EDHEC 2005 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) a) $\operatorname{Im}\operatorname{tr}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Alors $\operatorname{Im}\operatorname{tr}$ est de dimension 0 ou 1.

Or $\operatorname{tr}(I) = n \neq 0_{\mathbb{R}}$ donc $\operatorname{Im}\operatorname{tr}$ n'est pas égal à $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et ainsi sa dimension n'est pas 0.

Par conséquent $\operatorname{Im}\operatorname{tr}$ est de dimension 1. Ainsi $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \subset \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = 1 = \dim \mathbb{R}$. Il en résulte que :

$$\boxed{\operatorname{Im}\operatorname{tr} = \mathbb{R}.}$$

b) Le théorème du rang donne alors $\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = n^2 - 1$.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} = n^2 - 1.}$$

c) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, pour montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}\operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et que $\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} + \dim \operatorname{Vect}(I) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le second point est clair car $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} = n^2 - 1$ et $\dim \operatorname{Vect}(I) = 1$ (puisque I n'est pas la matrice nulle). Montrons le premier point.

Soit M un élément commun à $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et à $\operatorname{Vect}(I)$. $\operatorname{tr}(M) = 0$ et il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

Alors $0 = \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(\alpha\, I) = \alpha\ \operatorname{tr}(I) = \alpha\, n$. Comme n n'est pas nul, α l'est nécessairement.

Ainsi $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker}\operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Cela achève également de montrer que $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\operatorname{tr} \oplus \operatorname{Vect}(I).}$$

2) a) • Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{tr}(M)$ est un réel et I est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\, I$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Rappelons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f(\lambda\, M+N) = \lambda\, M+N+\big(\operatorname{tr}(\lambda\, M+N)\big)\, I = \lambda\, M+N+\big(\lambda \operatorname{tr}(M)+\operatorname{tr}(N)\big)\, I = \lambda\,\big(M+\operatorname{tr}(M)\, I\big)+\big(N+\operatorname{tr}(N)\, I\big).$

Ainsi $f(\lambda\, M+N) = \lambda\, f(M) + f(N)$.

f est donc une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) *Version 1* • $\forall M \in \operatorname{Ker}\operatorname{tr},\ f(M) = M + \operatorname{tr}(M)\, I = M.$

• Soit M un élément de $\operatorname{Vect}(I)$. Il existe un réel α tel que $M = \alpha\, I$.

$f(M) = \alpha\, f(I) = \alpha\big(I + \operatorname{tr}(I)\, I\big) = \alpha\,(1+n)\, I = (n+1)(\alpha\ I) = (n+1)\, M.$

Ainsi $\forall M \in \operatorname{Ker}\operatorname{tr},\ f(M) = M$ et $\forall M \in \operatorname{Vect}(I),\ f(M) = (n+1)\, M$.

$\mathcal{B}_2 = (I)$ est base de $\operatorname{Vect}(I)$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

$\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ étant supplémentaires, en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans laquelle f a pour matrice la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ oui de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$!

Ainsi f est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et $n+1$.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont 1 et $n+1$.

Version 2 Cherchons les valeurs propres de f.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

Il existe un unique élément (M_1, α) de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr} \times \mathbb{R}$ tel que $M = M_1 + \alpha\, I$.

$f(M) = f(M_1+\alpha\, I) = f(M_1)+\alpha\, f(I) = M_1+\operatorname{tr}(M_1)\, I+\alpha\big(I+\operatorname{tr}(I)\, I\big) = M_1+\alpha\,(1+n)\, I = M_1+\alpha\,(n+1)\, I.$

$f(M) = \lambda\, M \Longleftrightarrow M_1 + \alpha\,(n+1)\, I = \lambda\, M_1 + \lambda\,\alpha\, I.$

Or M_1 et $\lambda\, M_1$ sont deux éléments de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$, $\alpha(n+1)\, I$ et $\lambda\,\alpha\, I$ sont deux éléments de $\operatorname{Vect}(I)$, et $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont en somme directe. Alors :

$$f(M) = \lambda\, M \Longleftrightarrow \begin{cases} M_1 = \lambda\, M_1 \\ \alpha\,(n+1)\, I = \lambda\,\alpha\, I \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)\, M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda)\, I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{cases}.$$

$$f(M)=\lambda\,M \iff \begin{cases} (1-\lambda)\,M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda)=0 \end{cases}$$

• <u>Premier cas</u> Supposons $\lambda=1$. $f(M)=\lambda\,M \iff \alpha\,n=0 \iff \alpha=0 \iff M\in \operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

Comme $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ n'est pas réduit au vecteur nul, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

• <u>Deuxième cas</u> Supposons $\lambda\neq 1$.

$$f(M)=\lambda\,M \iff \begin{cases} M_1 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ \alpha\,((n+1)-\lambda)=0 \end{cases}.$$

Si $\lambda\neq n+1$, $f(M)=\lambda\,M \iff M_1=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\alpha=0 \iff M=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda=n+1$, $f(M)=\lambda\,M \iff M_1=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff M\in \operatorname{Vect}(I)$; alors $\lambda=n+1$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Vect}(I)$.

Finalement f admet deux valeurs propres 1 et $n+1$, et les deux sous-espace propres respectivement associés sont $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I)$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\operatorname{Ker}\operatorname{tr}\oplus\operatorname{Vect}(I)$, f est diagonalisable.

De plus 0 n'est pas valeur propre de f donc f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme diagonalisable de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et ses valeurs propres sont 1 et } n+1.}$$

3) a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$g\big(g(M)\big)=g(M)+\operatorname{tr}\big(g(M)\big)\,J=M+\operatorname{tr}(M)\,J+\operatorname{tr}\big(M+\operatorname{tr}(M)\,J\big)\,J=M+\operatorname{tr}(M)\,J+\big(\operatorname{tr}(M)+\operatorname{tr}(M)\ \operatorname{tr}(J)\big)\,J.$

$g\big(g(M)\big)=M+2\ \operatorname{tr}(M)\,J$ car $\operatorname{tr}(J)=0$. Alors $g\big(g(M)\big)=2\,M+2\ \operatorname{tr}(M)\,J-M=2\,g(M)-\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M)$.

$g\big(g(M)\big)-2\,g(M)+\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\big(g\circ g-2\,g+\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\big(g\circ g-2\,g+\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\big)(M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $g\circ g-2\,g+\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

$$\boxed{X^2-2\,X+1 \text{ est un polynôme annulateur de } g.}$$

b) $X^2-2\,X+1$ est un polynôme annulateur de g dont l'unique racine est 1. Ainsi la seule valeur propre possible de g est 1.

Or $J\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $g(J)=J+\operatorname{tr}(J)\,J=J$ donc 1 est bien une valeur propre de g.

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g.}$$

c) Supposons que g soit diagonalisable. Comme 1 est la seule valeur propre de g, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(g-\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ de g associé à la valeur propre 1 est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ g(M) = M$. En particulier $g(I) = I$ donc $I + \operatorname{tr} I\, J = I$. par conséquent $\operatorname{tr} I\, J = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Comme $\operatorname{tr} I$ n'est pas nulle, J est nulle ce qui contredit l'hypothèse. Finalement :

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque *On pouvait également observer que le sous-espace propre de g associé à la valeur propre* 1 *est* $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ *qui n'est pas égal à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2

1) a)) $X(\Omega) = [0, +\infty[$ donc $X_1(\Omega) = \lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{X_1(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $P(X_1 = k) = P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leqslant X < k+1)$.

Or X est une variable aléatoire à densité donc $P(k \leqslant X < k+1) = P(k < X \leqslant k+1)$.

Ainsi $P(X_1 = k) = P(k < X \leqslant k+1) = F(k+1) - F(k)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = F(k+1) - F(k).}$$

c) X admet pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = F(k+1) - F(k) = \int_k^{k+1} \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda\, t}\right]_k^{k+1} = e^{-\lambda\, k} - e^{-\lambda\,(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\, k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\, k}.}$$

Posons $Y_1 = X_1 + 1$.

$Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_1 = k) = P(X_1 = k-1) = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\,(k-1)} = (1 - e^{-\lambda})\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$.

Posons $p = 1 - e^{-\lambda}$. $p \in]0, 1[$ car λ est strictement positif. De plus $1 - p = e^{-\lambda}$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_1 = k) = p\,(1-p)^{k-1}$.

Ceci achève alors de montrer que Y_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$. Ainsi :

$$\boxed{X_1 + 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\lambda}.}$$

d) $Y_1 = X_1 + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$ donc possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$.

Alors $X_1 = Y_1 - 1$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1$ ou $\dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ ou encore $\dfrac{1}{e^{\lambda} - 1}$.

$$\boxed{X_1 \text{ possède une espérance qui vaut : } \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \text{ ou } \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.}$$

2) a) $X - X_1 = X - \lfloor X \rfloor$ et $X(\Omega) = [0, +\infty[$ donc $(X - X_1)(\Omega) = [0, 1[$. Alors $\Big(10(\,X - X_1)\Big)(\Omega) = [0, 10[$.

Ainsi $\lfloor 10(X - X_1) \rfloor(\Omega) = \{0, 1 \ldots, 9\}$. Finalement :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{0, 1 \ldots, 9\}.}$$

Soit ω un élément de Ω. $X(\omega)$ est un réel positif. $(X - X_1)(\omega)$ est, pour simplifier, sa partie décimale.

$10\,(X - X_1)(\omega)$ est dix fois la partie décimale de $X(\omega)$. Alors la partie entière de $10\,(X - X_1)(\omega)$ est la première décimale de $X(\omega)$.

Donc $X_2(\omega)$ est la première décimale de $X(\omega)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } \omega \text{ de } \Omega,\ X_2(\omega) \text{ représente, pour simplifier, la première décimale de } X(\omega).}$$

b) Soit k un élément de $\{0, 1 \ldots, 9\}$.

$\big(\{X_1 = i\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc $\{X_2 = k\} = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\Big)$.

Cette réunion étant constituée d'événements deux à deux disjoints on a :

$$P(X_2 = k) = P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Big(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\Big)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right).$$

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1 \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right).}$$

Soit k un élément de $\{0, 1 \ldots, 9\}$ et i un élément de $\mathbb{N}$. Soit ω un élément de Ω.

$X_1(\omega) = i$ et $X_2(\omega) = k \iff i \leqslant X(\omega) < i + 1$ et $k \leqslant 10\,(X(\omega) - i) < k + 1$.

$X_1(\omega) = i$ et $X_2(\omega) = k \iff i \leqslant X(\omega) < i + 1$ et $i + \dfrac{k}{10} \leqslant X(\omega) < i + \dfrac{k+1}{10}\cdot$

Or $i \leqslant i + \dfrac{k}{10}$ et $i + \dfrac{k+1}{10} \leqslant i + 1$ donc : $X_1(\omega) = i$ et $X_2(\omega) = k \iff i + \dfrac{k}{10} \leqslant X(\omega) < i + \dfrac{k+1}{10}\cdot$

Finalement $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\} = \left\{i + \dfrac{k}{10} \leqslant X < i + \dfrac{k+1}{10}\right\}$.

Rappelons que X est une variable aléatoire à densité. Ainsi :

$$P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = P\left(i + \frac{k}{10} \leqslant X < i + \frac{k+1}{10}\right) = P\left(i + \frac{k}{10} < X \leqslant i + \frac{k+1}{10}\right).$$

Donc $P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = F\left(i + \dfrac{k+1}{10}\right) - F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)$.

Alors $P(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(\frac{i+k}{10}\right)\right)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(\frac{i+k}{10}\right)\right).}$$

Soit k un élément de $\{0, 1\ldots, 9\}$.

$$\forall i \in \mathbb{N},\ F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(\frac{i+k}{10}\right) = \int_{i+\frac{k}{10}}^{i+\frac{k+1}{10}} \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, \mathrm{d}t = \Big[-e^{-\lambda\, t}\Big]_{i+\frac{k}{10}}^{i+\frac{k+1}{10}} = e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)} - e^{-\lambda\left(i+\frac{k+1}{10}\right)}.$$

$$\forall i \in \mathbb{N},\ F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(\frac{i+k}{10}\right) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, (1 - e^{-\frac{\lambda}{10}})\, e^{-\lambda\, i}.$$

Alors $P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, (1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}) \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^i$.

Comme $|e^{-\lambda}| < 1$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^i = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$ Ainsi : $P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot}$$

3) Soit i un élément de $\mathbb{N}$ et soit k un élément de $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Nous avons vu que : $P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = F\left(i + \dfrac{k+1}{10}\right) - F\left(\dfrac{i+k}{10}\right)$.

Nous avons également vu que : $F\left(i + \dfrac{k+1}{10}\right) - F\left(\dfrac{i+k}{10}\right) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, (1 - e^{-\frac{\lambda}{10}})\, e^{-\lambda\, i}$.

Alors $P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, (1 - e^{-\frac{\lambda}{10}})\, e^{-\lambda\, i} = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda\, i}\, e^{-\frac{\lambda\, k}{10}}\, \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$

Donc $P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = P(X_1 = i)\, P(X_2 = k)$.

Finalement X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $\forall i \in X_1(\Omega),\ \forall k \in X_2(\Omega),\ P\left(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}\right) = P(X_1 = i)\, P(X_2 = k)$. Ainsi :

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.}}$$

EXERCICE 3

---

1) a) f est une application polynômiale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$ et soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 2\, x_i + 2 \times 1 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 = 2\, x_i + 2 \sum_{k=1}^{n} x_k - 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X) = 2 + 2 - 0 = 4$.

Soit j un élément de $[\![1, n]\!]$ distinct de i. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(X) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(X) = 2 \times 0 + 2 \times 1 - 0 = 2$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 2\,x_i + 2\sum_{k=1}^n x_k - 1.}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 4.}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ i\neq j \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_1,x_2,\dots,x_n) = 2.}$$

2) a) Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)=0 \Longleftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ 2\,x_i+2\sum_{k=1}^n x_k - 1 = 0.$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^n x_k \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ x_1 = \dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k \end{cases}.$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ x_1 = \dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{k=1}^n x_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ x_1 = \dfrac{1}{2}-n\,x_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ x_1 = \dfrac{1}{2\,(n+1)} \end{cases}.$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{2\,(n+1)}\cdot$$ Ainsi :

$$\boxed{f \text{ admet un point critique et un seul, le point } (a_1,a_2,\dots,a_n) \text{ où } a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{2\,(n+1)}\cdot}$$

Dans la suite nous poserons $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

b) $$A_n=\nabla^2(A)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(A)\right)=\begin{pmatrix} 4 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_n=\nabla^2(A)=2\,I_n+2\,J_n$.

$$\boxed{\text{La hessienne de } f \text{ en } (a_1,a_2,\dots,a_n) \text{ est la matrice } A_n=\nabla^2(A)=2\,(I_n+J_n).}$$

3) a) Toutes les colonnes de J_n sont égales et non nulles. Ainsi :

$$\boxed{J_n \text{ est de rang } 1.}$$

$\operatorname{rg} J_n = 1$ donc $\operatorname{rg} J_n < n$. Ainsi J_n n'est pas inversible et 0 est alors valeur propre de J_n.

Mieux le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 0 a pour dimension $n-\operatorname{rg} J_n$ soit $n-1$.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n \text{ et le sous-espace propre associé est de dimension } n-1.}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\boxed{J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

c) $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul(le) ainsi n est valeur propre de J_n et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n n'exède pas n, 0 est valeur propre de J_n et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$, et n est valeur propre de J_n. Alors :

1. 0 et 1 sont les seules valeurs propres de J_n ;
2. le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1.

Notons que J_n est alors diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n ce qui n'est pas une grosse surprise pour une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Profitons en alors pour dire que les deux sous-espaces propres de J_n sont supplémentaires et orthogonaux.

Considérons une base orthonormée $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ du sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 0 et une base orthonormée X_n du sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n.

Comme ces deux sous-espaces sont orthogonaux et supplémentaires $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J_n respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0 et n.

Soit alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

P est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée et ${}^tPJ_nP = P^{-1}J_nP$ est la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors ${}^tPA_nP = {}^tP\,2\,(I_n + J_n)\,P = 2\left({}^tPI_nP + {}^tPJ_nP\right) = 2\,(I_n + D) = 2\,(I_n + \mathrm{Diag}(0, 0, \ldots, 0, n))$.

$P^{-1}A_nP = {}^tPA_nP = 2\,\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1, n+1) = \mathrm{Diag}\big(2, 2, \ldots, 2, 2\,(n+1)\big)$.

A_n est donc semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\big(2, 2, \ldots, 2, 2\,(n+1)\big)$.

Ainsi les valeurs propres de A_n sont celles de la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)$ c'est à dire 2 et $2\,(n+1)$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_n \text{ sont } 2 \text{ et } 2\,(n+1).}$$

Remarque 1 On peut obtenir le résultat de bien d'autres manières en particulier de la suivante.

Si λ est un réel, $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid A_n\,X = \lambda\,X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid J_n\,X = \left(\dfrac{\lambda}{2} - 1\right)\,X\}$, donc λ est valeur propre de A_n si et seulement si $\dfrac{\lambda}{2} - 1$ est valeur propre de J_n c'est à dire si et seulement si $\dfrac{\lambda}{2} - 1 = 0$ ou $\dfrac{\lambda}{2} - 1 = n$. Alors les valeurs propres de A_n sont 2 et $2\,(n+1)$.

Remarque 2 Notons que le sous-espace propre de A_n associé à la valeur propre 2 (resp. $2\,(n+1)$) est le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 0 (resp. n).

4) a) *Version 1* Les valeurs propres de la matrice symétrique A_n, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont strictement positives donc, d'après le cours (?), si H est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tHA_nH > 0$.

Version 2 Même chose avec une démonstration s'appuyant sur la réduction obtenue plus haut.

Nous avons plus haut montré l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$P^{-1}A_nP = {}^tPA_nP = \mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)$.

On a également : $P\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)\,{}^tP = P\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)P^{-1} = A_n$.

Soit H un élément non nul de $\mathcal{M}_n(1)\mathbb{R}$.

${}^tHA_nH = {}^tHP\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)\,{}^tPH = {}^t({}^tPH)\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)\,{}^tPH$.

Posons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^tPH$. P est inversible donc ${}^tP$ aussi ; alors H étant non nul il est est de même de V.

$${}^tHA_nH = {}^tV\mathrm{Diag}\big(2,2,\dots,2,2\,(n+1)\big)V = (v_1\,v_2\,\dots\,v_{n-1}\,v_n)\begin{pmatrix} 2\,v_1 \\ 2\,v_2 \\ \vdots \\ 2\,v_{n-1} \\ 2\,(n+1)\,v_n \end{pmatrix} = 2\sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 + 2\,(n+1)\,v_n^2.$$

Donc ${}^tHA_nH$ est positif. Mieux comme au moins une des composantes de V est non nulle, ${}^tHA_nH$ est strictement positif.

$$\boxed{\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ H \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tHA_nH > 0.}$$

Version 3 Une démonstration plus générale. A_n est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_n respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Notons que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k > 0$.

$H = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (< H, V_k > \ V_k)$. $A_n\, H = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (< H, V_k > \ A_n\, V_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (< H, V_k > \ \lambda_k\, V_k)$.

Alors ${}^t H A_n H = < H, A_n\, H > = \sum\limits_{k=1}^{n} (< H, V_k > < H, V_k > \lambda_k\,) = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(< H, V_k >^2 \ \lambda_k\big)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k > 0$ et $\Big(< H, V_k > \Big)^2 \ \geqslant 0$. Alors ${}^t H A_n H \geqslant 0$.

Mieux si ${}^t H A_n H = 0$ alors : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \Big(< H, V_k > \Big)^2 = 0$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ < H, V_k > = 0$ et ainsi $H = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (< H, V_k > \ V_k) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent ${}^t H A_n H > 0$.

Version 4 $\quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^t H A_n H = 2\,({}^t H (I_n + J_n) H) = 2\,{}^t H H + 2\,{}^t H J_n H = 2\,\|H\|^2 + 2\,(h_1\, h_2\, \cdots\, h_n) \begin{pmatrix} h_1 + h_2 + \cdots + h_n \\ h_1 + h_2 + \cdots + h_n \\ \vdots \\ h_1 + h_2 + \cdots + h_n \end{pmatrix}.$$

${}^t H A_n H = 2\,\|H\|^2 + 2\,\Big(h_1\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) + h_2(\,h_1 + h_2 + \cdots + h_n) \cdots + h_n\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)\Big)$.

${}^t H A_n H = 2\,\|H\|^2 + 2\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)^2$.

Comme au moins un des h_k n'est pas nul : ${}^t H A_n H = 2\,\|H\|^2 + 2\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)^2 > 0$.

Remarque Il était donc parfaitement inutile de chercher les valeurs propres de J_n et de A_n...

b) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un (le !) point critique de f.

Notons q_A la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ associée à la hessienne A_n de f au point $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

$\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ {}^t H A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) H > 0$ donc $\forall h \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(h) > 0$.

Le cours nous permet alors de dire que :

$$\boxed{f \text{ admet en } A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ un minimum local.}}$$

Rappelons que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{2\,(n+1)}$.

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_1\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_1 = n\, a_1^2 + n^2\, a_1^2 - n\, a_1.$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = n\, a_1\, \big((n+1)\, a_1 - 1\big) = \frac{n}{2\,(n+1)} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{n}{4\,(n+1)}.$$

$$\boxed{f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -\frac{n}{4\,(n+1)}.}$$

Remarque 1 *Il est possible de montrer que f admet en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un minimum global.*

Les gens savants remarqueront que A_n est la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^n$. Comme A_n est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs propres sont strictement positives, A_n est définie positive et ainsi f est convexe sur (l'ouvert convexe) $\mathbb{R}^n$. Dans ces conditions il est bien connu que f admet un minimum global en son seul point critique $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Donnons une autre piste pour retrouver de manière moins savante ce résultat.

Soit $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

$$f(A+U) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + u_k)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + u_k)\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k + u_k).$$

$$f(A+U) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Rappelons que $f(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Cela permet d'écrire :

$$f(A+U) = f(A) + 2\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Rappelons également que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = n\, a_1$. Donc :

$$f(A+U) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)(2\, a_1 + 2\, n\, a_1 - 1).$$

Or $2\, a_1 + 2\, n\, a_1 - 1 = 2\,(n+1)\, a_1 - 1 = 0$ car $a_1 = \dfrac{1}{2\,(n+1)}$.

Alors $f(A+U) - f(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 \geqslant 0$. La conclusion est alors claire.

Conclusion pourquoi faire simple quant ont peut faire compliquer et obtenir en plus un résultat faible...

Notons que nous avions déjà connu cela dans le problème de EDHEC 2001.

Remarque 2 *Notons également que la réduction d'une combinaison liéaire de I_n et J_n est réccurrente à l'EDHEC ces derniers temps. Nous avons eu cela en 2000 (problème), en 2001 (problème) et maintenant en 2005 ! 3 fois en 6 ans ! !*

PROBLÈME

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

---

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons V_n l'événement le joueur obtient n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. $V_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$.

$(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements et $P(E) = P(\overline{E}) = \dfrac{1}{2}$ (les jetons sont choisis au hasard).

La formule des probabilités totales donne $P(V_n) = P(E)\, P_E(V_n) + P(\overline{E})\, P_{\overline{E}}(V_n)$.

Alors : $P(V_n) = \dfrac{1}{2}\, P_E(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) + \dfrac{1}{2}\, P_{\overline{E}}(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n)$.

La probabilité d'obtenir 1 avec J_1 (resp. J_2) est $\dfrac{1}{2}$ (resp. 1) et les lancers avec un même jeton sont sans doute indépendants.

Ainsi $P_E(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $P_{\overline{E}}(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) = 1$.

Donc $P(V_n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, la probabilité que le joueur obtienne n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers est : $\boxed{\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}}$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On cherche $P_{V_n}(E)$.

La formule de Bayes donne : $P_{V_n}(E) = \dfrac{P(E)\, P_E(V_n)}{P(V_n)}$. Donc $P_{V_n}(E) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1+2^n}$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{V_n}(E) = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + 2^n) = +\infty$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, la probabilité que le joueur ait joué avec J_1 sachant qu'il a obtenu n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers est $\boxed{\dfrac{1}{1+2^n}}$. La limite de cette probabilité quand n tens vers $+\infty$ est 0.

Ce dernier résultat indique que si l'on obtient toujours la face 1, la probabilité que cela soit avec J_1 est nullle. Ainsi si l'on obtient toujours la face 1 on lance presque sûrement le jeton J_2.

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Ici encore la formule des probabilités totales donne :

$P(X = n) = P(E)\, P_E(X = n) + P(\overline{E})\, P_{\overline{E}}(X = n) = \dfrac{1}{2}\, P_E(X = n) + \dfrac{1}{2}\, P_{\overline{E}}(X = n)$.

Or $P_E(X = n) = P_E(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{n-1} \cap \overline{U_n})$ à un petit abus près.

Les lancers étant indépendants : $P_E(X = n) = P_E(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{n-1} \cap \overline{U_n}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ car J_1 a une face numérotée 1 et une numéroté 0.

De plus $P_{\overline{E}}(X = n) = 0$ car J_2 a ses deux faces numérotées 1.

Ainsi $P(X = n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot}$$

b) $\big(\{X = n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet dévénements donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

Alors $\displaystyle P(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = 1 - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

$P(X = 0) = 1 - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{4} \times 2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}\cdot}$$

Ce résultat était sans doute prévisible car si le joueur lance J_1, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{2}$, il obtient presque sûrement, à un moment, la face numérotée 0 ; s'il lance J_2, ce qui se produit également avec la probabilité $\frac{1}{2}$, il n'obtient jamais la face numérotée 0. Ainsi $P(X = 0) = P(\overline{E}) = \dfrac{1}{2}\cdot$

c) X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,P(X = n)$ est absolument convergente.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n\,P(X = n) \geqslant 0$ donc $E(X)$ existe si et seulement si la série de terme général $n\,P(X = n)$ converge.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\,P(X = n) = n\,\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{4}\,n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série géométrique dérivée de terme général $n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge.

Ainsi la série de terme général $n\,P(X = n)$ est convergente et même absolument convergente.

Donc $E(X)$ existe et $\displaystyle E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,P(X = n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } 1.}$$

Remarque *On peut aisément retrouver ce résultat en utilisant les espérances conditionnelles.*

$(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements.

$E(X|E)$ existe et vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ (donc 2) car la loi de X sachant E est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$

$E(X|\overline{E})$ existe et vaut 0 car la loi de X sachant $\overline{E}$ est la loi d'une variable certaine égale à 0.

Ceci suffit alors pour dire que X possède une espérance qui vaut $E(X|E)\,P(E)+E(X|\overline{E})\,P(\overline{E})$.

Alors $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}+0\times\dfrac{1}{2}=1$.

d) D'après le théorème de transfert, $X\,(X-1)$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,(n-1)\,P(X=n)$ est absolument convergente.

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\,(n-1)\,P(X=n)\geqslant 0$ donc $E(X\,(X-1))$ existe si et seulement si la série de terme général $n\,(n-1)\,P(X=n)$ converge.

Or $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ n\,(n-1)\,P(X=n)=n\,(n-1)\,\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{8}\,n\,(n-1)\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$, la série géométrique dérivée seconde de terme général $n\,(n-1)\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge.

Ainsi la série de terme général $n\,(n-1)\,P(X=n)$ est convergente et même absolument convergente.

Donc $E\big(X\,(X-1)\big)$ existe et $E\big(X\,(X-1)\big)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(n-1)\,P(X=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}n\,(n-1)\,P(X=n)$.

$$E\big(X\,(X-1)\big)=\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty}n\,(n-1)\,\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{8}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=2.$$

$X^2=X\,(X-1)+X$, $E\big(X\,(X-1)\big)$ existe et vaut 2 et $E(X)$ existe et vaut 1.

Ainsi $E(X^2)$ existe et vaut $2+1=3$. Alors X possède une variance qui vaut $E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$ donc 2.

$$\boxed{E\big(X\,(X-1)\big)\text{ existe et vaut } 2.\ V(X)\text{ existe et vaut } 2.}$$

Remarque Ici encore ont peut faire assez vite avec les espérances conditionnelles. Rappelons que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ est 2, sa variance est 2 et son moment d'ordre 2 : $2+2^2=6$.

Alors $E(X^2|E)$ existe et vaut 6 et $E(X^2|\overline{E})$ existe et vaut 0.

Donc $E(X^2)$ existe et vaut $E(X|E)\,P(E)+E(X|\overline{E})\,P(\overline{E})=6\times\dfrac{1}{2}+0\times\dfrac{1}{2}=3$. Alors $V(X)$ existe et vaut $3-1^2=2$.

3) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Ici encore la formule des probabilités totales donne :

$P(Y=n)=P(E)\,P_E(Y=n)+P(\overline{E})\,P_{\overline{E}}(Y=n)=\dfrac{1}{2}\,P_E(Y=n)+\dfrac{1}{2}\,P_{\overline{E}}(Y=n)$.

Or $P_E(Y=n)=P_E(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{n-1}\cap\overline{U_n})$ à un petit abus près.

Les lancers étant indépendants : $P_E(Y=n)=P_E(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{n-1}\cap\overline{U_n})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ car J_1 a une face numérotée 1 et une numérotée 0.

J_2 a ses deux faces numérotées 1 donc $P_{\overline{E}}(Y=n)$ vaut 1 si $n=1$ et 0 si $n\geqslant 2$.

Alors $P(Y=1)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}$ et si $n\geqslant 2$, $P(Y=n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=n)=\begin{cases}\frac{3}{4} & \text{si } n=1\\ \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } n\geqslant 2\end{cases}.}$$

b) $\big(\{Y=n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet dévénements donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)=1$.

Alors $P(Y=0)=1-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(Y=n)=1-P(Y=1)-\sum_{n=2}^{+\infty}P(Y=n)$.

$P(Y=0)=1-\frac{3}{4}-\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$

$$\boxed{P(Y=0)=0.}$$

c) Y possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,P(Y=n)$ est absolument convergente.

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\,P(Y=n)\geqslant 0$ donc $E(Y)$ existe si et seulement si la série de terme général $n\,P(Y=n)$ converge.

Or $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ n\,P(Y=n)=n\,\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\,n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Comme $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, la série géométrique dérivée de terme général $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge.

Ainsi la série de terme général $n\,P(Y=n)$ est convergente et même absolument convergente.

Donc $E(Y)$ existe et $E(Y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n\,P(Y=n)=P(Y=1)+\sum_{n=2}^{+\infty}n\,P(Y=n)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$E(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}-1\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\cdot$

$$\boxed{Y \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{3}{2}\cdot}$$

Remarque *Ici encore* $(E,\overline{E})$ *est un système complet d'événements,* $E(Y|E)$ *existe et vaut* $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ *(donc 2) car la loi de* Y *sachant* E *est la loi géométrique de paramètre* $\frac{1}{2}$ *et* $E(Y|\overline{E})$ *existe et vaut 1 car la loi de* Y *sachant* $\overline{E}$ *est la loi d'une variable certaine égale à 1.*

Ceci suffit alors pour dire que Y *possède une espérance qui vaut* $E(Y|E)\,P(E)+E(Y|\overline{E})\,P(\overline{E})$.

Alors $E(Y)=2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot$

d) D'après le théorème de transfert, $Y\,(Y-1)$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,(n-1)\,P(Y=n)$ est absolument convergente.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n\,(n-1)\,P(Y=n) \geqslant 0$ donc $E(Y\,(Y-1))$ existe si et seulement si la série de terme général $n\,(n-1)\,P(Y=n)$ converge.

Or $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ n\,(n-1)\,P(Y=n) = n\,(n-1)\,\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{8}\,n\,(n-1)\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série géométrique dérivée seconde de terme général $n\,(n-1)\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge.

Ainsi la série de terme général $n\,(n-1)\,P(Y=n)$ est convergente et même absolument convergente.

Donc $E\big(Y\,(Y-1)\big)$ existe et $E\big(Y\,(Y-1)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,P(Y=n)$.

$$E\big(Y\,(Y-1)\big) = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

$Y^2 = Y\,(Y-1) + Y$, $E\big(Y\,(Y-1)\big)$ existe et vaut 2 et $E(Y)$ existe et vaut $\dfrac{3}{2}\cdot$

Ainsi $E(Y^2)$ existe et vaut $2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}\cdot$

Alors Y possède une variance qui vaut $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$. $V(Y) = \dfrac{7}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{14-9}{4} = \dfrac{5}{4}\cdot$

$$\boxed{E\big(Y\,(Y-1)\big) \text{ existe et vaut } 2.\ V(Y) \text{ existe et vaut } \frac{5}{4}\cdot}$$

Remarque Ici encore $(E,\overline{E})$ est un système complet d'événements, $E(Y^2|E)$ existe et vaut 6 car la loi de Y sachant E est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et $E(Y^2|\overline{E})$ existe et vaut 1 car la loi de Y sachant $\overline{E}$ est la loi d'une variable certaine égale à 1.

Ceci suffit alors pour dire que Y^2 possède une espérance qui vaut $E(Y^2|E)\,P(E) + E(Y^2|\overline{E})\,P(\overline{E})$

Alors $E(Y^2) = 6 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}\cdot$ Donc $V(Y)$ existe et vaut $\dfrac{7}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}\cdot$

4) a) $S = \mathrm{Max}(X,Y)$ et $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

X et Y ne peuvent pas prendre simultanément la valeur 0 donc S ne prend pas la valeur 0 et ainsi $S(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

Si X prend la valeur 0, Y prend la valeur 1 et S prend également la valeur 1.

Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Si E se réalise et si l'on obtient la face 1 au cours des $k-1$ premiers lancers et la face 0 au $k^{\text{ème}}$, S prend la valeur k.

Ainsi S prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Finalement :

$$\boxed{S(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

b) $\{S=1\}=\{\mathrm{Max}(X,Y)=1\}=\Big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\Big)\cup\Big(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\Big)\cup\Big(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\Big).$

Notons que X et Y ne peuvent pas prendre simultanément la valeur 1. Ainsi :

$\{S=1\}=\Big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\Big)\cup\Big(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\Big).$

Or les événements $\{X=1\}\cap\{Y=0\}$ et $\{X=0\}\cap\{Y=1\}$ sont incompatibles donc :

$P(S=1)=P\Big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\Big)+P\Big(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\Big).$

Observons que $\{Y=0\}\subset\{X=1\}$ et $\{X=0\}\subset\{Y=1\}$.

Donc $\{X=1\}\cap\{Y=0\}=\{Y=0\}$ et $\{X=0\}\cap\{Y=1\}=\{X=0\}$.

Finalement $P(S=1)=P(Y=0)+P(X=0)=0+P(X=0)=P(X=0)=\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{P(S=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot}$$

c) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

Si X prend la valeur n alors les $n-1$ premiers lancers ont donnés 1 ; Y a donc pris la valeur 1 donc une valeur strictement inférieure à n.

Ainsi $\{X=n\}\subset\{Y<n\}$. De même $\{Y=n\}\subset\{X<n\}$.

$$\boxed{\{X=n\}\subset\{Y<n\}\text{ et }\{Y=n\}\subset\{X<n\}.}$$

$\{S=n\}=\{\mathrm{Max}(X,Y)=n\}=\Big(\{X=n\}\cap\{Y<n\}\Big)\cup\Big(\{X<n\}\cap\{Y=n\}\Big)\cup\Big(\{X=n\}\cap\{Y=n\}\Big)$

Notons que X et Y ne peuvent pas prendre simultanément la valeur n. Ainsi :

$\{S=n\}=\Big(\{X=n\}\cap\{Y<n\}\Big)\cup\Big(\{X<n\}\cap\{Y=n\}\Big).$

Or $\{X=n\}\cap\{Y<n\}=\{X=n\}$ car $\{X=n\}\subset\{Y<n\}$.

De même $\{X<n\}\cap\{Y=n\}=\{Y=n\}$ car $\{Y=n\}\subset\{X<n\}$. Alors :

$$\boxed{\{S=n\}=\{X=n\}\cup\{Y=n\}.}$$

d) $P(S=1)=\dfrac{1}{2}\cdot$

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$\{S=n\}=\{X=n\}\cup\{Y=n\}$ et, $\{X=n\}$ et $\{Y=n\}$ sont incompatibles donc :

$P(S=n)=P(X=n)+P(Y=n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2^n}\cdot$

Finalement $S(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(S=n)=\dfrac{1}{2^n}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}\cdot$ Ainsi

$$\boxed{S \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}\cdot}$$

Alors $E(S) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ et $V(S) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

$$\boxed{E(S) = 2 \text{ et } V(S) = 2.}$$

5) a) Si l'une des deux variables prend la valeur 0, $I = \text{Min}(X, Y)$ prend la valeur 0. Dans le cas contraire une des variables prend la valeur 1 (X si le premier lancer donne 0 et Y si le premier lancer donne 1) et l'autre une valeur strictement supérieure à 1 ; I prend alors la valeur 1.

Finalement $I(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi :

$$\boxed{I \text{ suit une loi de Bernoulli.}}$$

b) L'événement $\{I = 0\}$ est la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$.

Ainsi $P(I = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0) = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot$ $P(I = 1) = 1 - P(I = 0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

$E(I) = \dfrac{1}{2}$ et $V(I) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\cdot$

$$\boxed{P(I = 0) = P(I = 1) = \frac{1}{2},\ E(I) = \frac{1}{2} \text{ et } V(I) = \frac{1}{4}\cdot}$$

Partie 2 : simulation des variables X et Y.

---

1) a) Redonnons le programme

```
Program Edhec2005;
var jeton,lancer,X:interger;
begin
randomize;
X:=0;
jeton:=random(2)+1;
if(jeton=1)then begin
                repeat
                X:=X+1;
                lancer:=random(2);
                until(lancer=0);
                end;
writeln('X prend la valeur : ',X);
end.
```

Ce programme simule la variable X. Décrivons en le fonctionnement.

• On commence à initialiser la variable X à zéro.

• L'instruction **jeton : =random(2)+1** affecte à la variable jeton un entier choisi au hasard dans l'ensemble $\{1, 2\}$; ainsi après cette instruction, jeton contient le "numéro" du jeton qui va être lancé.

• Supposons que la variable jeton contienne 1. Ainsi c'est J_1 qui est lancé. On effectue alors une boucle contenant les deux instructions X : =X+1 et lancer : =random(2) qui s'arrête lorsque lancer prend la valeur 0.

Comme **lancer : =random(2)** affecte à la variable lancer un nombre choisi au hasard dans l'ensemble $\{0, 1\}$, cette instruction simule le lancer du jeton J_1. Ainsi la boucle simule le lancer de J_1 jusqu'à ce qu'il donne 0. La variable X compte alors le nombre de lancers effectués.

La boucle terminée on affiche X qui donne le rang d'apparition de la première face portant le numéro 0.

• Dans le cas contraire il est sous-entendu que l'on a lancé le jeton J_2 et ainsi 0 n'a pas été obtenu. On affiche alors le contenu de X c'est à dire 0 qui code bien la non obtention de 0.

Ainsi ce programme simule l'expérience étudiée dans le problème et affiche la valeur prise par X.

b) Si la variable jeton reçoit la valeur 1 et si lancer reçoit toujours la valeur 1 la boucle "repeat...until" ne se termine jamais. Le nombre de passages dans cette boucle n'est alors pas fini. Rassurons-nous en nous rappelant qu'il est quasi-certain que le jeton J_1 donne 0. Ainsi le passage dans la boucle est presque sûrement fini.

2) Le programme est semblable au précédent. Il faut juste remplacer X par Y, remplacer **until (lancer=0)** par **until (lancer=1)** et affecter la valeur 1 à Y si l'on ne lance pas J_1. Ce qui donne :

```
Program Edhec2005b;
var jeton,lancer,Y:integer;
Begin
randomize;
Y:=0;
jeton:=random(2)+1;
if(jeton=1)then begin
                repeat
                Y:=Y+1;
                lancer:=random(2);
                until(lancer=1);
                end
           else Y:=1;
writeln('Y prend la valeur : ',Y);
end.
```