CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. **Étude d'une suite et programmation**
On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

(a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite décroissante de réels positifs.

(b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1}+c_n = \dfrac{1}{n}$

(c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

(d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right)$$

(e) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

2. **Étude d'une suite de variables aléatoires à densité**
Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$

(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

(c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

(d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

(e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1.$$

(f) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ?
Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.
Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k.$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en "inversant l'ordre des coefficients".
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.
Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. **Linéarité de s**
   Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. **Diagonalisation dans un cas particulier**

   (a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

   (b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.

3. **Etude du cas général**
   On définit la famille de polynômes $(A_0, ..., A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout r el } x, \qquad \begin{cases} A_k(x) = & x^{2n-k} + x^k \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = & x^n \\ A_k(x) = & x^k - x^{2n-k} \quad \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

   (b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
   Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.

   (c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

   (d) Montrer que la famille $(A_0, ..., A_{2n})$ est libre.

   (e) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

PARTIE B

1. **Préliminaires**
   On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^\times}$ de polynômes par :
   pour tout réel x,

$$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$$

   et pour tout entier k supérieur ou égalà 2,

$$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$

   (a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

   (b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité :

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

   (c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. **Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre** 1

   Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.
   On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par :

$$\widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x).$$

   (a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

   (b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
   Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
   Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q?

   (c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1.$$

   Déterminer les racines de Q.

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1, p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a :

$$\mathbf{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. **Description d'un cas simple**

   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

2. **Étude générale de la variable aléatoire** Z

   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

   (a) Calculer le cardinal de Ω.

   (b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

   (c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n + 1$ et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 2n + 1]) = \frac{1}{p^n}$$

   (d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j + 1])$.

   (e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.