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1} \quad .$$

b. Etablir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} \quad .$$

4. En utilisant le résultat de *II.4.*, établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\dfrac{\pi}{\alpha}}{\sin\dfrac{\pi}{\alpha}} \quad .$$