Corrigé

Exercice 1 ....

1) a) Il est évident que U et V suivent la même loi.
On a $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F_U(x) = 0}$$

De plus, pour tout réel x positif, on a :

$$F_U(x) = P(U \le x) = P(X^2 \le x) = P\left(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\right) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right)$$

Comme $\Phi\left(-\sqrt{x}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{x}\right)$, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_U(x) = 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1}$$

On dérive F_U sauf en 0 :

$$F_U'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \varphi\left(\sqrt{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En remplaçant l'expression de $\varphi\left(\sqrt{x}\right)$ et en posant par exemple $f_U(0) = 0$, on obtient une densité f_U de U :

$$f_U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$f_U(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times 2^{\frac{1}{2}}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$$

On reconnaît que :

$$\boxed{\text{La loi commune à } U \text{ et } V \text{ est la loi } \Gamma(2, \tfrac{1}{2})}$$

b) D'après le cours sur la loi gamma, on a :

$$\boxed{E(U) = E(V) = 1 \text{ et } \mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V) = 2}$$

2) a) Comme $W = U + V$ et comme U et V sont indépendantes (puisque X et Y le sont) la stabilité de la loi gamma par l'addition permet d'affirmer que W suit la loi $\Gamma(2, 1)$, c'est-à-dire la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$\boxed{E(W)=2\,,\ \mathrm{Var}(W)=4}$$

b) Comme U et V prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et sont indépendantes, on a :

$$W(\Omega)=\mathbb{R}_+$$

Ceci montre déjà (l'énoncé en faisait d'ailleurs cadeau) que : $\forall x\in\mathbb{R}_-^*\,,\ f_W(x)=0$.
D'après le rappel donné par l'énoncé, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$$

Cherchons sur quel intervalle la fonction intégrée est non nulle :

$$\big(f_U(t)\,f_V(x-t)\neq 0\big)\Leftrightarrow\big(f_U(t)\neq 0 \text{ et } f_V(x-t)\neq 0\big)$$

Par conséquent :

$$\big(f_U(t)\,f_V(x-t)\neq 0\big)\Leftrightarrow\big(t>0 \text{ et } x-t>0\big)\Leftrightarrow\big(t>0 \text{ et } t<x\big)\Leftrightarrow\big(0<t<x\big)$$

Il reste donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\int_0^x f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt}$$

c) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ \forall t\in\,]0,x[\,,\ f_U(t)\,f_V(x-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)}{2}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ f_W(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{2\pi\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dt=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt$.

On a donc : $I(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt=2\pi\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}f_W(x)$.

Pour finir, comme W suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$, on a :

$$f_W(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

On en déduit : $I(x)=2\pi\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
Bilan :

$$\boxed{I(x)=\pi}$$

Exercice 2 ....

1) Pour commencer, comme A et M sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ est aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si λ est un réel, on a :
$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)(M+\lambda N)-\mathrm{Tr}(M+\lambda N)A$. Par linéarité de la trace et grâce aux propriétés du produit d'une matrice par un réel, on obtient successivement :

$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)M+\lambda\mathrm{Tr}(A)N-\mathrm{Tr}(M)A-\lambda\mathrm{Tr}(N)A$.

$f(M+\lambda N)=\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A+\lambda\big(\mathrm{Tr}(A)N-\mathrm{Tr}(N)A\big)$.

$f(M+\lambda N)=f(M)+\lambda f(N)$: ceci montre que *f* est linéaire.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

2) • Si $\mathrm{Tr}(A)=0$, l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ devient $\mathrm{Tr}(M)A=0$ et comme A n'est pas nulle, on en déduirait $\mathrm{Tr}(M)=0$. Comme il existe des matrices dont la trace n'est pas nulle, l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ n'est donc pas vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$, avec l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$, on peut écrire $M=\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}A$. Comme n est supérieur ou égal à 2, il existe des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas proportionnelles à A (sinon $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ serait de dimension 1), ce qui prouve que l'égalité $\mathrm{Tr}(A)M-\mathrm{Tr}(M)A=0$ n'est pas vraie pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : *f* n'est pas l'endomorphisme nul.

3) a) .Par définition de *f*, on a : $(f\circ f)(M)=f\big(f(M)\big)=\mathrm{Tr}(A)f(M)-\mathrm{Tr}\big(f(M)\big)A$.

Mais, par linéarité de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}\big(f(M)\big)=\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M)-\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)=0$$

On en déduit :

$$\boxed{(f\circ f)(M)=\mathrm{Tr}(A)f(M)}$$

b) On vient de montrer que $f\circ f=\mathrm{Tr}(A)f$, ce qui prouve que le polynôme $X^2-\mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de *f*. Ainsi, les valeurs propres de *f* sont parmi les racines de ce polynôme, et par conséquent :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } f \text{ sont : 0 et } \mathrm{Tr}(A)}$$

4) Il suffit de constater que $f(A)=0$ pour conclure que A est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre 0 (puisque A n'est pas la matrice nulle).

5) Si $\mathrm{Tr}(A)=0$, alors la seule valeur propre de *f* est 0 et *f* n'est diagonalisable que si *f* est l'endomorphisme nul (puisque sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ serait semblable à la matrice nulle donc nulle elle-même).

Mais *f* n'est pas l'endomorphisme nul donc on peut conclure que *f* n'est pas diagonalisable.

6) a) Comme la trace n'est pas une application linéaire nulle (par exemple, on a $\mathrm{Tr}\,(I_n)=n$), son image est $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1, et grâce au théorème du rang, son noyau est de dimension n^2-1.

b) Pour toute matrice M appartenant au noyau de la trace, on a, par définition de l'endomorphisme f :

$$f(M) = \operatorname{Tr}(A)M$$

On en déduit que $\operatorname{Tr}(A)$ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n^2 - 1$.
Comme, d'après la troisième question, 0 est aussi valeur propre avec un sous-espace propre associé qui est au moins de dimension 1, on conclut :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

Exercice 3 ....

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

1) a) On reconnaît $\Gamma(k+1)$ qui est convergente et vaut d'ailleurs $k!$.

b) • Soit P et Q deux polynômes de E. Posons $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{3} b_k X^k$.

On a alors : $P(t)Q(t)e^{-t} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_i b_j t^{i+j} e^{-t}$.

On sait que l'intégrale $\Gamma(i+j+1) = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt$ est convergente donc l'intégrale définissant $\langle P,Q\rangle$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes, elle est donc elle même convergente : $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est bien une forme.

• Comme $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, la forme est symétrique.

• Soit P, Q et R trois polynômes de E et λ un réel, on a par définition :
$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)R(t)e^{-t} + Q(t)R(t)e^{-t})dt$ Par linéarité de l'intégration dans le cadre d'intégrales convergentes, on obtient :

$$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \int_0^{+\infty} \lambda P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt$$

On a finalement :

$$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle$$

La forme est donc linéaire à gauche et, par symétrie, elle est bilinéaire.

• $(P,P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ donc (P,P) est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction positive, par conséquent : $(P,P) \geq 0$.

• $(P,P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$. La fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et son intégrale sur $\mathbb{R}_+$ est nulle donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$. Mais pour tout réel t, on a $e^{-t} \neq 0$, donc $P^2(t) = 0$ soit : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(t) = 0$.
Le polynôme P a une infinité de racines (les réels positifs) donc P est nul.
En conclusion, $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, donc :

$$\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

2) Par définition de la norme, on a : $\| X^3 - Q \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - Q(t)\right)^2 e^{-t} dt$.

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\| X^3 - Q \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - xt - y\right)^2 e^{-t} dt}$$

3) a) Le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\| X^3 - Q \|^2$ minimale est le théorème de projection orthogonale : il s'agit ici de la projection orthogonale sur F.

On a alors : $\Delta = \| X^3 - Q_0 \|^2 = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - x_0 t - y_0\right)^2 e^{-t} dt$.

b) Comme Q_0 est le projeté orthogonal de X^3 sur F, on sait que $X^3 - Q_0$ est orthogonal à F donc à tout vecteur de F et en particulier aux polynômes 1 et X.
Par conséquent, on a :

$$\langle X^3 - Q_0, 1\rangle = \langle X^3 - Q_0, X\rangle = 0$$

c) En traduisant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \left(t^3 - x_0 t - y_0\right) e^{-t} dt = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(t^4 - x_0 t^2 - y_0 t\right) e^{-t} dt = 0$$

En scindant les intégrales en trois intégrales (convergentes), on trouve :

$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt - x_0 \int_0^{+\infty} t\, e^{-t} dt - y_0 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 0$.

$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt - x_0 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt - y_0 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 0$.

En remplaçant les valeurs des intégrales gamma, on obtient le système :

$$\begin{cases} 6 - x_0 - y_0 = 0 \\ 24 - 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

d) En soustrayant ces deux équations, on a tout de suite : $x_0 = 18$, puis on trouve ensuite $y_0 = -12$. On a alors : $\Delta = \int_0^{+\infty} \left(t^3 - 18t + 12\right)^2 e^{-t} dt$

En développant, on trouve : $\Delta = \int_0^{+\infty} \left(t^6 - 36t^4 + 24t^3 + 324t^2 - 432t + 144\right) e^{-t} dt$.

En scindant en plusieurs intégrales gamma convergentes, on arrive à :

$$\Delta = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t} dt - 36\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt + 24\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt + 324\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$
$$-432\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + 144\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

Enfin, on obtient :

$\Delta = 720 - 36 \times 24 + 24 \times 6 + 324 \times 2 - 432 + 144 = 720 - 864 + 144 + 648 - 432 + 144$

Conclusion :

$$\Delta = 360$$

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

4) En développant et en scindant l'intégrale définissant $f(x,y)$ sans se soucier des problèmes de convergence déjà évoqués, on trouve :

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t}dt - 2x\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t}dt - 2y\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}dt + x^2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt$$
$$+2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + y^2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$$

On a donc :

$$\boxed{f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 720}$$

5) La fonction *f* est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 48 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y - 12$$

Les points critiques de *f* sont les solutions du système : $\begin{cases} 4x + 2y - 48 = 0 \\ 2x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$

En simplifiant, ce système équivaut à : $\begin{cases} 2x + y - 24 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$.

Avec la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on obtient : $\begin{cases} x - 18 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$

On en déduit $x = 18$ et $y = -12$.

$$\boxed{\text{Le seul point critique de } f \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ est } (18,-12)}$$

6) La fonction *f* est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et les dérivées secondes de *f* en ce point sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(18,-12) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(18,-12) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(18,-12) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(18,-12) = 2$$

Avec les notations de Monge, on en déduit : $rt - s^2 = 8 - 4 = 4 > 0$. Ceci prouve que *f* a un extremum local au point $(18,-12)$. Comme de plus *r* est strictement positif, cet extremum est un minimum.

En notant *m* ce minimum, on a (calcul déjà fait, mais bon…) :

$m = f(18,-12) = 2\times 18^2 + (-12)^2 + 2\times 18\times(-12) - 48\times 18 - 12\times(-12) + 720$.

$m = 648 + 144 - 432 - 864 + 144 + 720 = 792 - 432 - 864 + 144 + 720$.

$m = 360 - 864 + 144 + 720 = 1224 - 864$.

Conclusion :

$$m = 360$$

7) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$f(x,y) - 360 = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 360$$

On peut écrire successivement :

$f(x,y) - 360 = 2(x^2 + xy - 24x) + y^2 - 12y + 360$.

$$f(x,y)-360=2\left(\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2-\frac{y^2}{4}+12y-144\right)+y^2-12y+360.$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{y^2}{2}+12y+72$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{1}{2}\left(y^2+24y+144\right)$$

$$f(x,y)-360=2\left(x+\frac{y}{2}-12\right)^2+\frac{1}{2}\left(y+12\right)^2$$

On constate que $f(x,y)-360$ est positif en tant que somme de deux carrés de réels, ce qui prouve que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)\geq 360$.

On peut conclure :

$$\boxed{\text{Le minimum } m=360 \text{ de } f \text{ est global}}$$

Remarque. On pouvait également remarquer que comme la hessienne est constante, elle est partout définie positive, ce qui assure que le minimum local est en fait global.

Problème..

1) a) Le réel x étant fixé, la fonction $h : t \mapsto \max(x,t)$ est définie par :

$$h(t)=\begin{cases} x \text{ si } t\leq x \\ t \text{ si } t>x \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$: elle est constante égale à x sur $]-\infty,x]$, affine sur $]x,+\infty[$ et elle est continue en x puisque $\lim_{t\to x^-} h(t)=h(x)=x=\lim_{t\to x^+} h(t)$.

La fonction h est donc, a fortiori, continue sur $[0,1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale $y=\int_0^1 \max(x,t)dt$.

b) • Si x est négatif ou nul, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $x\leq t$ et :

$$y=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

• Si x appartient à $]0,1[$, alors :

$$y=\int_0^x \max(x,t)dt+\int_x^1 \max(x,t)dt=\int_0^x x\,dt+\int_x^1 t\,dt=x^2+\frac{1-x^2}{2}=\frac{x^2+1}{2}$$

• Si x est supérieur à 1, alors, comme t appartient à $[0,1]$, on a $t\leq x$ et :

$$y=\int_0^1 x\,dt=x$$

Bilan :

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Si X suit une loi géométrique alors X prend des valeurs supérieures ou égales à 1 et, pour tout ω de Ω, on a : $Y(\omega) = \int_0^1 X(\omega)dt = X(\omega)$.

Ceci étant vrai pour tout ω de Ω, on a : $Y = X$

Conclusion :

Si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$

3) a) Comme $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, la famille $((X = -1), (X = 0), (X = 1))$ est un système complet d'événements et on a : $P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$ et comme $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$$

b) D'après la première question, on a les deux affirmations suivantes :

• Si X prend la valeur -1 ou la valeur 0, alors Y prend la valeur $\frac{1}{2}$.

• Si X prend la valeur 1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$$

On a : $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}$ et $P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$.

On a donc : $E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ et $E(Y^2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$

On en déduit : $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{7}{16} - \frac{25}{64} = \frac{3}{64}$

En résumé :

$$\boxed{E(Y) = \frac{5}{8} \text{ et } V(Y) = \frac{3}{64}}$$

c) La déclaration complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var x : real ;
Begin
x : = random(4) ;
```

If $x = 1$ then $y := 1$ else $y := 1/2$;
End ;

4) a) Toujours d'après la première question, on a les deux affirmations suivantes :

• Si X prend la valeur 0, alors Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$.

• Si X prend une valeur supérieure ou égale à1, alors Y prend la même valeur que X, c'est-à-dire une valeur supérieure ou égale à 1.

Conclusion :

$$\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*}$$

On a alors la loi de Y : • $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

b) Pour tout entier naturel k non nul, on a : $k\,P(Y = k) = k\,P(X = k)$ et comme X possède une espérance, Y en possède une également. De plus, on a :

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{2} + E(X).$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda}$$

De la même façon, Y possède un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(Y^2) = \frac{1}{4} \times e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{4} + E(X^2) = \frac{e^{-\lambda}}{4} + V(X) + (E(X))^2.$$

En remplaçant $E(X)$ et $V(X)$, on obtient : $E(Y^2) = \dfrac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2$.

On sait que $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ donc : $V(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2 - \left(\dfrac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda\right)^2$.

En réduisant, on obtient :

$$\boxed{V(Y) = \frac{e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{4} + \lambda\left(1 - e^{-\lambda}\right)}$$

5) a) Comme X prend des valeurs comprises entre 0 et 1, alors, toujours d'après la première question, et ceci même si X prend les valeurs 0 et 1, on a :

$$\boxed{Y = \frac{X^2 + 1}{2}}$$

Remarque. En effet, si X prend la valeur 0, cette égalité donne pour Y la valeur $\frac{1}{2}$, ce qui est correct, et si X prend la valeur 1, cette égalité donne pour Y la valeur 1, comme X, ce qui est encore correct.

b) Comme X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, alors X^2+1 prend ses valeurs entre 1 et 2 et Y prend ses valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},1\right]}$$

c) Pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a :

$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X^2+1}{2}\le x\right)=P\left(X^2+1\le 2x\right)=P\left(X^2\le 2x-1\right)$.

Comme $2x-1$ est positif, on obtient : $F_Y(x)=P\left(-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right)$.

On a donc : $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $F_Y(x)=F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)-F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$.

Pour finir, $-\sqrt{2x-1}$ est négatif donc $F_X\left(-\sqrt{2x-1}\right)$ est nul et $\sqrt{2x-1}$ appartient à $[0,1]$ donc $F_X\left(\sqrt{2x-1}\right)=\sqrt{2x-1}$. Ainsi, il reste :

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ F_Y(x)=\sqrt{2x-1}}$$

d) Si on complète la définition de F_Y, on obtient :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1} \text{ si } \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$$

On sait déjà que Y est une variable aléatoire (c'est admis par l'énoncé), il reste à vérifier deux conditions :

• F_Y est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de F_Y sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1,+\infty[$ est acquise puisque la restriction de F_Y à ces intervalles est constante donc continue.

La continuité de F_Y sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$ est acquise puisque F_Y est polynomiale sur cet intervalle.

En $\frac{1}{2}$, on a : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} F_Y(x) = F_Y(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} 0 = 0$.

En 1, on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F_Y(x) = F_Y(1) = 0$.

Premier bilan : la fonction F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$.

• F_Y est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, en $\frac{1}{2}$ et en 1) ?

La classe C^1 de F_Y sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]1, +\infty\right[$ est acquise puisque F_Y est constante sur ces intervalles.

La classe C^1 de F_Y sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ est acquise puisque F_Y polynomiale sur cet intervalle.

Deuxième bilan : la fonction F_Y est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en $\frac{1}{2}$ et en 1.

On peut conclure :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

e) D'après la question 4a), on sait que : $Y = \dfrac{X^2 + 1}{2}$.

On sait que X possède un moment d'ordre 2 donc Y possède une espérance.

De plus, on a : $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y) = \frac{1}{2}E(X^2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

Bilan :

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$$

f) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Begin
y : = (sqr(x) + 1) / 2 ;
End ;
```

6) a) Puisque $X - 1$ suit une loi exponentielle, on en déduit que $(X-1)(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et, par conséquent, on a : $X(\Omega) = [1, +\infty[$.

Comme X ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1, le résultat de la première question donne : $Y = X$.

Remarque. Si X prend la valeur 1, on a $Y = \dfrac{X^2 + 1}{2} = 1 = X$, ce qui est correct.

b) Comme $Y = X$, on a, par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X) = E(X-1)+1$$

La loi de $X-1$ est la loi exponentielle de paramètre λ donc $E(X-1)=\dfrac{1}{\lambda}$ et ainsi :

$$\boxed{E(Y)=\frac{1}{\lambda}+1}$$

De même, on a : $V(Y)=V(X)=V(X-1)$ donc :

$$\boxed{V(Y)=\frac{1}{\lambda^2}}$$

c) En notant F_W et F_U les fonctions de répartition de W et U, on a, pour tout réel x :

$F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -\lambda x) = P(1-U \geq e^{-\lambda x})$.

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une **bijection croissante** de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_W(x) = P(U \leq 1-e^{-\lambda x}) = F_U(1-e^{-\lambda x})$.

La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc : $1-e^{-\lambda x} < 1$.

• Si $x \geq 0$, alors, comme $\lambda > 0$, on a $e^{-\lambda x} \leq 1$ d'où $1-e^{-\lambda x} \geq 0$.

On déduit de ce qui précède que $0 \leq 1-e^{-\lambda x} < 1$. Or $F_U(z) = z$ si $0 \leq z < 1$ donc, en remplaçant, on obtient :

$$\forall x \geq 0,\ F_W(x) = 1-e^{-\lambda x}$$

• Si $x < 0$, alors, comme $\lambda > 0$, on a $e^{-\lambda x} > 1$, soit $1-e^{-\lambda x} < 0$.

Or $F_U(z) = 0$ si $z < 0$, donc, en remplaçant, on obtient :

$$\forall x < 0,\ F_W(x) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{W \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = –ln(1 – random) / lambda ; End ;
```

7) a) D'après la première question, on a, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } X(\omega) \leq 0 \\ \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} \text{ si } 0 < X(\omega) < 1 \\ X(\omega) \text{ si } X(\omega) \geq 1 \end{cases}$$

On en déduit :

• Lorsque X prend des valeurs négatives ou nulles, Y prend la valeur $\dfrac{1}{2}$.

• Lorsque X prend des valeurs entre 0 et 1, Y prend des valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1 comme à la question 4b).
• Lorsque X prend des valeurs supérieures à 1, Y prend des valeurs supérieures à 1 (puisque Y et X prennent les mêmes valeurs).
Ainsi, on a bien :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

b) En analysant précisément les trois points ci-dessus, on voit que Y prend la valeur $\frac{1}{2}$ si, et seulement si, X prend des valeurs négatives ou nulles.

On a donc : $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=P(X\le 0)=\Phi(0)$. Comme $\Phi(0)=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

c) Pour commencer, si $x<\frac{1}{2}$, on a : $F_Y(x)=0$.

Pour tout x supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X\le 0],[0<X\le 1],[X>1])$ s'écrit :

$$P(Y\le x)=P(X\le 0)+P([Y\le x]\cap[0<X\le 1])+P([Y\le x]\cap[X>1])$$

D'après l'étude faite à la question 5a), on obtient :

$$P(Y\le x)=P([Y\le x]\cap[X\le 0])+P\left(\left[\frac{X^2+1}{2}\le x\right]\cap[0<X\le 1]\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

On a donc :

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(\left[-\sqrt{2x-1}\le X\le\sqrt{2x-1}\right]\cap[0<X\le 1]\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(\max\left(-\sqrt{2x-1},0\right)<X\le\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

Comme $-\sqrt{2x-1}\le 0$, on peut simplifier la deuxième probabilité et on a :

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(0<X\le\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)\right)+P([X\le x]\cap[X>1])$$

À ce stade, il faut savoir si x est supérieur à 1 ou pas, afin de trancher pour la valeur du max mis en jeu dans la deuxième probabilité et pour savoir si la troisième probabilité est nulle ou pas. .

• Si $x\le 1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)=\sqrt{2x-1}$ et $P([X\le x]\cap[X>1])=0$ donc :

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P\left(0<X\le\sqrt{2x-1}\right)=P\left(X\le\sqrt{2x-1}\right)=\Phi\left(\sqrt{2x-1}\right).$$

• Si $x>1$, alors $\min\left(\sqrt{2x-1},1\right)=1$ et $([X\le x]\cap[X>1])=(1<X\le x)$ donc :

$$F_Y(x)=P(X\le 0)+P(0<X\le 1)+P(1<X\le x)=P(X\le x)=\Phi(x).$$

Bilan :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\dfrac{1}{2}\\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\\ \Phi(x) \text{ si } x>1\end{cases}$$

d) Comme $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$, Y n'est pas une variable à densité et comme $Y(\Omega)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, Y n'est pas une variable discrète.

e) Les variables $U_1,\ldots,U_{48}$ sont indépendantes, suivent toutes la même loi et ont une espérance égale à $\dfrac{1}{2}$ et une variance égale à $\dfrac{1}{12}$, donc, d'après le théorème de la limite centrée, on sait que $Z_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}U_k-\dfrac{n}{2}}{\sqrt{\dfrac{n}{12}}}$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$. Comme 48 est grand, on peut considérer ici que la variable aléatoire $Z_{48}=\dfrac{\sum_{k=1}^{48}U_k-\dfrac{48}{2}}{\sqrt{\dfrac{48}{12}}}=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48}U_k-24\right)$ suit la loi normale centrée réduite.

```
Function y : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux−24)/2 ;
If  x <= 0  then  y : = 1/2  else
                      If x < 1  then  y : = (x*x+1)/2  else  y : = x ;
End ;
```