

ESSEC, option économique - Épreuve de mathématiques du 4 mai 2017

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

1. La fonction f est clairement continue et positive.

Montrons la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et calculons-la; pour $A > 0$ assez grand :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right) &= \frac{1}{2\beta} \left(\int_{-A}^{\alpha} \exp\left(-\frac{-t+\alpha}{\beta}\right) dt + \int_{\alpha}^A \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\beta}\right) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\int_{-A}^{\alpha} \exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) dt + \int_{\alpha}^A \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\beta}\right) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\left[\beta \exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \right]_{-A}^{\alpha} + \left[-\beta \exp\left(-\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \right]_{\alpha}^A \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{A-\alpha}{\beta}\right) - \exp\left(-\frac{A-\alpha}{\beta}\right) \right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{A-\alpha}{\beta}\right) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, f est une densité de probabilité.

2. — Pour $x \leq 0$:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \exp(t) dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \exp(t) \right]_A^x = \frac{1}{2} e^x.$$

— Pour $x \geq 0$:

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \int_0^x \frac{1}{2} \exp(-t) dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2} \exp(-t) \right]_0^x = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

3. (a) Soit $Y = \beta X + \alpha$. Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y ; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\beta X + \alpha \leq x) \stackrel{(\beta > 0)}{=} P\left(X \leq \frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Comme composée de $x \mapsto \frac{x-\alpha}{\beta}$ et de Ψ , toutes deux de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (Ψ est la fonction de répartition d'une variable à densité continue), la fonction F_Y est

de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ; donc Y est une variable à densité et la dérivée de F_Y en est une densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y'(x) = \frac{1}{\beta} \Psi'\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{2} \exp\left(-\left|\frac{x-\alpha}{\beta}\right|\right) = f(x).$$

Ainsi f est une densité de Y qui suit donc la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(b) Avec les questions 3.(a) et 2. :

$$F_Y(x) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

4. (a) La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{1}{2} \exp(-|t|) \end{cases}$ est une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$. C'est une fonction paire.

— L'existence d'une espérance pour X équivaut à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$. La fonction $t \mapsto t f(t)$ étant impaire, il s'agit de justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$: il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Comme f est paire :

$$E(X) = 0.$$

— De même, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann; la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ étant impaire, ceci donne la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ et :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} t^2 \frac{1}{2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

On reconnaît le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi exponentielle de paramètre 1 :

$$m_2(Z) = V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

Par conséquent :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 0^2 = 2.$$

(b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$. La variable aléatoire Y suit la même loi que $\beta X + \alpha$ d'après 3.(a) ; cette dernière admet une espérance et une variance comme X avec :

$$E(Y) = E(\beta X + \alpha) = \beta E(X) + \alpha = \alpha \quad ; \quad V(Y) = V(\beta X + \alpha) = \beta^2 V(X) = 2\beta^2.$$

5. (a) Déterminons la fonction de répartition F_X de X en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(V = 1), (V = 0)\}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P((V = 1) \cap (X \leq x)) + P((V = 0) \cap (X \leq x)) \\ &= P((V = 1) \cap (U \leq x)) + P((V = 0) \cap (-U \leq x)) \\ &= P(V = 1) \times P(U \leq x) + P(V = 0) \times P(-U \leq x) \\ &\quad \text{(indépendance de } U \text{ et } V) \\ &= \frac{1}{2}F_U(x) + \frac{1}{2}(1 - F_U(-x)) \quad (\star) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $U \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ est :

$$F_U : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

En remplaçant dans (\star) :

— pour $x \leq 0$:

$$F_X(x) = 0 + \frac{1}{2}(1 - e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}e^x;$$

— pour $x \geq 0$:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{2}(1 - 0) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

On retrouve la fonction de répartition Ψ déterminée en question 2. ; par conséquent, X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

(b)

```
function r = Laplace(alpha,beta)
    if rand() <= 1/2
        v = 1
    else
        v = 0
    end
    x = (2*v-1)*grand(1,1,'exp',1)
    r = beta*x+alpha
endfunction
```

6. (a) Si pour tout intervalle I de \mathbb{R} on a :

$$e^{-\varepsilon}P(X \in I) \underset{(1)}{\leq} P(Y \in I) \underset{(2)}{\leq} e^{\varepsilon}P(X \in I)$$

alors, l'inégalité (2) donne $e^{-\varepsilon}P(Y \in I) \leq P(X \in I)$

et l'inégalité (1) donne $P(X \in I) \leq e^{\varepsilon}P(Y \in I)$;

d'où :

$$e^{-\varepsilon}P(Y \in I) \underset{(2)}{\leq} P(X \in I) \underset{(1)}{\leq} e^{\varepsilon}P(Y \in I) \cdot$$

En conclusion, si (X, Y) est ε -différentiel alors (Y, X) l'est aussi.

(b) Supposons que (X, Y) est ε -différentiel et que (Y, Z) est ε' -différentiel. Pour tout intervalle I de \mathbb{R} :

$$e^{-\varepsilon}P(X \in I) \underset{(1)}{\leq} P(Y \in I) \underset{(2)}{\leq} e^{\varepsilon}P(X \in I)$$

$$e^{-\varepsilon'}P(Y \in I) \underset{(3)}{\leq} P(Z \in I) \underset{(4)}{\leq} e^{\varepsilon'}P(Y \in I)$$

Les inégalités (1) et (3) donnent :

$$e^{-\varepsilon'}e^{-\varepsilon}P(X \in I) \leq e^{-\varepsilon'}P(Y \in I) \leq P(Z \in I)$$

donc

$$e^{-\varepsilon'-\varepsilon}P(X \in I) \leq P(Z \in I) \quad (\star).$$

Les inégalités (4) et (2) donnent :

$$P(Z \in I) \leq e^{\varepsilon'}P(Y \in I) \leq e^{\varepsilon'}e^{\varepsilon}P(X \in I)$$

donc

$$P(Z \in I) \leq e^{\varepsilon'+\varepsilon}P(X \in I) \quad (\star\star).$$

En résumé $((\star)$ et $(\star\star))$:

$$e^{-\varepsilon'-\varepsilon}P(X \in I) \leq P(Z \in I) \leq e^{\varepsilon'+\varepsilon}P(X \in I).$$

Le couple (X, Z) est donc $(\varepsilon + \varepsilon')$ -différentiel.

7. — Si le couple (X, Y) est ε -différentiel, il suffit d'appliquer, pour chaque $n \in J$, la définition à l'intervalle $I = [z_n, z_n] = \{z_n\}$ pour obtenir :

$$\forall n \in J, e^{-\varepsilon}P(X = z_n) \leq P(Y = z_n) \leq e^{\varepsilon}P(X = z_n).$$

— Réciproquement, supposons que :

$$\forall n \in J, e^{-\varepsilon}P(X = z_n) \leq P(Y = z_n) \leq e^{\varepsilon}P(X = z_n).$$

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Si I ne contient aucun z_n ($n \in J$), alors les probabilités $P(X \in I)$ et $P(Y \in I)$

sont nulles et on a donc bien évidemment les inégalités souhaitées.

Sinon, notons K le sous-ensemble de J tel que $(X(\Omega) \cup Y(\Omega)) \cap I = \{z_n | n \in K\}$.

Il suffit alors de sommer les inégalités :

$$e^{-\varepsilon} \mathbb{P}(X = z_n) \leq \mathbb{P}(Y = z_n) \leq e^{\varepsilon} \mathbb{P}(X = z_n)$$

pour tout $n \in K$; on obtient :

$$e^{-\varepsilon} \underbrace{\sum_{n \in K} \mathbb{P}(X = z_n)}_{=\mathbb{P}(X \in I)} \leq \underbrace{\sum_{n \in K} \mathbb{P}(Y = z_n)}_{=\mathbb{P}(Y \in I)} \leq e^{\varepsilon} \underbrace{\sum_{n \in K} \mathbb{P}(X = z_n)}_{=\mathbb{P}(X \in I)}$$

et le couple (X, Y) est donc ε -différentiel.

8. (a) Clairement, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Déterminons $\mathbb{P}(Y = k)$:

— pour $k = 1$, on a $(Y = 1) = (X = 1) \cap (Z = 0)$ et par indépendance de X et Z :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Z = 0)) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1-p}{2}.$$

— pour $k \geq 2$, on a $(Y = k) = ((X = k) \cap (Z = 0)) \cup ((X = k-1) \cap (Z = 1))$, l'union étant disjointe puis par indépendance de X et Z :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Z = 0) + \mathbb{P}(X = k-1)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1-p}{2^k} + \frac{p}{2^{k-1}} = \frac{1+p}{2^k}.$$

On peut bien entendu vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1-p}{2} + (1+p) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1-p}{2} + (1+p) \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1-p+1+p}{2} = 1.$$

(b) Pour $k = 1$:

$$\frac{\mathbb{P}(Y = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\frac{1-p}{2}}{\frac{1}{2}} = 1-p \in \left[1-p, \frac{1}{1-p}\right].$$

Pour $k \geq 2$:

$$\frac{\mathbb{P}(Y = k)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{\frac{1+p}{2^k}}{\frac{1}{2^k}} = 1+p$$

Or :

$$1-p \leq 1+p \text{ (c'est clair)} \quad ; \quad 1+p \leq \frac{1}{1-p} \text{ car } (1+p)(1-p) = 1-p^2 \leq 1.$$

On a donc bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1-p \leq \frac{\mathbb{P}(Y = k)}{\mathbb{P}(X = k)} \leq \frac{1}{1-p}.$$

(c) On peut réécrire le résultat ci-dessus ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-(-\ln(1-p))} \leq \frac{\mathbb{P}(Y = k)}{\mathbb{P}(X = k)} \leq e^{-\ln(1-p)}$$

et on conclut avec la caractérisation de la propriété ε -différentiel pour les couples de variables aléatoires discrètes (question 7.) que (X, Y) est $-\ln(1-p)$ -différentiel.

(d)

9. (a) Soit I un intervalle de \mathbb{R} de bornes a et b , avec a réel ou $-\infty$, b réel ou $+\infty$, et $a < b$.

La croissance de l'intégrale appliquée sur I aux inégalités :

$$\forall t \in I, \quad e^{-\varepsilon} f(t) \leq g(t) \leq e^{\varepsilon} f(t)$$

s'écrit :

$$e^{-\varepsilon} \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{=\mathbb{P}(X \in I)} \leq \underbrace{\int_a^b g(t) dt}_{=\mathbb{P}(Y \in I)} \leq e^{\varepsilon} \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{=\mathbb{P}(X \in I)}.$$

Donc (X, Y) est ε -différentiel.

(b) Choisissons l'intervalle $I = [t, t+h]$ dans la définition de « (X, Y) est ε -différentiel » :

$$e^{-\varepsilon} \mathbb{P}(X \in [t, t+h]) \leq \mathbb{P}(Y \in [t, t+h]) \leq e^{\varepsilon} \mathbb{P}(X \in [t, t+h])$$

c'est-à-dire (en divisant par $h (> 0)$) :

$$e^{-\varepsilon} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \leq \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \leq e^{\varepsilon} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

Par passage à la limite quand h tend vers 0, les fonctions F et G étant dérivables (et même de classe \mathcal{C}^1) en t car f et g sont continues en t :

$$e^{-\varepsilon} F'(t) \leq G'(t) \leq e^{\varepsilon} F'(t)$$

c'est-à-dire :

$$e^{-\varepsilon} f(t) \leq g(t) \leq e^{\varepsilon} f(t).$$

10. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant paire, il suffit d'en montrer l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$:

— elle est intégrable sur le segment $[0, 1]$ car y est continue ;

— elle est continue et positive sur $[1, +\infty[$, au voisinage de $+\infty$ équivalente à $\frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale (de Riemann) converge, donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

- (b) La fonction f_a est clairement continue et positive. Elle est intégrable avec la même explication qu'en (a) et avec le changement de variable affine $u = \frac{t}{a}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) dt = \frac{1}{a\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{a\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} a du = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1.$$

Par conséquent, f_a est une densité de probabilité.

- (c) D'après la question 10. il suffit de prouver que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-\ln(a)} f(t) \leq g(t) \leq e^{\ln(a)} f(t)$$

c'est-à-dire (en simplifiant par π) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{a} \times \frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{a}{t^2 + a^2} \leq a \times \frac{1}{t^2 + 1}.$$

La seconde inégalité est claire ($t^2 + a^2 \geq t^2 + 1$); détaillons la première :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \times \frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{a}{t^2 + a^2} &\iff \frac{t^2 + a^2}{t^2 + 1} \leq a^2 \\ &\iff \frac{t^2 + a^2}{t^2 + 1} - a^2 \leq 0 \\ &\iff \frac{t^2 + a^2 - a^2 t^2 - a^2}{t^2 + 1} \leq 0 \\ &\iff \underbrace{\frac{(1 - a^2)t^2}{t^2 + 1}}_{\text{ce qui est vrai } (1 - a^2 < 0)} \leq 0. \end{aligned}$$

En conclusion, (X, Y) est $\ln(a)$ -différentiel.

11. (a) On a, en utilisant au dénominateur la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(U = 1), (U = 0)\}$:

$$\begin{aligned} P_{(Z \in I)}(U = 1) &= \frac{P((Z \in I) \cap (U = 1))}{P(Z \in I)} \\ &= \frac{P((X \in I) \cap (U = 1))}{P((Z \in I) \cap (U = 1)) + P((Z \in I) \cap (U = 0))} \\ &= \frac{P((X \in I) \cap (U = 1))}{P((X \in I) \cap (U = 1)) + P((Y \in I) \cap (U = 0))}. \end{aligned}$$

Par indépendance de U et X d'une part, U et Y d'autre part :

$$\begin{aligned} P_{(Z \in I)}(U = 1) &= \frac{P(X \in I)P(U = 1)}{P(X \in I)P(U = 1) + P(Y \in I)P(U = 0)} \\ &= \frac{pP(X \in I)}{pP(X \in I) + (1 - p)P(Y \in I)} \end{aligned}$$

- (b) Si ε est proche de 0, alors e^ε et $e^{-\varepsilon}$ sont proches de 1 et les deux nombres

$$\frac{p}{p + (1 - p)e^\varepsilon} \text{ et } \frac{p}{p + (1 - p)e^{-\varepsilon}}$$

sont donc proches de p ; avec l'encadrement établi en (a), la probabilité conditionnelle $P_{(Z \in I)}(U = 1)$ est donc proche de la probabilité $p = P(U = 1)$.

Par conséquent, la connaissance d'une information sur Z lorsque ε est petit change peu la probabilité d'en déduire la valeur prise par U .

12. (a) En choisissant une valeur au hasard dans $\llbracket 0, d \rrbracket$, la probabilité d'obtenir a_1 vaut $\frac{1}{d+1}$ (l'ensemble D contient $d+1$ éléments).

- (b) Si $q(a)$ est publique, alors on obtient a_1 ainsi :

$$a_1 = q(a) - a_2 - \dots - a_n.$$

13. (a) En écrivant :

$$(R = A_1) = \bigcup_{j=0}^d ((R = j) \cap (A_1 = j))$$

l'union étant disjointe, on a :

$$P(R = A_1) = \sum_{j=0}^d P((R = j) \cap (A_1 = j)).$$

Étant donnée la définition de R :

$$((R = j) \cap (A_1 = j)) = ((Y_j = j) \cap (A_1 = j))$$

d'où l'égalité demandée.

- (b) Par indépendance de Y_j et A_1 pour tout $j \in D$:

$$\begin{aligned} P(R = A_1) &= \sum_{j=0}^d P(Y_j = j) \times \underbrace{P(A_1 = j)}_{= \frac{1}{d+1} \text{ d'après 12.(a)}} = \frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^d P(Y_j = j). \end{aligned}$$

- (c) Pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, les n -uplets (j, a_2, \dots, a_n) et $(0, a_2, \dots, a_n)$ étant voisins (seule la première composante diffère), d'après l'hypothèse (c2) de l'énoncé le couple (Y_j, Y_0) est ε -différentiel :

$$\text{pour tout } I \text{ intervalle de } \mathbb{R}, \underbrace{e^{-\varepsilon} P(Y_j \in I) \leq P(Y_0 \in I) \leq e^\varepsilon P(Y_j \in I)}_{(*)}$$

Écrivons pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, l'inégalité $(*)$ avec l'intervalle $I = I_j$:

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, e^{-\varepsilon} P(Y_j \in I_j) \leq P(Y_0 \in I_j)$$

et sommons ces inégalités membre à membre pour $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\sum_{j=1}^d e^{-\varepsilon} \mathbb{P}(Y_j \in I_j) \leq \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(Y_0 \in I_j)$$

soit encore, en multipliant chaque membre par e^ε et en ajoutant à chaque membre $\mathbb{P}(Y_0 \in I_0)$:

$$\sum_{j=0}^d \mathbb{P}(Y_j \in I_j) \leq \left(\underbrace{e^\varepsilon \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(Y_0 \in I_j)}_{=1 - \mathbb{P}(Y_0 \in I_0)} \right) + \mathbb{P}(Y_0 \in I_0).$$

On en déduit :

$$\underbrace{\frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^d \mathbb{P}(Y_j \in I_j)}_{=\theta} \leq \frac{1}{d+1} (e^\varepsilon - (e^\varepsilon - 1) \mathbb{P}(Y_0 \in I_0)).$$

La deuxième inégalité demandé est claire car $-(e^\varepsilon - 1) \mathbb{P}(Y_0 \in I_0) < 0$ ($\varepsilon > 0$).

En conclusion :

$$\theta \leq \frac{1}{d+1} (e^\varepsilon - (e^\varepsilon - 1) \mathbb{P}(Y_0 \in I_0)) \leq \frac{e^\varepsilon}{d+1}.$$

(d) On déduit de l'inégalité $\theta \leq \frac{e^\varepsilon}{d+1}$ que :

$$\tau = \frac{\theta - \rho}{\rho} \leq \frac{\frac{e^\varepsilon}{d+1} - \frac{1}{d+1}}{\frac{1}{d+1}} = e^\varepsilon - 1.$$

Lorsque ε est proche de 0, ce majorant est proche de 0, c'est-à-dire que la probabilité $\mathbb{P}(R = A_1)$ est majorée par un nombre proche de $\frac{1}{d+1}$, qui est la probabilité d'obtenir la bonne valeur de a_1 en choisissant un entier au hasard de D . La méthode de confidentialité n'augmentera donc que peu (d'autant peu que ε est proche de 0) la probabilité d'obtenir la bonne valeur de a par rapport à un choix aléatoire.

14. (a) D'après 3.(a), la variable X_a suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(q(a), \beta)$.
Donc $\mathbb{E}(X_a) = q(a)$ et une densité de X_a est donnée par :

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t - q(a)|}{\beta}\right). \end{cases}$$

(b) D'après l'inégalité triangulaire renversée, on a pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$|t - q(b)| - |t - q(a)| \leq |(t - q(a)) - (t - q(b))| = |q(b) - q(a)| \leq \delta$$

donc :

$$-|t - q(a)| \leq \delta - |t - q(b)| \quad \text{d'où} \quad -\frac{|t - q(a)|}{\beta} \leq \frac{\delta}{\beta} - \frac{|t - q(b)|}{\beta}.$$

Par croissance de l'exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{|t - q(a)|}{\beta}\right) \leq \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{|t - q(b)|}{\beta}\right)$$

et en multipliant par $\frac{1}{2\beta}$ (> 0) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathcal{V}, f_a(t) \leq \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_b(t).$$

Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathcal{V}$, on a donc :

$$f_a(t) \leq \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_b(t) \quad \text{et} \quad f_b(t) \leq \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_a(t)$$

soit :

$$\exp\left(-\frac{\delta}{\beta}\right) f_b(t) \leq f_a(t) \leq \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_b(t)$$

ce qui prouve, avec la question 9., que le couple (X_a, X_b) est $\frac{\delta}{\beta}$ -différentiel.

- (c) Pour tout $a \in D$, on dispose d'une variable aléatoire X_a d'espérance $q(a)$ (propriétés (c1) et (c3)).

Si $\varepsilon = \frac{\delta}{\beta}$, alors pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, le couple (X_a, X_b) est ε -différentiel (propriété (c2)).

On obtient donc un procédé de ε -confidentialité de D^n pour q en prenant par exemple $\beta = \frac{\delta}{\varepsilon}$.

15. (a) Soient a et b éléments voisins de D , c'est-à-dire que a et b diffèrent d'au plus une composante :

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}, a_i = b_i.$$

Alors :

$$q(a) - q(b) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = a_{i_0} - b_{i_0} \in \llbracket -d, d \rrbracket$$

(différence de deux entiers compris entre 0 et d).

On a donc l'inégalité :

$$|q(a) - q(b)| \leq d$$

qui est atteinte (pour $a_{i_0} = 0$ et $b_{i_0} = d$ par exemple).

On en déduit :

$$\delta = \max_{(a,b) \in \mathcal{V}} (|q(a) - q(b)|) = d.$$

(b) Si $X_a \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right]$ avec $k \in \llbracket 1, nd - 1 \rrbracket$, alors $X_a + \frac{1}{2} \in [k, k + 1[$ donc :

$$\left\lfloor X_a + \frac{1}{2} \right\rfloor = k = Z_a.$$

Les deux autres cas sont évidents.

(c) Les question 14. et 15.(a) nous donnent :

$$\forall a \in D, X_a = q(a) + Y \quad \text{avec } Y \hookrightarrow \mathcal{L}\left(0, \frac{d}{\varepsilon}\right).$$

On utilise bien entendu la question 5. pour générer Y :

```
d = input('d=')
n = input('n=')
eps = input('epsilon=')

a = grand(1,n,'uin',0,d)
disp(sum(a),'q(a)=')
X = sum(a)+Laplace(0,d/eps)

if X < 1/2 then
    Z = 0
else
    if X < n*d-1/2 then
        Z = int(X+1/2)
    else
        Z = n*d
    end
end

disp(Z,'Z_a=')
```

(d) On reprend le script précédent, sans les affichages de $q(a)$ et Z_a , en calculant la moyenne des nombres $\frac{|Z_a - q(a)|}{q(a)}$ pour 10000 (par exemple) valeurs de a générées aléatoirement.

```
d = 4
n = 1000
eps = input('epsilon=')

M = 0
for i = 1:10000
    a = grand(1,n,'uin',0,d)
    X = sum(a)+Laplace(0,d/eps)

    if X < 1/2 then
        Z = 0
    else
        if X < n*d-1/2 then
            Z = int(X+1/2)
        else
            Z = n*d
        end
    end
    M = M + abs(Z-sum(a))/sum(a)
end
disp(M/10000)
```