# Éléments de correction

## Exercice 1

**1)** Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x$ et $(x,y,z) \mapsto e^{x(y^2+z^2+1)}$ sont de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ donc *f* est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ comme produit de fonctions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

**2)** On a :

$$\partial_1(f)\,(x,y,z) = \left(1 + x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

$$\partial_2(f)\,(x,y,z) = 2x^2 y\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

$$\partial_3(f)\,(x,y,z) = 2x^2 z\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

Les points critiques de *f* sont les triplets $(x,y,z)$ qui annulent le gradient de *f*, et on trouve que le seul point critique de *f* est $A = (-1,0,0)$.

**3) a)** On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de *f*.

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y,z) = \left(y^2+z^2+1\right)\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y,z) = 2xy\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial^2_{1,3}(f)(x,y,z) = 2xz\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y,z) = 2x^2\left(1+2xy^2\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial^2_{2,3}(f)(x,y,z) = 4x^3yz\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial^2_{3,3}(f)(x,y,z) = 2x^2\left(1+2xz^2\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

Pour finir, *f* est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^3$ donc $\partial^2_{2,1}(f)(x,y,z) = \partial^2_{1,2}(f)(x,y,z)$, $\partial^2_{3,1}(f)(x,y,z) = \partial^2_{1,3}(f)(x,y,z)$ et $\partial^2_{3,2}(f)(x,y,z) = \partial^2_{2,3}(f)(x,y,z)$.

**b)** On trouve que la hessienne de *f* au point *A* est $\nabla^2(f)(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 1/\mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\mathrm{e} \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\lambda_2 = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Les valeurs propres de la hessienne sont toutes deux strictement positives donc *f* présente un minimum local *m* au point *A* et on a $m = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**4) a)** Pour tout $(y,z)$ de $\mathbb{R}^2$, on a $y^2+z^2+1 \geq 1$. Ensuite, en étudiant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, on trouve dans les deux cas : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) \geq xe^x$.

**b)** En étudiant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x$, on trouve que $g$ admet un minimum global en $-1$ qui vaut $g(-1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On obtient donc avec 4a) : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) \geq -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Ceci prouve que le minimum local trouvé à la question 3b) est en fait un minimum global de *f* sur $\mathbb{R}^3$.

**5)** Les points critiques de *f* sous la contrainte $(C)$ : $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ sont les points de $(C)$ en lesquels le gradient de *f* est orthogonal à $(H)$ : $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. En écrivant que $\langle \nabla(f)(1, y, -y)\ ,\ (0,1,-1) \rangle = 0$, on obtient : $y = z$.

Comme $z = -y$, on a finalement $z = y = 0$ et le seul point critique sous la contrainte $(C)$ est $(1,0,0)$.

On a $f(1\ ;\ 0\ ;\ 0) = \mathrm{e}$ et, d'après la question 4a), on sait que $f(x, y, z) \geq x\mathrm{e}^x$ donc on a, pour tout réel $y$ : $f(1, y, -y) \geq \mathrm{e}$.

Ainsi, *f* présente un minimum global en $(1,0,0)$ sous la contrainte $(C)$ et la valeur de ce minimum est e.

**6)** Sous la contrainte $(C')$, on a $\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $f(x, y, z) = \mathrm{e}x$.

Mais la contrainte $(C')$ s'écrit $x = \dfrac{1}{y^2 + z^2 + 1}$, ce qui montre que $0 < x \leq 1$.

Dès lors, *f* a un maximum sous la contrainte $(C')$, atteint en $(1,0,0)$ et égal à e.

## Exercice 2 ..........................................................................

**1) a)** D'après le cours, on a: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$.

**b)** On a donc : $E(X) = \dfrac{\theta}{2}$ et $V(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$.

**2) a)** On peut proposer :

```
n=input('entrez n :')
theta=input('entrez theta :')
X=grand(1,n,'unf',0,theta)
Y=max(X)
```

**b)** On a : $F_n(x) = P(Y_n \le x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \le x]\right)$.

On obtient par indépendance : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$

**c)** La fonction $F_n$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et $\theta$ (fonctions constantes sur $]-\infty\,;0[$ et $]\theta\,;+\infty[$, fonction polynomiale sur $]0\,;\theta[$). De plus, elle est continue en 0 et $\theta$ sans problème (limites à droite et à gauche faciles à calculer) donc $Y_n$ est une variable aléatoire à densité.
Une densité $f_n$ de $Y_n$ est une fonction coïncidant avec la dérivée de $F_n$, sauf éventuellement en 0 et $\theta$, donc on peut choisir : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

**d)** Pour commencer, $Y_n$ est bien un estimateur de $\theta$ en tant que fonction, ne dépendant pas de $\theta$, du seul échantillon ($X_1$, $X_2$, ..., $X_n$). De plus, $Y_n$ est une variable aléatoire bornée donc elle a une espérance. Pour finir, on trouve : $E(Y_n) = \int_0^\theta x\, f_n(x)\, dx = \dfrac{n\theta}{n+1}$.
On en déduit que $Y_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\theta$.

**3)** Comme $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, on trouve : $E(Z_n) = \dfrac{\theta}{2}$.
En posant $\widehat{Z_n} = 2Z_n$, $\widehat{Z_n}$ est un estimateur de $\theta$ et $E\left(\widehat{Z_n}\right) = \theta$ donc $\widehat{Z_n}$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**4) a)** Par définition de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers le réel *a*, on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, |a_n - a| < \varepsilon$.
Dès lors, si l'on considère les réels $a_n$, ainsi que le réel $a$, comme des variables aléatoires certaines, on est en droit d'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, P(|a_n - a| \ge \varepsilon) = 0$$

Ceci prouve que : $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P(|a_n - a| \ge \varepsilon) = 0$.
On peut donc en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers *a* et comme la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers *R*, alors, d'après le théorème de Slutsky, la suite $(a_nR_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire $a\,R$.

**b)** En écrivant $n^{\alpha}(T_n-\theta)=n^{\alpha-\beta}\times n^{\beta}(T_n-\theta)$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta}=0$ (car $\alpha<\beta$), le résultat de 4a) montre que $n^{\alpha}(T_n-\theta)$ convergerait vers la variable certaine égale à 0, ce qui contredit l'hypothèse sur l'ordre de convergence $\alpha$.
Conclusion : l'ordre de convergence d'un estimateur est unique.

**5)** On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x)=1-F_T(-x)$.

Comme $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$, on a : $F_Y(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x/\theta} & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$.

**6) a)** $n(Y_n-\theta)$ prend des valeurs négatives ou nulles donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad P(n(Y_n-\theta)\le x)=1$$

**b)** Pour tout réel $x$ strictement négatif et tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$P(n(Y_n-\theta)\le x)==F_n\left(\theta+\frac{x}{n}\right)$$

On vérifie que $0\le\theta+\dfrac{x}{n}\le\theta$ dès que $n\ge-\dfrac{x}{\theta}$, puis en remplaçant grâce à 2a) :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge-\frac{x}{\theta},\ P(n(Y_n-\theta)\le x)=\left(1+\frac{x}{n\theta}\right)^n$$

**c)** D'après ce qui précède, pour tout réel $x$ strictement négatif, en prenant $n>-\dfrac{x}{\theta}$, on peut écrire : $P(n(Y_n-\theta)\le x)=\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n\theta}\right)\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n\theta}\right)=\dfrac{x}{\theta}$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P(n(Y_n-\theta)\le x)=e^{x/\theta}$$

Pour finir, en notant $G_n$ la fonction de répartition de $n(Y_n-\theta)$, on a :

$$\forall x\ne 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x)=F_Y(x)$$

Ceci prouve que $n(Y_n-\theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire $Y$ (puisque 0 n'est pas un point de continuité de $F_Y$).
On en déduit, par unicité de l'ordre de convergence, que $Y_n$ est d'ordre 1.

**7) a)** D'après la question 3), on trouve bien $\widehat{Z_n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2X_i)$.

**b)** La suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes (lemme des coalitions), de même loi (celle de $2X$), ayant une espérance $E(2X)=\theta$ et une variance $V(2X)=4V(X)=\dfrac{\theta^2}{3}$, donc on peut appliquer le théorème limite central à cette suite, qui stipule que $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ suivant la loi normale centrée réduite.

**c)** On trouve effectivement : $\widehat{Z_n}^* = \dfrac{\sqrt{3n}}{\theta}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$.

De plus, on a $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)=\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}\widehat{Z_n}^*$ donc, par composition par $x\mapsto \dfrac{\theta}{\sqrt{3}}x$ continue sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ converge en loi vers $\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}Z$. D'après le cours sur la loi normale, $\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}Z$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,\dfrac{\theta^2}{3}\right)$ donc $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ converge en loi vers une variable non nulle. Par unicité, l'ordre de convergence de $\widehat{Z_n}$ est égal à $\dfrac{1}{2}$.

## Exercice 3 ........................................................................

**1) a)** Soit $x$ un élément de $\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Im}(p)$.

Il existe $t$ élément de $E$ tel que $x=p(t)$ et $p(x)=0$. On en déduit $x=0$.

On a donc $\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Im}(p)=\{0_E\}$.

Comme $\dim\operatorname{Ker}(p)+\dim\operatorname{Im}(p)=\dim E$, on conclut : $E=\operatorname{Ker}(p)\oplus\operatorname{Im}(p)$.

**b)** • Soit $x$ élément de $\operatorname{Ker}(Id_E-p)$. On a alors $x=p(x)$, ce qui prouve que $x$ appartient à $\operatorname{Im}(p)$. On a donc $\operatorname{Ker}(Id_E-p)\subset\operatorname{Im}(p)$.

• Soit $x$ un élément de $\operatorname{Im}(p)$, il existe $u$ élément de $E$ tel que $x=p(u)$.

En appliquant $p$, on obtient : $p(x)=x$, ce qui prouve que $x$ appartient à $\operatorname{Ker}(Id_E-p)$. On a donc : $\operatorname{Im}(p)\subset\operatorname{Ker}(Id_E-p)$.

Par double inclusion :

$$\boxed{\operatorname{Im}(p)=\operatorname{Ker}(Id_E-p)}$$

**c)** En remplaçant $\operatorname{Im}(p)$ par $\operatorname{Ker}(Id_E-p)$ dans l'égalité obtenue à la question 1a), on obtient : $E=\operatorname{Ker}(p)\oplus\operatorname{Ker}(Id_E-p)$, ce qui prouve que les valeurs propres de $p$ sont dans $\{0\ ;1\}$.

• Si 0 est la seule valeur propre de $p$, alors $p$ est l'endomorphisme nul qui est diagonalisable.

- Si 1 est la seule valeur propre de $p$, alors $p$ est l'endomorphisme identité qui est diagonalisable.
- Si 0 et 1 sont valeurs propres de $p$, alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(Id_E - p)$ et $p$ est diagonalisable.

Il existe donc une base de $E$ formée de vecteurs propres de $p$ dans laquelle la matrice $D$ de $p$ est diagonale dont la diagonale ne contient que des 0 et des 1 donc la trace de cette matrice est égale à $\text{rg}(p)$.

On a donc : $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(D) = \text{rg}(p)$.

**2)** On procède par récurrence.

- Pour $k = 1$, on a bien $\dim(E_1) \leq \dim(E_1)$.
- Si l'on suppose, pour un entier $k$ fixé supérieur ou égal à 1, que $\dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k)$, alors, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) = \dim(E_1 + ... + E_k) + \dim(E_{k+1}) - \dim((E_1 + ... + E_k) \cap E_{k+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_{k+1}) - \dim((E_1 + ... + E_k) \cap E_{k+1})$$

On en déduit :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1})$$

- On a bien montré par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k)$$

***Partie 2***

**3)** On calcule : $q_k^2 = q_k \circ q_k = = \sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} p_i \circ p_j$.

Pour $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$ et on sait que $p_i^2 = p_i$ donc il reste : $q_k^2 = q_k$.

On a bien montré que $q_k$ est un projecteur.

**4) a)** $\forall y \in \text{Im}(q_k)$, $\exists x \in E$, $y = q_k(x) = p_1(x) + p_2(x) + ... + p_k(x)$. Ceci montre que $y$ appartient à $\text{Im}(p_1) + ... + \text{Im}(p_k)$, et ainsi : $\text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + ... + \text{Im}(p_k)$.

**b)** • Pour compléter ce qui précède, on a, par linéarité de la trace :

$$\text{Tr}(q_k) = \text{Tr}(p_1) + \text{Tr}(p_2) + ... + \text{Tr}(p_k)$$

D'après la question 1), ceci s'écrit : $\text{rg}(q_k) = \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + ... + \text{rg}(p_k)$.

En utilisant la question 2), on obtient :

$$\text{rg}(q_k) \geq \dim(\text{Im}(p_1) + ... + \text{Im}(p_k))$$

- D'après 4a), la dimension de $\text{Im}(q_k)$ est inférieure ou égale à celle de $\text{Im}(p_1) + ... + \text{Im}(p_k)$ et d'après le point précédent, elle est supérieure à la dimension de $\text{Im}(p_1) + ... + \text{Im}(p_k)$ donc ces deux dimensions sont égales.

Pour résumer, on a $\begin{cases}\mathrm{Im}(q_k)\subset \mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)\\ \mathrm{rg}(q_k)=\dim(\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k))\end{cases}$, ce qui prouve, par inclusion et égalité des dimensions, que :

$$\mathrm{Im}(q_k)=\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)$$

- Pour finir, l'égalité $\mathrm{rg}(q_k)=\mathrm{rg}(p_1)+\mathrm{rg}(p_2)+...+\mathrm{rg}(p_k)$, obtenue plus haut peut s'écrire $\dim(\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k))=\dim\mathrm{Im}(p_1)+...+\dim\mathrm{Im}(p_k)$.

Ceci prouve que la somme $\mathrm{Im}(q_k)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus...\oplus\mathrm{Im}(p_k)$ est directe.

Bilan :

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus...\oplus\mathrm{Im}(p_k)}$$

**5) a)** Comme $\mathrm{Im}(q_k)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus...\oplus\mathrm{Im}(p_k)$, alors, pour tout $i$ de $[\![1,k]\!]$, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(p_j)\subset\mathrm{Im}(q_k)$, donc, pour tout $x$ de $E$, $p_j(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(q_k)$, qui est égal à $\mathrm{Ker}(q_k-Id)$, et ainsi : $\forall x\in E$, $q_k\left(p_j(x)\right)=p_j(x)$.

On a donc : $q_k\circ p_j=p_j$

**b)** Par définition de $q_k$, on a : $q_k\circ p_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}p_i\circ p_j+p_j$.

D'après la question 6a), on a $q_k\circ p_j=p_j$ donc il reste : $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}p_i\circ p_j=\theta$.

En appliquant ceci à un vecteur $x$ quelconque de $E$, on obtient :

$$\forall x\in E,\ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}p_i\left(p_j(x)\right)=0$$

**c)** L'égalité précédente peut s'écrire :

$$p_1(p_i(x))+...+p_{j-1}\left(p_j(x)\right)+\underbrace{p_j\left(p_j(0)\right)}_{\text{vecteur nul}}+p_{j+1}\left(p_j(x)\right)+...+p_k\left(p_j(x)\right)=0$$

La somme $\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)$ est directe donc, par unicité de l'écriture du vecteur nul, on a :

$$\forall x\in E,\ p_1\left(p_j(x)\right)=...=p_{j-1}\left(p_j(x)\right)=p_{j+1}\left(p_j(x)\right)=...=p_k\left(p_j(x)\right)=0$$

Ainsi, pour tout couple $(i,j)$ de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a $p_i\circ p_j=\theta$.

**6)** $q_k$ est un projecteur si, et seulement si, pour tout couple $(i,j)$ de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a $p_i\circ p_j=\theta$.

## Problème ........................................................................

### *Partie 1 : préliminaires*

**1) a)** On peut proposer :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
u=sum(x.^-1)-log(n)
disp(u)
```

**b)** Pour tout $t$ de $[k,k+1]$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. On obtient alors en intégrant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

**c)** En sommant cette inégalité pour $k$ allant de 1 à $n-1$ (avec $n \geq 2$), on trouve, après quelques étapes : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$.

On en déduit $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$ donc $u_n$ appartient à $[0;1]$.

**2) a)** Comme $x \in [0;1[$, alors, pour tout $t$ de $[0,x]$, on a $t \neq 1$, d'où :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

**b)** En intégrant entre 0 et $x$, on obtient, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1} dt = -\ln|1-x| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Comme $\int_0^x t^{p-1} dt = \frac{x^p}{p}$ et comme $1-x>0$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

**c)** Pour tout $t$ de $[0;x]$, on a $1-x \leq 1-t \leq 1$ et on en déduit :

$$t^n \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

En intégrant entre 0 et $x$ (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ donc, par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

**d)** D'après l'égalité obtenue à la question 3b) et le résultat ci-dessus, la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente, et on a : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

**3) a)** • Dans un premier temps, on a : $\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j$.

Comme tous les termes sont positifs, on peut majorer :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$$

• Dans un deuxième temps, on a : $\sum_{k=1}^{2n} c_k = \sum_{i=1}^{2n} a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j$.

Comme tous les termes sont positifs, on peut minorer : $\sum_{k=1}^{2n} c_k \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{2n-i} b_j$.

Comme $2n-i \geq n$, on peut minorer encore : $\sum_{k=1}^{2n} c_k \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$.

En conclusion, on trouve bien : $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

**b)** En posant $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, la suite $(C_n)$ est croissante et majorée par $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \sum_{j=0}^{+\infty} b_j$, ce qui montre qu'elle converge et ainsi, la série de terme général $c_n$ est convergente.
De plus, en passant à la limite dans l'encadrement obtenu en 3a), et en notant $C$ la somme de la série de terme général $c_n$, on obtient : $C = AB$.

**c) i)** La série de terme général $a_n = \frac{x^n}{n}$ est convergente d'après la question 2d) et la série de terme général $b_n = x^n$ est convergente en tant que série géométrique dont la raison $x$ est strictement entre –1 et 1. Elles sont, bien sûr, à termes positifs puisque $x$ est positif.

**ii)** On peut proposer :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur pour x :')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=(x.^u)./u
b=x.^v
c=sum(a.*b)
disp(c)
```

**iii)** Avec, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{x^k}{k}$, et, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $b_k = x^k$, on obtient, après simplification : $c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) x^n$.

***Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série***

**4) a)** Grâce aux résultats de la question 3b) et de la question 3c) iii), on a :

$$\forall x \in [0;1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$$

**b)** D'après la question 2d), on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ et on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$, d'où : $\forall x \in [0;1[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

**5) a)** En étudiant la fonction $h$ qui, à tout réel $u$ de $\mathbb{R}_+^*$ associe $u - \ln u$, on trouve : $\forall u > 0$, $h(u) \geq 1$. A fortiori, $h$ est positive, donc : $\forall u > 0,\ \ln u \leq u$.

**b)** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a, d'après ce qui précède : $(\ln n)x^n \leq nx^n$.

Comme $x$ appartient à $]-1\,;1[$, la série de terme général $nx^n$ est convergente (série proportionnelle à la série géométrique dérivée de raison $x$). D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on conclut que la série de terme général $(\ln n)x^n$ converge.

**6) a)** Grâce à la question 1c), on a : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n - x^n \leq (\ln n)x^n \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$. On peut sommer pour $n$ allant de 1 à $+\infty$ car les séries en jeu convergent et on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}x^n \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

On a bien : $\forall x \in [0;1[,\ \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} - \dfrac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$

**b)** Pour tout $x$ élément de $[0;1[$, on a :

$$1 + \frac{x}{\ln(1-x)} \leq \frac{f(x)}{\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}} \leq 1$$

On a $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+\dfrac{x}{\ln(1-x)}\right)=1$ et par encadrement, on conclut : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}}=1$.

Conclusion : $f(x)\underset{1^-}{\sim}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

**7) a)** Si on se donne deux réels $x$ et $y$ éléments de $[0\,;1[$ tels que $x\le y$, alors on a : $(\ln n)\,x^n\le(\ln n)\,y^n$. En sommant, on trouve $f(x)\le f(y)$.

Conclusion : $f$ est croissante sur $[0\,;1[$.

**b)** On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}=+\infty$.

On a donc le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{c|ccc||}
x & 0 & & 1 \\
\hline
 & & & +\infty \\
f & & \nearrow & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

**8) a)** • Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 on a $\ln n\ge 0$ et pour tout $x$ de $[0\,;1[$, on a $x^n\ge 0$ donc $f(x)\ge 0$.

• Le premier terme de la somme définissant $f(x)$ étant nul, on a $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$, et avec 5a), on en déduit : $f(x)\le\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n\,x^n$.

On trouve bien :

$$\forall x\in[0\,;1[,\ 0\le f(x)\le\frac{x}{(1-x)^2}-x$$

**b)** • Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)$. On en déduit que $f$ est continue à droite en 0.

• En divisant par $x>0$ l'encadrement obtenu à la question 8a), on obtient :

$$0\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{(1-x)^2}-1$$

On obtient, toujours par encadrement : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

Conclusion : $f$ est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$.

**c)** La fonction $f$ est continue sur $[0\,;1[$ donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est impropre en 1, où l'on dispose de l'équivalent : $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.
Grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, $\int_0^1 f(x)\,dx$ a même nature que $\int_0^1 \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}dx$.

Pour tout $a \in [0\,;1[$, on a $\int_0^a \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}dx = \left[\dfrac{(\ln(1-x))^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{(\ln(1-a))^2}{2}$ et $\lim\limits_{a \to 1^-} \dfrac{(\ln(1-a))^2}{2} = +\infty$ donc l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}dx$ diverge et, par conséquent $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge aussi.