Exercice

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) M est triangulaire, le spectre se lit donc sur la diagonale de M : $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0\}}$.
    Si M était diagonalisable, M serait semblable à la matrice nulle, donc M serait nulle. Ce n'est pas le cas.
    $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

    (b) En regardant les colonnes de M (deux vecteurs nuls, deux vecteurs indépendants, car non colinéaires), on peut affirmer : $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 2}$.
    $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    De façon immédiate : $\boxed{\mathrm{rg}(M^2) = 1}$.

    (c) Par un calcul immédiat, $M^3 = 0_4$. Le polynôme $P(x) = x^3$ est un polynôme annulateur de M. Tout polynôme du type $\lambda P (\lambda \in \mathbb{R}^*)$ également.
    Y en a-t-il d'autres ?
    $M^3 + aM^2 + bM + cI = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
    $M^3 + aM^2 + bM + cI = 0_4 \Longleftrightarrow a = b = c = 0$
    Donc les polynômes déjà cités sont bien les seuls polynômes annulateurs de M.

2. (a) $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ donc $\boxed{r_0 = n}$. $\qquad f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ donc $\boxed{r_n = 0}$.

    (b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

    i. Montrons que $Im(g_j) = Im(f^{j+1})$
    • Si $u \in Im(g_j), \exists v \in F_j$ tel que $f(v) = u$ donc $\exists w \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^j(w) = v$ et $f(v) = u$.
    Donc $\exists w \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{j+1}(w) = u \qquad Im(g_j) \subset Im(f^{j+1})$
    • Si $u \in Im(f^{j+1})$, $\exists w \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{j+1}(w) = u$ donc $f\left(f^j(w)\right) = u$.
    En posant $v = f^j(w)$, $v \in Im(f^j$ et $f(v) = g_j(v) = u$ donc $u \in Im(g_j)$ et $Im(f^{j+1}) \subset Im(g_j)$
    On a bien égalité, donc $\boxed{rg(g_j) = r_{j+1}}$

    ii. La formule du rang donne : $\dim(Im(g_j)) + \dim(\ker(g_j)) = \dim(F_j) = r_j$
    Or $\ker(g_j) = \{u \in F_j;\ g_j(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\} = \{u \in F_j; f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\} = \ker(f) \cap F_j$
    Cela donne bien la relation annoncée car $dim(Im(g_j)) = r_{j+1}$.

    (c) • $r_0 - r_1 = \dim(\ker(f) \cap R^n) = \dim(\ker(f)) \leq n \qquad (1)$
    • $r_{n-1} - r_n = \dim(\ker(f) \cap F_{n-1}) \geq 0 \qquad (2)$
    • Soit $j \geq 1$. Comparons F_j et F_{j-1}. $F_{j-1} = f^{j-1}(\mathbb{R}^n)$, $F_j = f^j(\mathbb{R}^n) = f^{j-1}\left(f(\mathbb{R}^n)\right) \subset f^{j-1}(\mathbb{R}^n)$.
    Donc $F_j \subset F_{j-1}$, donc $\ker(f) \cap F_j \subset \ker(f) \cap F_{j-1}$.
    En passant aux dimensions : $\dim\left(\ker(f) \cap F_j\right) \leq \dim\left(\ker(f) \cap F_{j-1}\right)$ et $r_j - r_{j+1} \leq r_{j-1} - r_j \qquad (3)$
    (2), (3) et (1) donne le résultat cherché.

resume Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = Card\left(\{j \in [\![0, n-1]\!];\ r_j - r_{j+1} = i\}\right) \qquad (*)$

(a) Avec ces notations, $\sum_{i=0}^{n} i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) = r_0 - r_n = n$
On a bien $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ élément de $P(n)$.
Remarque : on comprend mieux ce résultat en regardant l'exemple qui suit.

(b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

i. f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On a donc $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$
Ainsi $r_0 - r_1 = 2$, $r_1 - r_2 = 1$, $r_2 - r_3 = 1$, $r_3 - r_4 = 0$ donc $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,0,0)}$

ii. On veut des entiers naturels (x_i) tels que $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$.
Envisageons méthodiquement toutes les solutions possibles en prenant toutes les valeurs possibles de x_4, puis de x_3, ...
Solutions : $u_1 = (0,0,0,1)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (0,2,0,0)$, $u_4 = (2,1,0,0)$ et $u_5 = (4,0,0,0)$.
On a bien 5 solutions et $p(4) = 5$.

iii. • On a déjà une réponse pour u_4 : l'endomorphisme f étudié à la question 1.
• Pour u_1, l'endomorphisme nul est solution :
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 0$,$r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $r_4 = 0$ et donc $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 4$.

• Pour u_5, considérons f_5 de matrice $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$ et $r_4 = 0$ et donc $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

• Pour u_3, on prend f_3 de matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$ donc $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

• Pour u_2, on prend f_2 de matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$ donc $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 0$.

resume (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

i. $Q(1,k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1\}$.
On a donc $x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k$ (1) et $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1$ (2)
L'inégalité (2) impose que seul un des x_j est non nul et vaut 1. L'égalité (2) impose que cet entier soit x_k.
$\boxed{Q(1,k) = \{0,0,\ldots,0,1)}$ Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $q(1,k) = 1$.

ii. Pour tout entier $\ell \geq k$, si $x_1 + 2x_2 + \ldots kx_k = k$, alors $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k \leq \ell$.
Donc $Q(\ell,k) = P(k)$.

(b) ***Voilà un question délicate.***
Notons $E_1 = Q(\ell, k-\ell)$ et $E_2 = Card\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$. Le but du jeu est d'établir une bijection de E_1 dans E_2.

$$(x_1, \ldots, x_k) \in E_2 \iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k & = k \quad (1) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k & = \ell \quad (2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x_2 + 2x_3 + \ldots + (k-\ell)x_{k-\ell+1} + (k-\ell+1)x_{k-\ell+2} + \ldots + (k-1)x_k & = k-\ell \quad (1') = (1) - (\\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k & = \ell \quad (2) \end{array}\right.$$

Dans l'équation (1'), on a $x_i = 0$ pour $i \geq k - \ell + 2$, sinon la somme dépasserait $k - \ell$.
Donc, en posant $x'_i = x_{i+1}$

$$\begin{cases} x'_1 + 2x_2 + \ldots + (k-\ell)x'_{k-\ell} & = k-\ell \\ x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{k-\ell} & = \ell - x_1 \end{cases}$$

Lorsque x_1 décrit $[[0,\ell]]$, on obtient l'ensemble E_1, autrement dit, E_1 et E_2 sont mis en bijection par l'application qui Ã $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_2$ associe $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-\ell}) \in E_1$.

Donc $Card(E_1) = Card(E_2)$ **c.q.f.d.**

(c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

i. $Q(\ell, k) = A_k \cup A'_k$ avec $A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell$ et $A'_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq \ell - 1\}$

La réunion est disjointe, donc $Card(Q(\ell, k) = Card(A_k) + Card(A'_k)$

Or $Card(A'k) = q(\ell-1, k)$ par définition, et $Card(A_k) = q(\ell, k-\ell)$ d'après la question précédente.

On a bien le relation annoncée : $q(\ell, k) = q(\ell-1, k) + q(\ell, k-\ell)$.

ii. $q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell)$ est le cardinal de l'ensemble $B_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \in P(\ell);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_\ell = \ell\}$

Les éléments de B_k vérifient : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + \ell x_\ell & = \ell \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_\ell & = \ell \end{cases}$

Donc $x_2 + 2x_3 + \ldots + (\ell-1)x_\ell = 0$.

Donc $x_2 = x_3 = \ldots = x_\ell = 0$ et $x_1 = \ell$.

Ainsi $B_k = \{(\ell, 0, \ldots, 0)\}$ $Card(B_k) = 1$ $\boxed{q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell) = 1}$

resume (a) Dans le premier trou, on met `q(L,K=q(L-1,K)` car $q(L,K) = p(k)$, comme $q(L-1,K)$.

Dans le deuxième trou, on met la relation que l'on vient de justifier.

```
function q=qmatrix(n)
   q=ones(n,n)
   for L=2:n
       for K=2:n
          if (K<L) then q(L,K)= q(L-1,K);
               else if (K==L) then q(L,K)=Q(L-1,L)+1;
                   else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
           end;
       end;
    end;
endfunction
```

(b) On trouve $P(n)$ en ligne n et en colonne n du tableau :

```
n=input('n=')
T=qmatrix(n)
disp(T(n,n))
```

(c) En regardant la ligne 2 le tableau obtenu, on obtient : $1,2,2,3,3,4,4,5,5$

Il semblerait que $q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor$ (H_k)

Démontrons (H_k) par une récurrence généralisée pour $k \in \mathbb{N}^*$.

• Pour $k = 1$, $Q(2,1) = \{(x_1 \in P(1); x_1 \leq 2\} = \{1\}$ donc $q(2,1) = 1$.

$\left\lfloor \dfrac{1+2}{2} \right\rfloor = 1$ Donc (H_1) est vrai.

• Pour $k = 2$, $Q(2,2) = P(2)$. C'est l'ensemble des couples d'entiers (x_1, x_2) de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $x_1 + 2x_2 = 2$

Les couples sont donc $(0,1)$ et $(2,0)$, donc $q(2,2) = 2$.

$\left\lfloor \dfrac{2+2}{2} \right\rfloor = 2.$ Donc (H_2) est vrai.

• Soit $k \geq 2$. Supposons (H_i) vrai pour $i \in [[1,k]]$

$$q(2,k+1) = q(1,k+1) + q(2,k+1-2) = 1 + q(2,k-1) = 1 + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+3}{2} \right\rfloor$$

Donc (H_{k+1}) est vrai.

La récurrence est assurée. $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad q(2,k) = \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor}$

Problème

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

1. (a) Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   i. Si les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $Cov(X_k, X_\ell) = 0$ donc $r = 0$ et $V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(1-p)$

   On reconnaît le modèle de la loi binomiale : $\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

   ii. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales à X_1, $r = \rho(X_k, X_\ell) = \rho(X_1, X_1) = 1$.

   $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1$. $\quad V(S_n) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)$ $S_n(\Omega) = \{0, n\}$ $\qquad P(S_n = n) = p$, $P(S_n = 0) = 1-p$

   (b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Le cours donne la formule générale suivante :
   $V(S_k) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j)$.
   Pour $i \neq j$, $Cov(X_i, X_j) = r\sqrt{V(X_i)V(X_k)} = r\sqrt{p^2(1-p^2)} = rp(1-p)$ (indépendant de i et j)
   Il y a $\binom{k}{2}$ termes de ce type dans la double somme $\sum_{1 \le i < j \le k}$
   Donc $V(S_k) = k \times p(1-p) + 2\binom{k}{2} \times rp(1-p) = kp(1-p) + 2\frac{k(k-1)}{2} rp(1-p) = kp(1-p)\left[1 + r(k-1)\right]$
   C'est le résultat attendu.

   (c) En prenant $k = n$, on a $V(S_n) = np(1-p)\left[1 + r(n-1)\right]$
   Une variance est toujours positive donc $1 + r(n-1) \ge 0$. Donc $r \ge -\frac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2. On peut dresser le tableau de la loi du couple (X_1, X_2). Elle est du type.

$X_2 \backslash X_1$	0	1	loi de X_2
0	γ	β	$1-p$
1	β	α	p
loi de X_1	$1-p$	p	

   (a) On a $E(X_1X_2) = \alpha$ donc $Cov(X_1, X_2) = \alpha - E(X_1)E(X_2) = \alpha - p^2$
   $r = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{p^2(1-p^2}} = \frac{\alpha - p^2}{p(1-p)}$

$$\begin{aligned} r = -1 &\iff \alpha - p^2 = -p(1-p) \\ &\iff \alpha = p^2 - p(1-p) = 2p^2 - p = p(2p-1) \end{aligned}$$

   C'est le résultat attendu.

   (b) $P\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\right) = \gamma$.
   On sait que $\alpha + \beta = p$ donc $\beta = p - \alpha = p - p(2p-1) = p(1 - 2p + 1) = 2p(1-p$
   Puis $\gamma + \beta = 1 - p$ donc $\gamma = 1 - p - \beta = (1-p)(1-2p)$ $\quad \boxed{P\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\right) = (1-p)(1-2p)}$

   (c) On suppose $r = -1$.
   D'après 1) b, $V(X_1 + X_2) = 2p(1-p)(1 + (2-1)r) = 2p(1-p)(1+r) = 0$, car $r = -1$

Donc X_1+X_2 égale une constante de façon presque certaine. Comme $p\in]0,1[$, la constante ne peut être ni 0, ni 2.

Donc $P(X_1+X_2=1)=1$

Or $P(X_1+X_2=1)=2\beta$ donc $\beta=\dfrac{1}{2}$

$P(X_1+X_2)=\gamma=0$ donc $(1-p)(1-2p)=0$ donc $p=\dfrac{1}{2}$.

On a donc bien $p=\dfrac{1}{2}$ et $P([X_1+X_2=1])=1$.

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} X_k=1\right]\right)=1$.

   (a) On a donc $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k=1$ de façon presque certaine.

   Donc $V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)=0=np(1-p)[1+(n-1)r]$

   Donc $r(n-1)+1=0$ et ainsi $\boxed{r=-\dfrac{1}{n-1}}$

   $E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)\right)=1=np$ donc $\boxed{p=\dfrac{1}{n}}$.

   (b) Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k=1$ de faÃçn presque certaine, seul un des X_k peut être égal à 1. Les n-uplets $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}[X_k=x_k]\right)$ est strictement positive sont donc :
   $(1,0,\dots,0),(0,1,0\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)$.

   Tous ces n-uplets ont une même probabilité u non nulle. La somme de ces probas donne 1 donc $nu=1$ donc $u=\dfrac{1}{n}$.

   On remarque, heureusement, que ces résultats sont cohérents avec les résultats du cas n = 2 traité précédemment.

Partie II. Lois bétas-binomiales

resume Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(a) Soit $h: t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. h est continue sur $I=\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,dt$ est impropre pour la borne 0.

h est positive sur I, et au voisinage de 0, $h(t)\sim t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}}$

$\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ converge si et seulement si $1-x<1$, c'est Ã dire $x>0$. Nous obtenons le résultat par le critère de l'équivalent des intégrales de fonctions positives.

(b) Nous utilisons le changement de variable $u=1-t$ sur l'intégrale $J(\varepsilon)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

$J(\varepsilon)=\displaystyle\int_{u=1/2}^{u=\varepsilon}(1-u)^{x-1}u^{y-1}\,(-du)=\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,du.$ C'est le résultat demandé.

(c) D'après a :, $J(\varepsilon)$ admet une limite finie quand ε tend vers 0 si et seulement si $y>0$.

Donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad CV \Longleftrightarrow y>0$

Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt+\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, en combinant avec la question a : $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad CV \Longleftrightarrow x>0$ et $y>0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2,\quad B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$

resume Soit x et y des réels strictement positifs.

(a) Soit a et b deux bornes réelles variables vérifiant $0 < a < b < 1$, posons $J(a,b) = \int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\ dt$.

Choisissons $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, donc $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{y}\ (1-t)^y$

u et v sont C^1 sur $[a,b]$, on peut donc intégrer par parties :

$J(a,b) = \left[t^x \times \left(-\frac{1}{y}\right)(1-t)^y\right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1} \times \frac{1}{y}\ (1-t)^y\ dt = -\frac{1}{y}b^x(1-b)^y + \frac{1}{y}a^x(1-a)^y + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\ dt$

On fait tendre a et b vers 0 et 1 respectivement (toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède).

$B(x+1,y) = \lim_{a\to0,b\to1} J(a,b) = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\ dt = \frac{x}{y}B(x,y+1)$ **c.q.f.d.**

(b) $B(x+1,y) + B(x,y+1) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\ dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\left[t+(1-t)\right]\ dt$

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt$ donc $B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)$

En utilisant 5) a :, $\frac{x}{y}B(x,y+1) + B(x,y+1) = B(x,y)$

Ainsi : $\left(\frac{x}{y}+1\right)B(x,y+1) = B(x,y)$ ou encore $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$ **c.q.f.d.**

resume On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1}B(x+k, y+\ell-k-1)\\
&= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1} \times \frac{y+\ell-k-2}{x+y+\ell-2}B(x+k, y+\ell-k-2)\\
&\vdots\\
&= \underbrace{\frac{(y+\ell-k-1)(y+\ell-k-2)\dots y}{(x+y-\ell-1)(x+y-\ell-2)\dots(x+y+k)}}_{=A}B(x+k,y)
\end{aligned}$$

On continue en développant $B(x+k,y)$ en utilisant la relation "symétrique" : $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$

$$\begin{aligned}
B(x+k,y) &= \frac{x+k-1}{x+y+kl-1}B(x+k-1,y)\\
&\vdots\\
&= \underbrace{\frac{(x+k-1)(x+k-2)\dots x}{(x+y+k-1)(x+y+k-2)\dots(x+y)}}_{=B}B(x,y)
\end{aligned}$$

Or, en regardant bien, $A \times B$ est bien l'expression de $\frac{(x)^{[k]}(y)^{[l-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}$

On a donc bien le résultat.

resume (a) On y va, haut les coeurs ...

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n p_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}\\
&= \frac{1}{B(a,b)}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1}\ dt\\
&= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}\right]\ dt \quad \text{on reconnaît le binôme}\\
&= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[(t+(1-t))\right]^n\ dt\\
&= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\ dt = \frac{1}{B(a,b)} \times B(a,b) = 1
\end{aligned}$$

resume Si $a=1$, $a^{[k]}=k!$. Si $b=1$, $b^{[n-k]}=(n-k)!$ et $(a+b)^{[n]}=2^{[n]}=(2+n-1)2^{[n-1]}=(n+1)\times n\times\ldots\times 2^{[0]}=(n+1)!$

Donc $\dfrac{a^{[k]}b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}=\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$

$P(S=k)=\binom{n}{k}\times\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}$

Donc $\boxed{S\hookrightarrow\mathscr{U}_{[[0,n]]}}$

resume $E(S)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kP(S=k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}\,dt$

$E(S)=\dfrac{1}{B(a,b)}\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right]dt$

Dans le crochet, on reconnaît l'expression de l'espérance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,t)$, qui vaut nt.

$E(S)=\dfrac{1}{B(a,b)}\int_0^1 nt^a(1-t)^{b-1}\,dt=\dfrac{n}{B(a,b)}\times B(a+1,b)=\dfrac{n}{B(a,b)}\times\dfrac{a}{a+b}B(a,b)=\dfrac{na}{a+b}$

On obtient bien le résultat.

On peut remarquer que dans le cas $a=1$ et $b=1$, on obtient $E(S)=\dfrac{n}{2}$, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé (loi uniforme sur $[[0,n]]$).

Partie III. Un possible dans le cas où $n=2$

resume (a) Cherchons $P(X_1=1)$ en utilisant la formule des probas totales :

$P(X_1=1)=P(X_1=1\cap X_2=1)+P(X_1=1\cap X_2=0)$

$$\begin{aligned}P(X_1=1\cap X_2=1)&=\frac{B(a+2,b)}{B(a,b)}=\frac{a+1}{a+b+1}\times\frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}\\&=\frac{a+1}{a+b+1}\times\frac{a}{a+b}\times\frac{B(a,b)}{B(a,b)}=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_1=1\cap X_2=0)&=\frac{B(a+1,b+1)}{B(a,b)}=\frac{a}{a+b+1}\times\frac{B(a,b+1)}{B(a,b)}\\&=\frac{a}{a+b+1}\times\frac{b}{a+b}\times\frac{B(a,b)}{B(a,b)}=\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}P(X_1=1)&=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}\\&=\frac{a(a+1+b)}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

On procède de même pour trouver $P(X_2=1)$.

Donc $\boxed{X_1\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)\text{, de même pour } X_2.}$

(b) Posons $S=X_1+X_2$. $S(\Omega)=\{0,1,2\}$

- $P(S=2)=P(X_1=1\cap X_2=1)=\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}=\dfrac{a^{[2]}b^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}$
- $P(S=0)=P(X_1=0\cap X_2=0)=\dfrac{1}{B(a+b)}\times B(a,b+2)=\dfrac{1}{B(a,b)}\times\dfrac{b+1}{a+b+1}\times B(a,b+1)$

$P(S=0)=\dfrac{b(b+1)}{a+b)(a+b+1)}=\dfrac{a^{[0]}b^{[2]}}{[a+b)^{[2]}}$

- $P(S=1)=P(X_1=0\cap X_2=1)+P(X_1=1\cap X_2=0)=2\,\dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}=\binom{2}{1}\dfrac{a^{[1]}b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$

En synthèse, on a bien S qui suit la loi béta-binomiale $\boldsymbol{B}(2;a,b)$.

(c) $P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \dfrac{P(X_2=1\cap X_1=1)}{P(X_1=1)} = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \times \dfrac{a+b}{a}$

On a bien : $\quad P_{[X_1=1]}([X_2=1])\dfrac{a+1}{a+b+1}$.

resume (a) Sans problème, la variable `u` suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b]$.

La variable `v` suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b+1]$.

(b) Voilà le script complété :

```
function x=randbetabin(a,b)
   x=zeros(1,2);
   u=(a+b)*rand();
   v=(a+b+1)*rand();
         if (u<a) then x(1,1)=1; if v<a+1 then x(1,2)=1;end;
                  else if v <a then x(1,2)=1;end;
         end;
endfunction
```

Expliquons.

• Pour le premier `if` à compléter, on sait que $X_1 = 1$, donc X_2 prend la valeur 1 avec la proba $\dfrac{a+1}{a+b+1}$.

• Pour le deuxième `if`, on sait que $X_1 = 0$. X_2 prend la valeur 1 avec la proba
$P_{(X_1=0)}(X_2=1) = \dfrac{P(X_2=1\cap X_1=0)}{P(X_1=0)} = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)} \times \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{a}{a+b+1}$

resume (a) $E(X_1X_2) = P(X_1=1\cap X_2=1) = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2}\\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a+1)(a+b)-a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)}\right)\\
&= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a^2+a+ab+b-a^2-ab-a}{(a+b+1)(a+b)}\right) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}$$

Puis $r = \dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \dfrac{\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\dfrac{a}{a+b}\times\dfrac{b}{a+b}} = \dfrac{1}{a+b+1}$

$\boxed{r = \dfrac{1}{a+b+1}}$

(b) On cherche a et b pour avoir $r = \dfrac{1}{a+b+1}$ et $p = \dfrac{a}{a+b}$

Donc $a+b+1 = \dfrac{1}{r}$ puis $a = p(a+b) = a\left(\dfrac{1}{r}-1\right) = p\,\dfrac{1-r}{r}$

$b = \dfrac{1}{r} - 1 - a = \dfrac{1}{r} - 1 - p\dfrac{1-r}{r} = \dfrac{1-r-p(1-r)}{r} = \dfrac{(1-r)(1-p)}{r}$ $\quad\boxed{\text{En prenant } a = \dfrac{1-r}{r}p \text{ et } b = \dfrac{1-r}{r}(1-p)}$
avec la fonction `randbetabin`, on obtient bien ce qui est demandé.

FIN