EXERCICE 1

1) a. $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=\begin{pmatrix}U_{n+3}\\U_{n+2}\\U_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\,u_{n+2}-5\,u_{n+1}+2\,u_n\\u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}.$

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=\begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}X_n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=A\,X_n \text{ avec } A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.}$$

b. $(A-I)^2=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-8&4\\2&-4&2\\1&-2&1\end{pmatrix}.$

$(A-I)^2(A-2I)=\begin{pmatrix}4&-8&4\\2&-4&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5&2\\1&-2&0\\0&1&-2\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$

$$\boxed{(A-2I)^2(A-2I)=0.}$$

2) a. Le théorème de la division euclidienne montre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, il existe un couple (Q_n,R_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, et un seul, tel que : $X^n=P\,Q_n+R_n$ et $\deg R_n<\deg P=3$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ il existe un unique couple } (Q_n,R_n) \text{ de } \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } X^n=P\,Q_n+R_n.}$$

b. $\big(1,X-1,(X-1)^2\big)$ est une famille de trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi $\big(1,X-1,(X-1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme pour tout élément n de $\mathbb{N}$, R_n appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ on peut alors affirmer que :

$$\boxed{\text{pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ il existe des réels } a_n,\ b_n \text{ et } c_n \text{ tels que : } R_n=a_n+b_n\,(X-1)+c_n\,(X-1)^2.}$$

Remarque La formule de Taylor donne $a_n=R_n(1)$, $b_n=R_n'(1)$ et $a_n=\dfrac{1}{2}\,R_n''(1)$.

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $a_n+b_n\,(X-1)+c_n\,(X-1)^2=R_n(X)=X^n-P\,Q_n=X^n-(X-1)^2(X-2)\,Q_n$.

$a_n+b_n\,(X-1)+c_n\,(X-1)^2=X^n-(X-1)^2(X-2)\,Q_n \quad (*)$.

En évaluant en 1 et en 2 on obtient : $a_n=1$ et $a_n+b_n+c_n=2^n$.

En dérivant $(*)$ il vient : $b_n+2\,c_n\,(X-1)=n\,X^{n-1}-2(X-1)(X-2)\,Q_n-(X-1)^2\,Q_n-(X-1)^2(X-2)\,Q_n'$.

En évaluant en 1 on obtient alors : $b_n=n$. Ainsi $a_n=1$, $b_n=n$ et $c_n=2^n-b_n-a_n=2^n-n-1$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ a_n=1,\ b_n=n \text{ et } c_n=2^n-n-1.}$$

3) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$A^n = (P\,Q_n + R_n)(A) = (P\,Q_n)(A) + R_n(A) = P(A)\,Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A)$ car $P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$A^n = R_n(A) = \big(a_n + b_n\,(X-1) + c_n\,(X-1)^2\big)(A) = a_n\,I + b_n\,(A-I) + c_n\,(A-I)^2 = I + n\,(A-I) + (2^n - n - 1)\,(A-I)^2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + n\,(A-I) + (2^n - n - 1)\,(A-I)^2.}$$

b. Les troisièmes lignes de I, $A - I$ et $(A-I)^2$ sont respectivement : $(\,0 \quad 0 \quad 1\,)$, $(\,0 \quad 1 \quad -1\,)$ et $(\,1 \quad -2 \quad 1\,)$.

Alors la troisième ligne de $A^n = I + n\,(A-I) + (2^n - n - 1)\,(A-I)^2$ est : $(\,0 \quad 0 \quad 1\,) + n\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,) + [2^n - n - 1]\,(\,1 \quad -2 \quad 1\,)$.

Les éléments de la troisième ligne de A^n sont alors $2^n - n - 1$, $n - 2\,(2^n - n - 1)$ et $1 - n + (2^n - n - 1)$.

Ou encore $2^n - n - 1$, $-2^{n+1} + 3\,n + 2$ et $2^n - 2n$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ les éléments de la troisième ligne de } A^n \text{ sont : } 2^n - n - 1,\ -2^{n+1} + 3\,n + 2 \text{ et } 2^n - 2n.}$$

4) a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La propriété est vrai pour $n = 0$ car : $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$X_{n+1} = A\,X_n = A\,A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

b. Soit n un élémnent de $\mathbb{N}$. $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi u_n est le produit de la troisième ligne de A_n avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $u_n = (2^n - n - 1) \times 1 + (-2^{n+1} + 3\,n + 2) \times 1 + (2^n - 2\,n) \times 0 = 2^n - 2 \times 2^n + 2\,n + 1 = -2^n + 2\,n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2^n + 2\,n + 1}.$$

EXERCICE 2

1) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$. Supposons d'abord que $n > p$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![, \ \forall t \in [k, k+1], \ f(k+1) \leqslant f(t)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p, n-1]\!], \ f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que ceci vaut encore pour $n = p$ car $S_p - f(p) = 0$ et $\displaystyle\int_p^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \ S_n - f(p) \leqslant \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et f est positive sur $[p, +\infty[$. Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \ \displaystyle\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \ S_n - f(p) \leqslant \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \ S_n \leqslant f(p) \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $f(n)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(p) + \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ converge.}}$$

Remarque Ceci est en fait un résultat de cours dans la mesure où f est continue positive et dćroissante sur $[p, +\infty[$.

2) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![, \ \forall t \in [k, k+1], \ f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in [\![p, +\infty[\![, \ f(k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$ car $k \leqslant k+1$.

En sommant il vient : $\forall q \in [\![n, +\infty[\![, \ \displaystyle\sum_{k=n}^{q} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{q} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{q} f(k)$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ ou $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + f(n)$.

Alors $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \quad \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. Soit n un élément de $[\![p, +\infty[\![$. f est strictement positive sur $[p, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

En divisant l'encadrement précédent par $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ il vient : $1 - \dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \dfrac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant 1.$

Le théorème d'encadrement sur les suites nous indique alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 1 \text{ dès que } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\right) = 1 \text{ ou que } \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 0.$$

Ainsi $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dès que $f(n) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$$\boxed{f(n) = \mathrm{o}\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ est une condition suffisante pour que } R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

3) a. $x \to x$ et $x \to (\ln x)^2$ sont continues et strictement positives sur $[2, +\infty[$ donc $x \to x\,(\ln x)^2$ est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$. Alors f est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$.

$x \to x$ et $x \to (\ln x)^2$ sont croissantes et strictement positives sur $[2, +\infty[$ donc $x \to x\,(\ln x)^2$ est croissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$. Alors f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

$\forall A \in [2, +\infty[, \quad \displaystyle\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A = -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 2}\cdot$ Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\ln 2}\cdot$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_n^A f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_n^A = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln n}\right) = \frac{1}{\ln n}\cdot$

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln n}\cdot$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\,(\ln n)^2}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,\ln n} = 0.$

f est continue, strictement positive, et décroissante sur $[2, +\infty[$.   De plus $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $f(n) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

b. D'après la question 2, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln n}\cdot$

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}\cdot}$$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n\,R_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right) = +\infty$; il existe alors n_0 dans $[\![2, +\infty[\![$ tel que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, \; n\,R_n \geqslant 1$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ R_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$. La divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général R_n diverge.

$$\boxed{\text{La série de terme géral } R_n \text{ diverge.}}$$

EXERCICE 3

---

1) Rappelons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la trace d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est égale à la trace de sa transposée.

• Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

$< A, \lambda\, B + C >= \mathrm{tr}\left({}^tA(\lambda\, B + C)\right) = \mathrm{tr}(\lambda\, {}^tAB + {}^tAC) = \lambda\ \mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda < A, B > + < A, C >.$

Alors $< A, \lambda\, B + C >= \lambda < A, B > + < A, C >$.

• Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$< A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \mathrm{tr}({}^tBA) =< B, A >$. $< A, B >=< B, A >$.

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons ${}^tA = (b_{ij})$ et ${}^tAA = (c_{ij})$.

$< A, A >= \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{k=1}^{3} b_{ik}\, a_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ki}\, a_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ki}^2.$

Alors $< A, A >= \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ki}^2 \geqslant 0$.

• Reprenons les notations du point précédent et supposons $< A, A >= \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ki}^2 = 0$.

Comme $\forall i \in [\![1, 3]\!], \forall k \in [\![1, 3]\!],\ a_{ki}^2 \geqslant 0$, $\forall i \in [\![1, 3]\!], \forall k \in [\![1, 3]\!],\ a_{ki}^2 = 0$.

Par conséquent $\forall i \in [\![1, 3]\!], \forall k \in [\![1, 3]\!],\ a_{ki} = 0$ et ainsi A est nulle. $< A, A >$ donne $A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Les quatre points précédents montrent que :

$$\boxed{< ., . > \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

2) $< I, J >= \mathrm{tr}({}^tIJ) = \mathrm{tr}(IJ) = \mathrm{tr}(J) = 0$.

Notons que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $< I, J^2 >= \mathrm{tr}({}^tIJ^2) = \mathrm{tr}(J^2) = 0$.

$< J, J^2 > \mathrm{tr}({}^tJJ^2) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi } (I, J, J^2) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

$\boxed{\textit{Remarque}}$ (I, J, J^2) est une famille orthogonale constituiée de vecteurs non nuls de E donc (I, J, J^2) est un efamille libre de E. Or par définition c'est une famille génératrice de E. Ainsi (I, J, J^2) est une base orthogonale de E. Ceci permet de dire que E est de dimension 3.

3) a. $\|I\|^2 =< I, I >= \mathrm{tr}({}^tII) = \mathrm{tr}(I^2) = \mathrm{tr}(I) = 3$; $\|I\| = \sqrt{3}$.

$\|J\|^2 =< J, J >= \mathrm{tr}({}^tJJ) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\,;\ \|J\| = \sqrt{2}.$

$\|J^2\|^2 =< J^2, J^2 >= \mathrm{tr}({}^tJ^2J^2) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,;\ \|J\| = 1.$

Posons alors : $K_0 = \dfrac{1}{\|I\|}\,I = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,I$, $K_1 = \dfrac{1}{\|J\|}\,J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,J$ et $K_2 = \dfrac{1}{\|J^2\|}\,J^2 = J^2$.

K_0, K_1 et K_2 sont trois éléments de E de norme 1.

De plus comme $(I, J, J^2$ est une famille orthogonale de E il en est de même de (K_0, K_1, K_2). Alors (K_0, K_1, K_2) est une famille orthonormée de E.

(K_0, K_1, K_2) est une famille orthonormée, donc libre, de trois éléments de E qui est de dimension 3. (K_0, K_1, K_2) est donc une base orthonormée de E.

$\boxed{(K_0, K_1, K_2) \text{ est donc une base orthonormée de } E \text{ et pour tout } i \text{ dans } [\![0, 2]\!],\ K_i \text{ est proportionnel à } J^i.}$

b. $< K_0, A >= \mathrm{tr}({}^tK_0A) = \mathrm{tr}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,{}^tIA\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tr}(A) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}).$

$< K_1, A >= \mathrm{tr}({}^tK_1A) = \mathrm{tr}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,{}^tJA\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right).$

$< K_1, A >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} + a_{23}).$

$< K_2, A >= \mathrm{tr}({}^tK_2A) = \mathrm{tr}\left({}^tJ^2A\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\right) = a_{13}$

Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$\boxed{< K_0, A >= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(a_{12} + a_{22} + a_{33})}$ $\boxed{< K_1, A >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} + a_{23}))}$ $\boxed{< K_2, A >= a_{13}}$

c. Soit $A = (a_{ij})$ un élèment de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme (K_0, K_1, K_2) est une base orthonormée de E, la projection orthogonale $p(A)$ de A sur E est $< K_0, A > K_0 + < K_1, A > K_1 + < K_2, A > K_2$.

Ainsi $P(A) =< K_0, A > K_0 + < K_1, A > K_1 + < K_2, A > K_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(a_{11} + a_{22} + a_{33})\,K_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} + a_{23})\,K_1 + a_{13}\,K_2.$

$\boxed{\text{Si } A = (a_{ij}) \text{ est un élément de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ P(A) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(a_{11} + a_{22} + a_{33})\,K_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} + a_{23})\,K_1 + a_{13}\,K_2}$

d. Soit $A = (a_{ij})$ un élèment de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Rappelons que (K_0, K_1, K_2) est une famille libre. Ainsi :

$A \in \mathrm{Ker}\,p \iff \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(a_{11} + a_{22} + a_{33})\,K_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} + a_{23})\,K_1 + a_{13}\,K_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \iff a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{12} + a_{23} = a_{13} = 0.$

$$A \in \mathrm{Ker}\,p \iff \begin{cases} a_{33} = -a_{11} - a_{22} \\ a_{12} = -a_{23} = 0 \\ a_{13} = 0 \end{cases}$$

$A \in \operatorname{Ker} p \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix}$.

$A \in \operatorname{Ker} p \Longleftrightarrow a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} +$
$a_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\operatorname{Ker} p = E^{\perp}$ donc $\dim \operatorname{Ker} p = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim E = 9 - 3 = 6$.

Or $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} p$ de cardinal 6 donc c'est une base de $\operatorname{Ker} p$.

$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} p.}$

PROBLÈME

Partie 1

Dans toute cette partie, r est un élément de $\mathbb{N}$.

Dans tout le problème nous noterons f la fonction définie sur $\boxed{[}\ 0,1[$ par $\forall x \in \boxed{[}\ 0,1[,\ f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1) Notons que f est une fonction de $\mathcal{C}^{\infty}$ comme restriction à $[0,1[$ d'une fonction rationnelle.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{(r+k)!}{r!} \dfrac{1}{(1-x)^{r+1+k}}$.

L'égalité est claire pour $k = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$\forall x \in [0,1[,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{(r+k)!}{r!} \dfrac{1}{(1-x)^{r+1+k}} = \dfrac{(r+k)!}{r!} (1-x)^{-r-1-k}$.

Alors $\forall x \in [0,1[,\ f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(r+k)!}{r!} (-r-1-k)(-1)(1-x)^{-r-1-k-1} = \dfrac{(r+k+1)!}{r!} \dfrac{1}{(1-x)^{r+1+k+1}}$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{(r+k)!}{r!} \dfrac{1}{(1-x)^{r+1+k}}.}$$

2) Si $r=0$: $\forall n\in\mathbb{N},\ \binom{n+r}{n}=\binom{n}{n}=1=\dfrac{1}{0!}=\dfrac{n^r}{r!}\cdot$ Par conséquent $\binom{n+r}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^r}{r!}\cdot$

Supposons $r\geqslant 1$. $\binom{n+r}{n}=\binom{n+r}{r}=\dfrac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+r-r+1)}{r!}=\dfrac{1}{r!}\prod_{k=1}^{r}(n+k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{r!}\prod_{k=1}^{r}n=\dfrac{n^r}{r!}\cdot$

Dans tous les cas :

$$\boxed{\binom{n+r}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^r}{r!}\cdot}$$

3) Soit x un élément de $[0,1[$. $|x|<1$ donc, par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty}\left(n^{r+1}\,x^n\right)=0$.

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}\left(n^{r+1}\,x^n\right)=0.}$$

4) Soit x un élément de $[0,1[$.

$\forall t\in[0,x],\ x-t\geqslant 0$ et $1-t>0$ donc $\forall t\in[0,x],\ \varphi_x(t)=\dfrac{x-t}{1-t}\geqslant 0$.

$\forall t\in[0,x],\ x-\varphi_x(t)=x-\dfrac{x-t}{1-t}=\dfrac{-x\,t+t}{1-t}=\dfrac{t\,(1-x)}{1-t}\geqslant 0$. Alors $\forall t\in[0,x],\ \varphi_x(t)\leqslant x$.

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \forall t\in[0,x],\ 0\leqslant\varphi_x(t)=\frac{x-t}{1-t}\leqslant x.}$$

5) a. Soit x un élément de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$. La formule de Taylor appliquée à f sur $[0,x]$ à l'odre n donne :

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(x-0)^k}{k!}\,f^{(k)}(0)+\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\,\dfrac{(r+k)!}{r!}+\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}\,\dfrac{(r+n+1)!}{r!}\,\dfrac{1}{(1-t)^{r+1+n+1}}\,\mathrm{d}t.$

On a encore : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k+(r+n+1)\binom{n+r}{n}\int_0^x\left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k+(r+n+1)\binom{n+r}{n}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\frac{1}{(1-t)^{r+2}}\,\mathrm{d}t.}$$

b. Soit x un élément de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k=(r+n+1)\binom{n+r}{n}\int_0^x\left(\varphi_x(t)\right)^n\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\,\mathrm{d}t.$

Or $\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant\varphi_x(t)\leqslant x$. Ainsi on a : $\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant\left(\varphi_x(t)\right)^n\leqslant x^n$ et $0\leqslant\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\cdot$

Par conséquent : $\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant\left(\varphi_x(t)\right)^n\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\leqslant x^n\,\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\cdot$

Comme $0\leqslant x$, il vient en intégrant : $0\leqslant\int_0^x\left(\varphi_x(t)\right)^n\dfrac{1}{(1-t)^{r+2}}\,\mathrm{d}t\leqslant x^n\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{r+2}}\cdot$

En multipliant par $(r+n+1)\binom{n+r}{n}$ on obtient :

$0 \leqslant (r+n+1)\binom{n+r}{n}\displaystyle\int_0^x (\varphi_x(t))^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}}\,\mathrm{d}t \leqslant (r+n+1)\binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{r+2}}$.

Ainsi : $0 \leqslant f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k \leqslant (r+n+1)\binom{n+r}{n}x^n\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{r+2}}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ 0 \leqslant f(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k \leqslant (r+n+1)\binom{n+r}{n}x^n\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{r+2}}}$$

c. Soit x un élément de $[0,1[$. $(n+r+1)\binom{n+r}{n}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{n^r}{r!}x^n = \dfrac{1}{r!}n^{r+1}x^n$ (d'après Q2).

Alors Q3 autorise à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{r!}n^{r+1}x^n\right) = 0$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((n+r+1)\binom{n+r}{n}x^n\right) = 0$.

L'encadrement de b) donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k\right) = 0$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k = f(x)$. Ainsi :

pour tout élément x de $[0,1[$, la série de terme général $\binom{k+r}{k}x^k$ converge et : $$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+r}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Partie 2

1) a. On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et X_1 compte le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser pour obtenir un premier succès. La probabilité de réalisation d'un succès étant p :

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$$

b. Le cours indique que : $\boxed{E(X_1) = \dfrac{1}{p} \text{ et } V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}.}$

2) Dans cette question n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a. $\boxed{X_n(\Omega) = \{0\} \cup [\![n, +\infty [\![.}$

b. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Notons T_{n+k-1} la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des $n+k-1$ premiès épreuves. T_{n+k-1} suit une loi binômiale de paramètres $n+k-1$ et p.

Ainsi $P(T_{n+k-1} = n-1) = \dbinom{n+k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^k$.

Pour tout entier naturel k, la probabilité que l'on obtienne $n-1$ succès au cours des $n+k-1$ premières épreuves est : $\binom{n+k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^k$.

c. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Notons S_{n+k} l'événement la $(n+k)^{\text{ème}}$ épreuve donne un succès.

$P(X_n = n+k) = P\big(\{T_{n+k-1} = n-1\} \cap S_{n+k}\big) = P(T_{n+k-1} = n-1)\, P_{\{T_{n+k-1}=n-1\}}(S_{n+k})$.

$P(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1}\,(1-p)^k\, p = \binom{n+k-1}{n-1} p^n\,(1-p)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n\,(1-p)^k}$$

d. En appliquant le résultat de I Q5 c pour $r = n-1$ et $x = 1-p$ ($n-1 \in \mathbb{N}$ et $1-p \in]0,1[$) on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p)^k = \frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^{n-1+1}}$.

Ce qui s'écrit encore : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} (1-p)^k = \frac{1}{p^n}\cdot$ Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} p^n\,(1-p)^k = 1$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1}$$

Rappelons que $X_n(\Omega) = \{0\} \cup [\![n, +\infty [\![$. Alors $P(X_n = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} P(X_n = i) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1 - 1 = 0$.

$$\boxed{P(X_n = 0) = 0.}$$

3) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$(n+k)\displaystyle\binom{n+k-1}{n-1} = (n+k)\,\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!\,k!} = n\,\frac{(n+k)!}{n!\,k!} = n\binom{n+k}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ (n+k)\binom{n+k-1}{n-1} = n\binom{n+k}{n}}.$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n+1+k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+1+k-1}{n+1-1} p^{n+1}\,(1-p)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1}\,(1-p)^k$.

$1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n+k}{n} \binom{n+k-1}{n-1} p^{n+1}\,(1-p)^k = \frac{p}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)\binom{n+k-1}{n-1} p^n\,(1-p)^k$.

$1 = \displaystyle\frac{p}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)\,P(X_n = n+k)$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)\,P(X_n = n+k) = \frac{n}{p}$ ou encore : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} (i)\,P(X_n = i) = \frac{n}{p}\cdot$

La série de terme général $i\,P(X_n = i)$ est convergente et mme absolument convergente car elle à termes positifs. Donc $E(X_n)$ existe et vaut $\dfrac{n}{p}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément de } \mathbb{N}^*,\ X_n \text{ possède une espŕance qui vaut } \frac{n}{p}\cdot}$$

4) a. Soit n un élément de $[\![2, +\infty [\![$ et k un élément de $\mathbb{N}$.

$\dfrac{n-1}{n+k-1}\displaystyle\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n-1}{n+k-1}\,\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \frac{(n+k-2)!}{(n-2)!\,k!} = \binom{n+k-2}{n-2}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{n-1}{n+k-1}\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-2}.}$$

b. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

D'après le théorème de transfert, $\dfrac{n-1}{X_n-1}$ possède une éspérance si et seulement si la série de terme général $\dfrac{n-1}{i-1}\,P(X_n = i)$ est absolument convergente ou si et seulement si la série de terme général $\dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k)$ est absolument convergente.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k) \geqslant 0$. Donc $\dfrac{n-1}{X_n-1}$ possède une éspérance si et seulement si la série de terme général $\dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k)$ est convergente.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k) = \dfrac{n-1}{n+k-1}\dbinom{n+k-1}{n-1}p^n\,(1-p)^k = \dbinom{n+k-2}{n-2}p^n\,(1-p)^k.$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k) = p\dbinom{n+k-2}{n-2}p^{n-1}\,(1-p)^k = p\,P(X_{n-1} = n-1+k).$

La série de terme général $P(X_{n-1} = n-1+k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n-1} = n-1+k) = 1$ donc la série de terme gééral $\dfrac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n+k-1}\,P(X_n = n+k) = p$. Finalement :

$$\boxed{\frac{n-1}{X_n-1} \text{ possède une espérance qui vaut } p}$$

5) a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ 0 \leqslant \dfrac{n}{k}\,P(X_n = k) \leqslant P(X_n = k)$.

La convergence de la série de terme général $P(X_n = k)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\dfrac{n}{k}\,P(X_n = k)$ converge. Cette série étant à termes positifs elle est absolument convergente. le théorème de transfert permet alors dire que :

$$\boxed{\frac{n}{X_n} \text{ possède une espérance, et ceci pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*.}$$

b. Soit k un élément de $[\![n+1, +\infty[\![$. $\dfrac{n}{k} > \dfrac{n-1}{k-1}$ car $\dfrac{n}{k} - \dfrac{n-1}{k-1} = \dfrac{k-n}{k(k-1)} > 0$, et $P(X_n = k) > 0$.

Alors $\dfrac{n}{k}\,P(X_n = k) > \dfrac{n-1}{k-1}\,P(X_n = k)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n}{k}\,P(X_n = k) > \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n-1}{k-1}\,P(X_n = k)$ (ces deux séries convergent).

Donc $E\left(\dfrac{n}{X_n}\right) - \dfrac{n}{n}\,P(X_n = n) > E\left(\dfrac{n-1}{X_n-1}\right) - \dfrac{n-1}{n-1}\,P(X_n = n)$. Par consq́uent $E\left(\dfrac{n}{X_n}\right) > E\left(\dfrac{n-1}{X_n-1}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{E\left(\frac{n}{X_n}\right) > pq}$$

6) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $E(Y_n$ existe et vaut p et $E(Z_n)$ existe et est strictement supérieure à p. Par consq́uent :

pour tout élément n de $[\![2, +\infty[\![$, Y_n est un estimateur sans biais de p alors que Z_n n'est pas un estimateur sans biais de p.