

Épreuve maths 3 hec-Escp 2015 voie E Correction

Exercice

- 1) a: Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et tout  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  de  $\mathbf{R}$ , on a :

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \quad \text{donc :}$$

$$f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y) - \left( \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) \right) v = \lambda \left( x - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) v \right) + \mu \left( y - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) v \right)$$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Ainsi,  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbf{R}^n$ .

- b: Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ .

$$\text{Posons } S = \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$f(x) = x - Sv = (x_1 - Sv_1, x_2 - Sv_2, \dots, x_n - Sv_n).$$

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(x_1 - Sv_1, x_2 - Sv_2, \dots, x_n - Sv_n)$$

$$(f \circ f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n (x_k - Sv_k) v$$

$$(f \circ f)(x) = f(x) - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) v + \left( S \sum_{k=1}^n v_k \right) v$$

Or  $\sum_{k=1}^n v_k = 1$  par hypothèse. Donc :

$$(f \circ f)(x) = f(x) - Sv + Sv = f(x)$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{f \circ f = f}.$$

- 2) On sait que  $f^2 = f$ . Donc le polynôme  $P$  défini par  $P(x) = x^2 - x$  est un polynôme annulateur. Le cours permet d'affirmer que, si  $\lambda$  est valeur propre, alors  $P(\lambda) = 0$ . Donc  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Reste à montrer que ces deux valeurs sont bien valeurs propres.

$$f(v) = v - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right) v = v - v = 0 \quad \text{Donc } v \in \ker(f) \text{ et } \ker(f) \neq \{0_{\mathbf{R}^n}\}$$

$\lambda = 0$  est bien valeur propre (et  $v$  est un vecteur propre associé).

Pour la valeur propre 1, il vaut mieux être initié aux projecteurs...

$f$  est non nulle donc  $\text{Im}(f) \neq \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ . Soit  $u$  un vecteur non nul de  $\text{Im}(f)$ .

$\exists v \in \mathbf{R}^n$  tel que  $u = f(v)$  par définition de  $\text{Im}(f)$

$$f(u) = f(f(v)) = (f \circ f)(v) = f(v) = u. \quad \text{donc :}$$

$\lambda = 1$  est bien valeur propre (et  $u$  est un vecteur propre associé).

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Sp}(f) = \{0, 1\}}$$

- 3) a:  $y \in \text{Im}(f) \iff \exists u \quad f(u) = y$

$$\text{Dans ce cas : } f(y) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = f(u) = y$$

Réciproquement, si  $f(y) = y$ , alors un antécédent de  $y$  est  $y$  lui-même puisque  $f(y) = y$ , donc  $y \in \text{Im}(f)$

On a bien l'équivalence demandée.

- b: On a vu que  $\ker(f) \neq \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ . Donc  $\dim \ker(f) \geq 1$ .

La formule du rang donne :  $\dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = n$  donc  $\dim \text{Im}(f) \leq n - 1$ .

- c: Pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a  $f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1})$

Or  $f(e_k) = e_k - 1v = e_k - v$ . Donc  $f(e_i - e_{i+1}) = (e_i - v) - (e_{i+1} - v) = e_i - e_{i+1}$   
 D'après la caractérisation précédente :  $e_i - e_{i+1} \in \text{Im}f$ .

**d:** Construisons la matrice des composantes des  $n - 1$  vecteurs de la famille  $\mathcal{B}'$  définie dans l'énoncé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La famille  $\mathcal{B}'$  est échelonnée, ce qui permet de justifier que c'est une famille libre de  $\text{Im}(f)$ .

Donc  $\dim \text{Im}(f) \geq n - 1$ . Donc  $\dim \text{Im}(f) = n - 1$  et ainsi  $\dim \text{Im}(f) = n - 1 = \text{rg}(g)$  et  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

**4) a:** D'après la formule du rang,  $\dim \ker(f) = 1$

On a vu que  $f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Donc  $\ker(f) = \text{Vect}(v)$ .

**b:** Tout est déjà dit :

$E_{(\lambda=0)} = \ker(f) = \text{Vect}(v)$  et  $E_{(\lambda=1)} = \text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{B}')$ .

**c:** La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à  $1 + (n - 1) = n$  donc  $f$  est diagonalisable.

**5)** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f(e_i) = e_i - 1v = e_i - v$ .

On peut donc écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & \dots & \dots & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & -v_2 & \dots & -v_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -v_{n-1} & & & 1 - v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & \dots & \dots & -v_n & 1 - v_n \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Dans la base  $\mathcal{B}'$ , c'est beaucoup plus simple :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Problème

### Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$ .

**1)** Nous restituons le cours :  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  si  $x \geq 0$

2)  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , donc, par linéarité de l'espérance :

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

$\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais de  $\frac{1}{\lambda}$ .

Le risque quadratique est donc  $r_n = V(\bar{X}_n)$  et  $V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)$

Par indépendance des  $X_k$  :  $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{\lambda}.$

$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n\lambda}$ . Ce terme tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc  $\bar{X}_n$  est bien un estimateur sans biais convergent du paramètre  $\frac{1}{\lambda}$ .

3) a: Soit  $F_{M_n}$  la fonction de répartition de  $M_n$  :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x \cap \dots \cap X_n \leq x)$$

Par indépendance :  $F_{M_n}(x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x) = [P(X \leq x)]^n = [F_X(x)]^n$

Par passage à l'exposant  $n$ ,  $F_{M_n}$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et est  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$  sauf éventuellement en 0 (comme  $F_X$ ).

Donc  $M_n$  est une variable à densité et on obtient une densité en dérivant  $F_{M_n}$  partout où elle est dérivable et en complétant comme on veut ailleurs :

$$f_{M_n}(x) = nF_X'(x)[F_X(x)]^{n-1} = nf_X(x)[F_X(x)]^{n-1}$$

Ainsi, on a bien :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b:  $E(M_n)$  existe si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{M_n}(t) dt$  est absolument convergente.

C'est à dire si et seulement si  $\int_0^{+\infty} t f_{M_n}(t) dt$  converge.

$$\text{Or, pour } t > 0, \quad t^2 \times t f_{M_n}(t) = t^3 n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \sim t^3 n e^{-\lambda t}$$

Cette expression tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  par croissances comparées de  $t^3$  et de l'exponentielle.

Il en résulte que  $f_{M_n}(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Par les règles de comparaison des intégrales des fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} t f_{M_n}(t) dt$  converge.

De plus  $\int_0^1 t f_{M_n}(t) dt$  est une intégrale propre car  $f_{M_n}$  se prolonge en 0 par continuité sans problème. Donc  $E(M_n)$  existe bien.

c: On pose  $z = 1 - e^{-\lambda x}$  dans l'intégrale propre  $\int_0^a x f_{M_n}(x) dx$ .

$$x = 0 \iff z = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x = a \iff z = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$dz = \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ donc } dx = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda x}}$$

Or  $e^{-\lambda x} = 1 - z$ .

Donc  $dx = \frac{1}{\lambda(1-z)} dz$ .

On a également  $-\lambda x = \ln(1-z)$  soit encore  $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-z)$ . On peut tout remplacer maintenant :

$$\begin{aligned} \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx &= \int_0^{1-e^{-\lambda a}} -\frac{1}{\lambda \ln(1-z)} (1-z) z^{n-1} \frac{1}{\lambda(1-z)} dz \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1} \ln(1-z) dz \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

**d:** On a :

$$\begin{aligned} -\frac{n}{\lambda} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1} \ln(1-z) dz &= n\lambda \left( -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1} \ln(1-z) dz \right) \\ &= n\lambda \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \quad \text{d'après ce qui précède} \\ &= \int_0^a x f_{M_n(x)} dx \end{aligned}$$

On fait tendre  $a$  vers  $+\infty$ . Comme  $E(M_n)$  existe, on a donc :  $-\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz$  converge et

$$E(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz$$

**e:** La fonction  $z \mapsto u(z) = (1-z)(1 - \ln(1-z))$  définie sur l'intervalle  $[0, 1[$ , est dérivable sur cet ensemble et  $u'(z) = -(1 - \ln(1-z)) + (1-z) \frac{1}{1-z} = \ln(1-z)$ .

Donc  $u$  est une primitive de la fonction  $z \mapsto \ln(1-z)$ .

Posons donc  $u'(z) = \ln(1-z)$  et  $v(z) = z^n$

On prend  $u(z) = (1-z)(1 - \ln(1-z))$  et  $v'(z) = nz^{n-1}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$ , on peut donc intégrer par parties sur  $[0, a]$  avec  $a \in ]0, 1[$  :

$$\int_0^a z^n \ln(1-z) dz = \left[ z^n (1-z)(1 - \ln(1-z)) \right]_0^a - \int_0^a n z^{n-1} (1-z)(1 - \ln(1-z)) dz$$

Donc, en passant la dernière intégrale à gauche :

$$(n+1) \int_0^a z^n \ln(1-z) dz =$$

$$a^n(1-a) - a^n(1-a) \ln(1-a) - n \int_0^a (z^{n-1} z^n) dz + n \int_0^a z^{n-1} \ln(1-z) dz$$

$$-n \int_0^a z^n \ln(1-z) dz$$

$$\int_0^a z^n \ln(1-z) dz =$$

$$a^n(1-a) - a^n(1-a) \ln(1-a) - n \left( \frac{a^n}{n} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \right) + n \int_0^a z^{n-1} \ln(1-z) dz \quad (1)$$

Mais on sait, d'après 3 d :  $\lim_{a \rightarrow 1} n \int_0^a z^{n-1} \ln(1-z) dz = -\lambda E(M_n)$  et donc :

$$\lim_{a \rightarrow 1} (n+1) \int_0^a z^n \ln(1-z) dz = -\lambda E(M_{n+1}).$$

Donc, en passant à la limite quand  $a$  tend vers 1 dans l'égalité (1) :

$$-\lambda E(M_{n+1}) = -n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \lambda E(M_n)$$

$$-\lambda E(M_{n+1}) = -\frac{1}{n+1} - \lambda E(M_n)$$

On peut conclure : 
$$E(M_{n+1}) - E(M_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

**f:** On a donc, pour  $k \geq 1$  : 
$$E(M_{k+1}) - E(M_k) = \frac{1}{\lambda(k+1)}.$$

On somme pour  $k$  variant de 1 à  $n-1$  :

$$\sum_{k=1}^{n-1} [E(M_{k+1}) - E(M_k)] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(k+1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

À gauche, il y a télescopage et à droite, on fait un changement d'indice (on prend  $j = k+1$ ).

$$E(M_n) - E(M_1) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

Il reste à remarquer que  $M_1 = X_1$  et donc que  $E(M_1) = \frac{1}{\lambda}$

$$\text{Donc } E(M_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \frac{1}{\lambda} u_n.$$

**4)** On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $M'_n = \frac{M_n}{u_n}$  et  $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$ . On admet que  $V(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$ .

**a:** On a, par linéarité de l'espérance :  $E(M'_n) = \frac{1}{u_n} E(M_n) = \frac{1}{\lambda}$ .

$$V(M'_n) = \frac{1}{u_n^2} V(M_n) = \frac{1}{u_n^2} \times \frac{1}{\lambda^2} v_n = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2}$$

**b:** La suite (erreur d'énoncé signalée) de terme général  $v_n$  converge car c'est la somme partielle d'une série de Riemann convergente. Par contre, la suite  $(u_n)$  diverge (en croissant vers  $+\infty$ ) comme suite des sommes partielles de la série harmonique divergente. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**c:**  $M'_n$  est un estimateur sans biais du paramètre  $\frac{1}{\lambda}$  car  $E(M'_n) = \frac{1}{\lambda}$ . Il est convergent car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(M'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2} = 0$$

En effet le numérateur tend vers une limite finie et le dénominateur tend vers  $+\infty$ .

**d:** 
$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \left( x - \frac{1}{j} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left( x^2 - 2x \times \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2} \right) = nx^2 - 2u_n x + v_n$$

C'est donc un trinôme du second degré, toujours positif ou nul. Son discriminant  $\Delta$  est donc négatif ou nul.

Or  $\Delta = 4u_n^2 - 4v_n$ . Donc 
$$u_n^2 \leq nv_n.$$

**e:** D'après ce qui précède, on a  $\frac{v_n}{u_n^2} \geq \frac{1}{n}$  donc

$$V(M'_n) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_n}{u_n^2} \geq \frac{1}{n\lambda^2} = V(M_n)$$

Conclusion : 
$$\boxed{\bar{X}_n \text{ est donc un meilleur estimateur que } M'_n.}$$

**Partie II. Un exemple.**

5) a:  $\frac{1}{\lambda} = E(X)$  est donc la durée de vie moyenne du composant. Elle s'exprime en heure (comme  $X$ ).

b: Soit  $p \in ]0, 1[$ .  $P(X > x) = 1$  si  $x < 0$  et  $P(X > x) = e^{-\lambda x}$  si  $x \geq 0$   
 Donc  $P(X > x) = p \iff e^{-\lambda x} = p \iff -\lambda x = \ln(p)$

Donc 
$$h_p = -\frac{\ln(p)}{\lambda}$$

c: Prenons  $H_n = -\ln(p)\overline{X}_n$ . On a  $E(H_n) = -\ln(p)E(\overline{X}_n) = -\ln(p) \times \frac{1}{\lambda} = h_p$ .

Donc  $H_n$  est un estimateur sans biais de  $h_p$ .

$V(H_n) = (-\ln(p))^2 V(\overline{X}_n) = (\ln(p))^2 \times \frac{1}{n\lambda^2}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Donc l'estimateur  $H_n$  est bien convergent.

d: Pour cet échantillon, on obtient une valeur réalisée de  $\overline{X}_{100}$  :  $\overline{x}_{100} = \frac{10^5}{100} = 10^3$ . La valeur réalisée correspondante de  $H_n$  est  $h_{100} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\overline{x}_{100} = \ln(2) \times 1000 = 70$

Une estimation de  $h_{\frac{1}{2}}$  est 70

6) a:  $N(t)(\Omega) = \mathbf{N}$ . Il faut remarquer que  $N(t) \geq n \iff Y_n \leq t$ . Donc :  $P(N(t) \leq n) = P(Y_n \leq t) = F_{Y_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

On revient à  $P(N(t) = n)$  en utilisant  $P(N(t) = n) + P(N(t) \geq n+1) = P(N(t) \geq n)$ . Donc :  
 $P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

Donc  $N(t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$

b: On peut estimer à  $E(N_t) = \lambda t$  le nombre moyen de pannes dans l'intervalle  $[0, t[$ .

7) a: On sait que  $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$ . Donc  $\Phi(-t_1) = 1 - \Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2} = \Phi(t_2)$ .

Comme  $\Phi$  est bijective, on a bien  $t_2 = -t_1$ .

b: Le théorème de la limite centrée permet d'affirmer que  $(\overline{X}_n)^*$  converge en loi vers la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Or 
$$(\overline{X}_n)^* = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \frac{(\overline{X}_n) - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\lambda\overline{X}_n - 1) = R_n$$

Donc la suite de variables aléatoires  $(R_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

c: On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([-t_1 \leq R_n \leq t_1]) = \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$ .

d: On se laisse porter par ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 P(-t_1 \leq R_n \leq t_1) &= P\left(-\frac{t_1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \bar{X}_n - 1 \leq \frac{t_1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \bar{X}_n \leq 1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}\right) \\
 &= P\left(\frac{1}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\lambda \bar{X}_n} \leq \frac{1}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right)
 \end{aligned}$$

Donc  $P\left(\frac{1}{\lambda} \in \left[\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}, \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right) = P(-t_1 \leq R_n \leq t_1) = 1 - \alpha$ .

On peut conclure :

un intervalle de confiance de  $\frac{1}{\lambda}$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$  est  $\boxed{\left[\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}, \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]}$

**e:** Quand  $\alpha$  est proche de 0 alors  $t_1$  est très grand ( $t_1$  tend vers  $+\infty$ ) la méthode de calcul est en échec car les inégalités précédentes ne sont plus dans  $\mathbf{R}^{+*}$  et on ne peut pas utiliser l'inverse.

Lorsque  $\alpha$  est proche de 1,  $t_1$  tend vers 0, l'intervalle de confiance est de petite amplitude (trop petite) ??

**f:** Pour  $\alpha = 0,05$ , on donne  $t_1 \simeq$

On a alors  $\frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} = \frac{1000}{1 - 0,2} = \frac{10000}{8} = 1250$

De même  $\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} = \frac{1000}{1 + 0,2} = \frac{10000}{12} = 833$

L'intervalle de confiance obtenu est bien : [833, 1250].

### Partie III. Un résultat asymptotique.

**8) a:** Pour tout  $x$  réel, on a :  $F_{T_n}(x) = P\left(M_n - \frac{1}{\lambda} \ln(n) \leq x\right) = P\left(M_n \leq x + \frac{1}{\lambda} \ln(n)\right)$

On a bien :  $\left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n\right)\right)^n$ .

**b:** Pour chaque réel  $x$  fixé :

$x + \frac{1}{\lambda} \ln(n) > 0 \iff \ln(n) > -\lambda x \iff n > e^{-\lambda x}$

On peut prendre, par exemple :  $N_x = \lfloor e^{-\lambda x} \rfloor + 1$ .

Si  $n \geq N_x$ ,  $u = x + \frac{1}{\lambda} \ln(n) > 0$ , donc  $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n\right) = F_X(u) = 1 - e^{-\lambda u}$ .

$\lambda u = \lambda x + \ln(n)$  donc  $e^{-\lambda u} = e^{-\lambda x} \times e^{-\ln(n)} = \frac{1}{n} e^{-\lambda x}$ .

On a donc bien :  $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n\right) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}$ .

c: Pour tout  $x$  réel, pour  $n \geq N_x$ , on a :  $F_{T_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}\right)^n$

Quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\ln(F_{T_n}(x)) = n \ln\left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}e^{-\lambda x}\right) = -e^{-\lambda x}$$

On a donc bien :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = \exp(-e^{-\lambda x}) = e^{-e^{-\lambda x}}$ .

9) a:  $x \mapsto e^{-\lambda x}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ ,  $u \mapsto e^u$  aussi. Donc, par composition,  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$F'(x) = (-e^{-\lambda x})' \times F(x) = \lambda e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x}) > 0$$

Donc  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ . Regardons les limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(t) = 1$$

Donc  $F$  réalise une bijection de  $\mathbf{R}$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

b: Les quatre conditions pour que  $F$  soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $T$ , sont réunies. On obtient une densité en dérivant  $F$  partout où elle est dérivable, sur  $\mathbf{R}$  en l'occurrence :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_T(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x})$$

c: On a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = F_T(x)$ . C'est la définition de la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  vers la variable aléatoire  $T$ .

10) a:  $xf_T(x) = \lambda x e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x}) \sim \lambda x e^{-\lambda x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Donc, par le critère de l'équivalent :  $\int_0^{+\infty} xf_T(x) dx$  est convergente.

Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x^3 f_T(x) = \lambda x^3 e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x})$ . On pose  $u = e^{-\lambda x}$ . L'expression prend la forme  $A(u) = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \ln(u)\right)^3 u e^{-u}$

$A(u) \leq -\frac{1}{\lambda^2} u^4 e^{-u}$  tend vers 0 quand  $u$  tend vers  $+\infty$ .

Ainsi, au voisinage de  $-\infty$ ,  $|xf_T(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

Donc  $\int_{-\infty}^{-1} xf_T(x) dx$  est absolument convergente car  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge.

De plus  $\int_{-1}^0 xf_T(x) dx$  ne pose pas de problème (intégrale propre).

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_T(x) dx$  est absolument convergente.  $E(T)$  existe.

b: Pour tout  $z \in \mathbf{R}$ ,  $P(Z \leq z) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda X) \leq z\right) = P(\ln(\lambda X) \geq -\lambda z)$

$$P(Z \leq z) = P\left(X \geq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z}\right) = 1 - (1 - e^{-\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z}}) = e^{-e^{-\lambda z}}$$

On reconnaît  $F_T(z)$ . On peut donc conclure : les variables aléatoires  $Z$  et  $T$  ont la même loi.

c:  $Z$  et  $T$  ayant même loi,  $E(T) = E(Z) = \int 0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda x) f_X(x) dx$  (toujours le théorème de transfert !)

$$E(T) = - \int_0^{+\infty} \ln(\lambda x) e^{-\lambda x} dx.$$

On peut, maintenant, faire le changement de variable affine  $t = \lambda x$ . On obtient immédiatement :

$$E(T) = - \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

**d:** Grâce à la concavité de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , on sait que, pour  $t > 0$ ,  $\ln(t) \leq (t - 1)$ , donc  $-\ln(t) \geq 1 - t$ . Donc

$$E(T) \geq \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - t) dt = \frac{1}{\lambda} \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \right).$$

Nos connaissances sur la loi exponentielle de paramètre 1 permettent de dire que ces deux dernières intégrales valent 1.

Donc  $E(T) \geq 0$ .

**11)** On suppose dans cette question que  $\lambda = 1$ .

**a:**  $y = F(t) = \exp(-e^{-t})$  donc  $\ln(y) = -e^{-t}$  donc  $\ln(-\ln(y)) = -t$

On a finalement  $t = F^{-1}(y) = -\ln(-\ln(y))$ .

On peut conclure :  $\forall y \in ]0, 1[ \quad F^{-1}(y) = -\ln(-\ln(y))$

**b:** i.  $x = \text{linspace}(-2, 2, 400)$  rend un vecteur  $x$  de 400 valeurs avec  $x(1) = -2$  et  $x(400) = 2$ . D'une manière générale  $x(k) = -2 + (k - 1) \times 4 \frac{k}{399}$ .

Le réel 0 ne fait pas partie des nombres renvoyés par la commande  $x = \text{linspace}(-2, 2, 400)$ .

ii. Dans le même repère, le premier plot trace la courbe de  $F$  et le deuxième la courbe de  $F^{-1}$ .

**c:**  $U(\Omega) \in ]0, 1[$  donc  $-\ln(U)(\Omega) \in \mathbf{R}^{+*}$  et donc  $G(U)(\Omega) \in \mathbf{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :  $P(G(U) \leq x) = P(U \leq G^{-1}(x)) = P(U \leq F(x)) = F(x)$ .

Nous pouvons donc conclure :  $G(U)$  suit une loi de Gumbel de paramètre 1

$$\mathbf{d:} \quad E(T) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (-\ln(t)) dt = \int_0^1 e^{-t} (-\ln(t)) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} (-\ln(t)) dt.$$

La deuxième intégrale est négative, car  $\ln(t) \geq 0$  si  $t \geq 1$ .

$$\text{Donc } E(T) \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} (-\ln(t)) dt \leq \int_0^1 (-\ln t) dt \text{ car } e^{-t} \leq 1.$$

On connaît cette intégrale qui est presque usuelle, et, on peut le dire, nécessairement connue d'étudiants d'ECE arrivant à ce niveau dans cette épreuve. On sait donc que

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

Donc :  $E(T) \leq 1$ .

**e:** voir ci dessous.

**f:** Voilà un script complet.

```
function t=T()
    t=-log(-log(rand()))
endfunction
```

```
N=10000
```

```
ech=zeros(1,N)
```

```
for k=1:N
```

```
    ech(k)=T()  
end  
disp(mean(ech))  
// une valeur obtenue : 0.5827130782536
```