Chapitre 2

HEC-ESCP MATHS 2. Corrigé

Partie I.

1. a) Comme $\mathbf{P}$ est une probabilité, les nombres $(a_n = P([X = n]))_{n \geqslant 1}$ appartiennent à $[0, 1]$ et la série de terme général $\mathbf{P}([X = n])$ est convergente et de somme 1, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

   b) Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant a_n\, x^n \leqslant a_n$. Comme la série de terme général a_n est convergente par la question précédente, il s'ensuit par le critère de comparaison des séries à termes positifs que pour tout $x \in [0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est également convergente.

2. a) L'addition de séries convergentes ne posant pas de problèmes, la formule concernant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique nous permet d'écrire que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \quad .$$

   b) Si $x, y \in [0, 1[$ avec $x < y$, alors par croissance des fonctions puissances $t \mapsto t^k$ sur $[0, 1[$, il vient $\sum_{k=0}^{n-1} x^k < \sum_{k=0}^{n-1} y^k$. En multipliant par le nombre positif a_n et en sommant les inégalités obtenues de $n = 1$ à $+\infty$, il vient $\dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leqslant \dfrac{f(1) - f(y)}{1 - y}$. D'où la croissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ sur $[0, 1[$.

Rappel de cours. Si h est une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, alors :

- soit la limite en b^- existe dans $\mathbb{R}$, soit la limite est $+\infty$.
- La fonction h est majorée sur $]a, b[$ si et seulement si la limite en b^- existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on a $h(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} h(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Evidemment, un résultat analogue vaut pour une fonction décroissante.

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ et que sa limite en 1^- existe (elle vaut $f'(1)$ par hypothèse), on en déduit par application du rappel que $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant f'(1)$ pour tout $x \in [0,1[$. Enfin la positivité de $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ résulte de la question 2.a).

c) Pour tout entier naturel non nul N, la question 2.a) nous permet d'écrire par troncature $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \geqslant 0$. En faisant tendre vers x vers 1^-, il vient $f'(1) \geqslant \sum_{n=1}^{N} na_n \geqslant 0$. La série de terme général na_n est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par une constante $f'(1)$ indépendante de n. La série $\sum_n na_n$ est donc convergente et sa somme est inférieure ou égale à $f'(1)$.

d) Pour $x \in [0,1[$, on a $0 \leqslant a_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant na_n$. Les deux membres de cette inégalité sont des termes généraux de séries convergentes. En sommant pour n variant de 1 à $+\infty$, on obtient $0 \leqslant \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant f'(1)$.

e) Faisant tendre x vers 1^- dans la triple inégalité précédente précédente, on obtient la somme de la série $\sum_n na_n$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$. Rappelons que la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_n n\mathbf{P}([X=n])$ (qui n'est autre que $\sum_n na_n$) est convergente et que dans ce cas l'espérance en est la somme. C'est le cas ici et donc X admet une espérance et celle-ci vaut $f'(1)$.

Partie II.

1. Pour $n \geqslant 3$, l'évenement U_n est évidemment inclus dans U_{n+1}, ce qui se traduit au niveau des probabilités par $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Les deux premiers termes étant nuls, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante à partir de son premier terme. Majorée par 1, elle converge donc par le théorème de convergence monotone.
2. a) La pièce étant supposée équilibrée, les lancers sont donc indépendants et amènent « *pile* » ou « *face* » avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$. Les évenements R_{n-2}, R_{n-1} et S_n le sont a fortiori et on peut donc écrire

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = \mathbf{P}(R_{n-2}) \times \mathbf{P}(R_{n-1}) \times \mathbf{P}(S_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad .$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$B_n \cap B_{n+1} = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap \boxed{S_n} \cap R_{n-1} \cap \boxed{R_n} \cap S_{n+1} = \emptyset$$

la vacuité provenant des évenements encadrés qui sont incompatibles. Ceci montre aussi que $B_{n+1} \cap B_{n+2} = \emptyset$. Enfin, un calcul similaire mène à :

$$B_n \cap B_{n+2} = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap \boxed{S_n} \cap \boxed{R_n} \cap R_{n+1} \cap S_{n+2} = \emptyset$$

Les évenements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont donc deux à deux incompatibles.

c) Par la question 2.a), on a $u_3 = \mathbf{P}(U_3) = \mathbf{P}(B_3) = \dfrac{1}{8}$. Par incompatibilité de deux ou trois événements B_n successifs, il vient : $u_4 = \mathbf{P}(U_4) = \mathbf{P}(B_3 \cup B_4) = \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $u_5 = \mathbf{P}(U_5) = \mathbf{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) + \mathbf{P}(B_5) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.

3. a) Par les lois de Morgan qui assurent la distributivité de l'intersection sur la réunion et vice-versa, on peut écrire pour tout entier $n \geqslant 5$:

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i\right) \cap B_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n} (B_i \cap B_{n+1}) \\ &= \left(\bigcup_{i=3}^{n-2} (B_i \cap B_{n+1})\right) \cup \underbrace{(B_{n-1} \cap B_{n+1})}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B_n \cap B_{n+1})}_{\emptyset} \\ &= \left(\bigcup_{i=3}^{n-2} B_i\right) \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1} \quad . \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture est le suivant : l'évenement U_{n-2} porte sur les $(n-2)$ premiers lancers. Quant à B_{n+1}, il est relatifs aux lancers $n-1$, n et $n+1$. Ils sont donc indépendants et par passage aux probabilités, il vient :

$$\mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbf{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \mathbf{P}(U_{n-2}) \times \mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{8}\, u_{n-2} \quad .$$

b) Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U_{n+1}) = \mathbf{P}(U_n \cup B_{n+1}) &= \mathbf{P}(U_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, u_{n-2} = u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}) \quad . \end{aligned}$$

c) Comme $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(0, 0, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right)$, on vérifie aisément les relations demandées et ceci montre que la relation de récurrence est vraie à partir de 3.

d) La convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ ayant été prouvée précédemment, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence triple obtenue en 3.b). La limite ℓ de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie $\ell = \ell + \dfrac{1}{8}(1 - \ell)$, c'est-à-dire $\ell = 1$.

Rappel de cours : le théorème de continuité monotone séquentielle. Soit $(E_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évenements croissante (resp. décroissante) au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que $E_n \subset E_{n+1}$ (resp. $E_{n+1} \subset E_n$) à partir d'un certain rang n, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_n E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)$$
$$\left(\textit{resp.}\ \mathbf{P}\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)\right) \quad .$$

Par hypothèse, on a : $[Y=0] = \bigcap_{n=3}^{+\infty} \overline{B_n} = \bigcap_{n=3}^{+\infty} \overline{U_n}$. Comme la suite $(U_n)_n$ est croissante au sens de l'inclusion (cf 1.), la suite $(\overline{U_n})_n$ est décroissante. Par le rappel ci-dessus, on obtient :

$$\mathbf{P}([Y=0]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\overline{U_n}) = \lim_{n\to+\infty} (1-u_n) = 0 \quad .$$

4. a) On obtient : $(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left(1, 1, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

b) En utilisant la relation de récurrence triple obtenue en **3.b)-c)**, il vient : pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n - \frac{1}{8}(1-u_{n-2}) = v_n - \frac{1}{8} v_{n-2} \quad .$$

c) En écrivant cette dernière relation pour tout entier $k \in [\![3, N+2]\!]$ et en sommant les égalités, on obtient après simplification :

$$v_{N+3} = v_3 - \frac{1}{8}\sum_{k=3}^{N+2} v_{k-2} \quad ,$$

soit encore :

$$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k \quad .$$

d) Revenons à la définition de la convergence d'une série : on déduit de la dernière égalité que pour tout entier non nul N, la somme partielle d'indice N de la série $\sum_n v_n$ vaut $\sum_{k=1}^{N} v_k = 7 - 8v_{N+3}$ qui converge vers 7 puisque $(v_n := 1-u_n)_n$ tend vers 0. La série $\sum_n v_n$ est donc convergente et de somme 7.

5. a) Dire que $[Y=n]$ signifie que la configuration cherchée n'est jamais apparue au cours des $(n-1)$ premiers lancers et qu'elle apparaît pour la première fois au n-ième lancer. Il est donc clair que $[Y=n] = \overline{U_{n-1}} \cap U_n$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évenements $\{U_{n-1}, \overline{U_{n-1}}\}$, on a : pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned} c_n = \mathbf{P}([Y=n]) &= \mathbf{P}(\overline{U_{n-1}} \cap U_n) = \mathbf{P}(U_n) - \mathbf{P}(U_{n-1} \cap U_n) \\ &= \mathbf{P}(U_n) - \mathbf{P}(U_{n-1}) \quad \text{car la suite } (U_n)_n \text{ est croissante pour l'inclusion} \\ &= u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n \end{aligned}$$

b) C'est clair puisque $c_2 := 0 = 1 - 1 = v_1 - v_2$ et $c_3 := \mathbf{P}([Y=3]) = \mathbf{P}(B_3) = \dfrac{1}{8} = 1 - \dfrac{1}{8} = v_2 - v_3$.

c) Par **I.**1., les fonctions g et h sont bien définies sur $[0,1]$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{puisque } c_1 = c_2 = 0, \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n)\, x^n \\
&= x \sum_{n=3}^{+\infty} v_{n-1} x^{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} v_n x^n \text{ les séries dans le membre de droite étant convergentes,} \\
&= x \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} v_n x^n \\
&= x\,(h(x) - v_1 x) - \big(h(x) - v_1 x - v_2 x^2\big) \\
&= x\,(h(x) - v_1 x) - \big(h(x) - v_1 x - v_2 x^2\big) \\
&= (x-1)h(x) + x \qquad \text{car } v_1 = v_2 = 1
\end{aligned}$$

d) On en déduit que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{(x-1)h(x) + x - 1}{x-1} = h(x) + 1 \quad .$$

e) Si x, y est tel que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, alors par croissance des fonctions puissances $(t \mapsto t^k)_n$ sur $[0,1]$, par positivité de v_k et par sommation il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k\, x^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\, x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\, y^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1,$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{N} v_k\, x^k \leqslant h(x) \leqslant h(y) \leqslant h(1) \quad .$$

ceci montre la croissance de h sur $[0,1]$ et la double inégalité cherchée.

La fonction h étant croissante et majorée, sa limite en 1^- existe donc dans $\mathbb{R}$. Faisant tendre x vers 1^- dans la double inégalité précédente, il vient : pour tout entier naturel non nul N,

$$\sum_{k=0}^{N} v_k \leqslant \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) \leqslant h(1) \quad .$$

Faisant tendre maintenant N vers $+\infty$, on trouve par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1) = 7$.

f) Par 5.d)-e), on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (h(x)+1) = h(1)+1 = 8 \quad .$$

Ainsi g est dérivable au point 1 et à l'aide de la partie **I**2.e), Y admet donc une éspérance égale à 8.

Partie III.

1. a) Par le même raisonnement que celui effectué en **II.**2.b), on a :

$$B'_n \cap B'_{n+1} = S_{n-2} \cap \boxed{R_{n-1}} \cap R_n \cap \boxed{S_{n-1}} \cap R_n \cap R_{n+1} = \emptyset$$

ce qui montre aussi que $B'_{n+1} \cap B'_{n+2} = \emptyset$. De la même manière, il vient :

$$B'_n \cap B'_{n+2} = S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap \boxed{R_n} \cap \boxed{S_n} \cap R_{n+1} \cap R_{n+2} = \emptyset$$

ce qui montre l'incompatibilité deux à deux des évenements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

b) La réponse est contenue dans la question : le même raisonnement que celui présent dans la partie **II** conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}\left(1-u'_{n-2}\right)$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

c) On remarque que $u'_3 = u'_2 + \frac{1}{8}(1-u'_1) = \frac{1}{8} = u_3$. Ainsi les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u'_n)_{n\geqslant 1}$, vérifiant la même relation de récurrence d'ordre 4 et ayant les mêmes trois premiers, termes sont donc égales.

d) Puisque Y admet une espérance d'après la conclusion de la partie **II** et que l'on a $\mathbf{P}([Y = n]) = \mathbf{P}([Y' = n])$ pour tout entier n, Y' suit donc la même loi que Y et admet donc la même espérance que celle de Y.

2. a)

$$g_3 := \mathbf{P}(G_3) = \mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap S_3) = \mathbf{P}(B_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad .$$

$$g_4 := \mathbf{P}(G_4) = \mathbf{P}\left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap S_4\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad .$$

b) La réalisation de G_n signifie que « *pile* » succède à la survenue de $(n-1)$ fois « *face* » consécutifs. Autrement dit,

$$g_n := \mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} S_k\right) \cap R_n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{en utilisant l'indépendance des lancers}$$

c) Calculer la probabilité que le joueur J gagne revient à calculer la probabilité de l'évenement $\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n$. Par σ-additivité, il vient :

$$\mathbf{P}([J \text{ gagne}]) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \quad .$$

3. a) Évidemment $d_1 = 1$ et $d_2 = 1 - \mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ en utilisant l'indépendance.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons d'_n le nombre de mots de n lettres que l'on peut constituer avec les lettres « P » et « F » et qui ne contiennent pas deux « P » consécutifs. Evidemment, $d_n = \frac{d'_n}{2^n}$. Les mots de $(n+2)$ lettres ne contenant pas deux « P » consécutifs se déclinent en deux catégories distinctes :

- ceux commencant par « F » , qui sont au nombre de d'_{n+1},
- ceux commencant par « PF » , qui sont au nombre de d'_n.

Donc :

$$d_{n+2} = \frac{d'_{n+2}}{2^{n+2}} = \frac{d'_{n+1} + d'_n}{2^{n+2}} = \frac{2^{n+1}\, d_{n+1} + 2^n\, d_n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\, d_{n+1} + \frac{1}{4}\, d_n \quad .$$

c) La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ vérifant une relation de récurrence linéaire double, il nous suffit de résoudre l'équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{2}\, r - \frac{1}{4} = 0$ dont les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il existe donc deux réels α, β tels que pour tout entier naturel non nul n, on ait :

$$d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \quad .$$

d) Comme $\left|\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right| < 1$, les séries géométriques $\sum_n \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^n$ sont convergentes. La série $\sum_n d_n$, s'écrivant comme somme de séries géométriques convergentes, est donc convergente. Notons d sa somme.

e) Comme la série de terme général d_n est convergente, on peut sommer la relation obtenue en 3.b) pour n variant de 1 à $+\infty$ et l'on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$$

ce qui se reécrit $d - d_1 - d_2 = \frac{1}{2}(d - d_1) + \frac{1}{4} d$, d'où $d = 5$.

4. a) Dire que l'évenement $[T > n] \cap [T = 0]$ a lieu signifie que les n premiers lancers n'ont pas permis de désigner un gagnant. Si l'on a observé deux « *piles* » consécutifs au cours de ces n lancers, alors tous les lancers ont du donner « *pile* » nécessairement. Donc la réalisation de l'évenement $[T > n] \cap [T = 0]$ signifie que soit il y a eu n fois « *pile* » , soit on n'a jamais observé deux « *piles* » consécutifs au cours de ces n lancers, c'est-\`-dire :

$$\mathbf{P}([T > n] \cap [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

b) Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([T>n-1]\cap[T=0]) - \mathbf{P}([T>n]\cap[T=0])\\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n\\ &= \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\end{aligned}$$

c) La probabilité que l'un des deux joueurs soit déclaré gagnant est la probabilité de l'évenement $\bigcup_{n=3}^{+\infty}[T=n]$. Par σ-additivité et téléscopage, elle vaut :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty}[T=n]\right) &= \sum_{n=3}^{+\infty}\mathbf{P}([T=n])\\ &= \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\right)\\ &= \frac{1}{4} + d_2\\ &= 1\end{aligned}$$

5. La probabilité que l'un des deux joueurs soit déclaré gagnant est la probabilité que J soit déclaré gagnant additionnée à la probabilité que J' soit déclaré gagnant. Par la question précédente et la question **III**.2.b)

$$\mathbf{P}([J' \text{ gagne}]) = 1 - \mathbf{P}([J \text{ gagne}]) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4} = \mathbf{P}([J \text{ gagne}])$$

Le calcul montre donc que le joueur J' a une plus grande probabilité d'être déclaré gagnant que le joueur J.

6. Dans ce cas, la pièce étant équilibrée, « *pile* » et « *face* » jouent des rôles symétriques et les configurations gagnantes des joueurs aussi. Les joueurs J et J' ont donc les mêmes probabilités d'être déclarés gagnants, c'est-à-dire $1/2$.

7. a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
t(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])\, x^n \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])\, x^n \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \right) x^n \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n + x \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1}\, x^{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n\, x^n \quad \text{les trois séries étant convergentes} \\
&= \left(\frac{x}{2} \right)^3 \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + x\,(d(x) - x) - \left(d(x) - x - \frac{3}{4}\, x^2 \right) \\
&= (x-1)d(x) + \frac{x^3}{4(2-x)} - \frac{1}{4}x^2 + x \\
&= (x-1)d(x) + \frac{2x^2(1-x)}{4(2-x)} + x \\
&= (x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x
\end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \frac{(x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x - 1}{x-1} = d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1$$

c) Comme dans **II.5.e)**, on peut montrer mutatis mutandis que pour tout entier naturel N, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} d_k\, x^k \leqslant d(x) \leqslant d(1)$. Faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} d(x) = d(1) = 5$.

d) Faisant tendre x vers 1^- dans l'égalité obtenue en 7.b), il vient :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1 \right) = 5 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{2} \quad .$$

Ainsi t est dérivable au point 1 et à l'aide de la partie **I.2.e)**, T admet donc une éspérance égale à $\dfrac{13}{2}$.

Partie IV.

1. Les trois tableaux suivants se lisent de haut en bas et de gauche à droite ; la première ligne contient les noms des variables, la seconde initialise les variables et les suivantes contiennent les valeurs successives **k** prises par ces variables.

a)

k	r	x	y
0		0	0
1	1	1	0
2	1	2	0
3	1	2	0
4	1	2	0
5	0	3	1

b)

k	r	x	y
0		0	0
1	1	1	0
2	0	0	1
3	1	1	2
4	0	0	1
5	0	0	1
6	0	0	1
7	1	1	2
8	1	2	3

c)

k	r	x	y
0		0	0
1	0	0	1
2	1	1	2
3	0	0	1
4	1	1	2
5	0	0	1
6	1	1	2
7	1	2	3

2. La procédure simule les lancers d'une pièce équilibrée. Le code étant le suivant : « $r = 0$ » correspond au résultat « *face* » et « $r = 1$ » correspond au résultat « *pile* » . Dès que l'une des variables `x` ou `y` atteint la valeur 3, la procédure s'arrête et la variable `k` contient alors le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant. Si la variable `x` a provoqué l'arrêt, le joueur J a gagné tandis que ce sera J' si c'est la variable `y`.

   La dernière instruction de la procédure pourrait s'écrire ainsi :

```
If x=3 then write('le joueur J a gagné au',k,'ième lancer.')
else write('le joueur J prime a gagné au',k,'ième lancer.');
```

   Dans les trois exemples évoqués plus haut, l'ordinateur afficherait :

```
le joueur J a gagné au 5 ième lancer.
le joueur J prime a gagné au 8 ième lancer.
le joueur J prime a gagné au 7 ième lancer.
```

***