MATHÉMATIQUES E (épreuve n° 289)

ANNÉE 2013

Épreuve conçue par H E C Paris

Voie économique et commerciale
Option économique

Le sujet

Le sujet de cette année était composé d'un exercice d'algèbre linéaire et d'un problème à dominante probabiliste et analytique. Ainsi, les trois composantes principales du programme étaient représentées dans cette épreuve qui comprenait en outre, une question classique d'algorithmique : écriture d'une fonction Pascal récursive renvoyant le n-ième terme d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec une constante additive.

L'exercice étudiait, dans la première question, les propriétés d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $R_3[X]$ et de sa matrice dans la base canonique de $R_3[X]$ (noyau, image, inversibilité, éléments propres, diagonalisabilité). La seconde question s'intéressait à un endomorphisme g de $R_3[X]$ vérifiant $g=Id+u+u^2+u^3$ avec $u^4=0$, l'objectif étant de montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
Le problème abordait l'analyse mathématique de l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents modes d'anticipation d'agents économiques et la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction de profit d'une entreprise.

Dans la partie I, après avoir défini la notion de prix d'équilibre, on étudiait la loi de l'évolution du prix dans le cas où les anticipations étaient *extrapolatives* (le prix anticipé dépend linéairement des prix observés lors des périodes précédentes) ou *adaptatives* (le prix anticipé est égal à la somme du prix anticipé lors de la période précédente et d'un terme correctif représentant une fraction de l'écart entre les prix observé et anticipé lors de la période précédente).

La partie II traitait d'un cas où le prix était aléatoire (loi discrète finie) et établissait un résultat économiquement intéressant lié à la convexité de la fonction de profit.

Dans la partie III, on définissait la notion d'espérance conditionnelle dans le cas discret fini et on déterminait ses principales propriétés (utiles pour la partie IV).
Enfin, dans le cadre d'un modèle aléatoire très simple d'évolution du prix, la partie IV se proposait de comparer les deux types d'anticipation *naïve* (le prix anticipé est égal au prix observé lors de la période précédente) et *rationnelle* (le prix anticipé est égal à l'espérance conditionnelle du prix sachant toute l'information économique que l'on peut mobiliser à la période précédente) ; dans le cas présent, toute l'information disponible était résumée par la connaissance du niveau de prix de la période précédente.

Les résultats statistiques

L'exercice et le problème comptaient respectivement pour 23% et 77% des points du barème, les parties I, II et IV du problème ayant sensiblement le même poids de 23%, la partie III représentant 8% des points de l'ensemble de l'épreuve.

Sur les 1943 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,20 avec un écart-type de 4,05, ces statistiques étant très voisines de celles du concours 2012.

Près de 6%, soit 113 candidats, obtiennent une note supérieure à 16 et 14 candidats se voient attribuer la note maximale de 20. La note médiane est de 9.1 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 6,2 et 11,9 respectivement.

Commentaires

Les remarques générales qui ressortent de la correction des copies sont peu ou prou celles qui ont été relevées dans les rapports des concours précédents.

Si la rédaction est moins désinvolte que par le passé, la présentation laisse beaucoup à désirer : omission de la numérotation des questions, fautes d'orthographe innombrables même dans les termes mathématiques, copies pleines de ratures et à la limite de la lisibilité (écriture anarchique, non respect des lignes horizontales), absence de résultats encadrés, va-et-vient entre différentes questions des différentes parties.
Le jury rappelle que toute tentative de « bluff » ou de tricherie a une incidence négative sur la note finale de son auteur.
Signalons enfin les erreurs les plus fréquentes constatées par les correcteurs.

Exercice

Les correcteurs sont unanimes pour relever une très grande faiblesse des candidats en algèbre linéaire certainement due à une absence de pratique.
Ainsi, on écrit des matrices d'ordre 2 dans un espace de dimension 4 ou on divise des endomorphismes. La dimension de $R_3[X]$ est trop souvent erronée : on trouve 3 ou 2, etc.
L'aspect triangulaire de la matrice M n'est pas toujours perçu immédiatement, voire pas du tout, ce qui donne souvent des explications du genre : « M est une matrice avec des 0 sur sa diagonale, donc elle n'est pas inversible ». Le lien entre Ker f et le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 n'est pas toujours très clair.
On observe également des difficultés dans la gestion de la combinaison linéaire nulle : « les vecteurs sont nuls, donc les coefficients sont nuls ».
Enfin, on relève quelques « horreurs » telles que : « puisque Ker u = Ker v, on a $u = v$ » ou encore « puisque Ker u = Ker $(g\text{-}Id)$, on a Ker $(u\text{-}g\text{+}Id)\text{=}0$ ».

Problème

Dans la question 1.a), on trouve parfois 3 pages de calcul / justification pour trouver $p^*=2$, ou bien des erreurs pour résoudre l'équation $10p=20$ (environ 8% des candidats donnent $p=10$).
La question de Pascal est très peu traitée ou souvent très approximativement : peu d'initialisation, parfois une boucle *for* au lieu de la récursivité et souvent une instruction $k :=k+1$ dans la boucle *for.*
Certains candidats éprouvent des difficultés à passer de p_n à v_n : on a très souvent v_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n (question 1.d).
Dans la question 1.e), il y a beaucoup d'erreurs dans le calcul des racines, même si la formule de récurrence est bonne.
L'étude de la fonction h_p est trop fréquemment mal traitée : les racines de la fonction dérivée sont fausses ($x=p$ ou $x=-p$), h_p est une « fonction rationnelle », donc on dérive un quotient, le paramètre p est strictement positif, donc « la dérivée est du signe de $-x^2$ et h_p est strictement décroissante », h_p est concave, donc les « branches sont tournées vers le bas et elle admet un maximum ».
Pour la courbe représentative de h_1, on trouve soit une demi-droite, soit deux segments, soit encore Ox comme asymptote.
Dans la question 4.a), on trouve l'argumentation suivante : « la dérivée de F est croissante, donc sa limite est l'infini ». De plus, beaucoup de candidats n'hésitent pas à dériver les équivalents.
Les questions 5,6 et 7 sont souvent admises et les parties III et IV sont rarement abordées.