edhec 2002. Option scientifique.

EXERCICE 1

1)a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 (1-\ln t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que $\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout x strictement positif.

On pose alors : $\begin{cases} \forall x>0,\ F(x)=\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ F(0)=0 \end{cases}$

c) Montrer que F est continue en 0.

d) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner ses variations (la limite de F en $+\infty$ n'est pas demandée).

2) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=F(u_n)$.

a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.

b) Montrer que $u_0\geq u_1$, puis déterminer par récurrence les variations de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout x de $[0,1]$, on pose : $g(x)=F(x)-x$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel β de $]0,1]$ tel que $g'(\beta)=0$, puis donner les variations de g.

b) En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de $]\beta,1]$ tel que $g(\alpha)=0$.

4)a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq\alpha$.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, x et y désignent des réels strictement positifs.
Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison 2002, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.
Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros.
Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.
On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison 2002 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X.
On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison 2002.
On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X\leq n$ et qui vaut 0 si $X>n$.
On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

1) En distinguant deux cas selon la valeur de U montrer que :

$$Y_n=(xX-(n-X)y)U+nx(1-U)$$

2)a) Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$.

b) Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.

c) Montrer enfin que $E(Y_n)=(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P(X=k)+nx$.

Dans la suite, on suppose que $P(X=0)<\frac{x}{x+y}$.

3)a) Exprimer $E(Y_{n+1} - E(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

b) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :

$$\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x+y}$$

c) En déduire que ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

4) Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que X suit la loi de Poisson de paramètre a, où a est un réel strictement positif.

a) Exprimer $P(X = k + 1)$ en fonction de $P(X = k)$.

b) Utiliser ce résultat pour écrire un programme en Turbo Pascal permettant de calculer et d'afficher n_1 lorsque l'utilisateur entre au clavier les valeurs de x, y et a.

EXERCICE 3

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\forall (x.y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x) f_2(y) = g(x^2 + y^2)$$

1) On suppose, dans cette question seulement, que X_1, et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $N(0, 1)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

2)a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)} = \dfrac{2g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$

b) On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)}$.
Soient x_1, et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1) = h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c) Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x) = f_1(x) \mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}$. Montrer que k est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = K \mathrm{e}^{\frac{ax^2}{2}}$$

d) Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif. On pose dorénavant $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e) En déduire que X_1 suit la loi normale $N(0, \sigma_1)$.

3) On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $N(0, \sigma_2)$.
Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1 = \sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^n$.

Partie I : étude des symétries de $\mathbb{R}^n$.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, non réduits au seul vecteur nul, et supplémentaires, c'est-à-dire tels que $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$.
On appelle symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ tel que $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) par $s(x) = x_1 - x_2$.
Dans les trois premières questions, on considère une telle symétrie notée s.

1)a) Montrer que : $\forall x \in F_1,\ s(x) = x$.

b) En déduire que $\text{Ker}(s - Id) = F_1$.

2)a) Montrer que : $\forall x \in F_2,\ s(x) = -x$.

b) En déduire que $\text{Ker}(s + Id) = F_2$.

3) Utiliser les questions précédentes pour montrer que s est diagonalisable et donner une forme possible de la matrice de s relativement à une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s.

4) Réciproquement, montrer qu'une telle matrice est la matrice d'une symétrie.

Partie II : étude de deux exemples.

1) Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de R^3 est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de s ainsi que les sous-espaces propres associés.

b) En déduire que s est une symétrie.

2) Soit s un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $s \circ s = Id$.

a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$: $x + s(x) \in \text{Ker}(s - Id)$ et $x - s(x) \in \text{Ker}(s + Id)$.

b) En déduire que $\text{Ker}(s - Id)$ et $\text{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires.

c) Établir enfin que s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id)$.

Partie III : symétries orthogonales.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle dans lequel le produit scalaire canonique est noté $\langle\ ,\ \rangle$.
Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E, on appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Montrer que la matrice M, présentée dans la première question de la deuxième partie, est la matrice d'une symétrie orthogonale.

2) On considère une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ et on se propose d'établir l'équivalence suivante :
s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

a) On suppose que s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
Vérifier que : $\forall x \in \text{Ker}(s - Id),\ \forall y \in \text{Ker}(s + Id),\ \langle x, y\rangle = 0$, puis, conclure que s est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E.
On prend maintenant l'hypothèse : s est la symétrie orthogonale par rapport à F.

En écrivant $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(y_1, y_2) \in F \times F^\perp$, montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$. Conclure.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.

a) Montrer que $s = 2p - Id$.

b) En déduire que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i\rangle u_i - x$$

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que F a pour équation : $x - 2y + 3z = 0$.

a) Déterminer une base orthonormale de F.

b) En déduire la matrice N, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.