

1. La fonction F_X étant bijective de I_X dans $]0, 1[$, le réel $\beta \in]0, 1[$ admet par F_X un unique antécédent $v \in I_X$.

Comme F_X est continue et strictement monotone sur I_X , cet intervalle est ouvert (de même forme que $]0, 1[$), donc contient un intervalle ouvert centré en v :

$$\exists \varepsilon > 0,]v - \varepsilon, v + \varepsilon[\subset I_X$$

et on a alors :

$$\forall w \in \mathbb{R} \setminus I_X, f(w) \notin]F_X(v - \varepsilon), F_X(v + \varepsilon)[\text{ donc } F_X(w) \neq \beta$$

$$\text{(par exemple, si } w \leq v - \varepsilon \text{ alors } \underbrace{F_X(w) \leq F_X(v - \varepsilon)}_{F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R}} < \underbrace{F_X(v) = \beta}_{F_X \text{ est strictement croissante sur } I_X})$$

ce qui prouve l'unicité de l'antécédent de β par F_X sur \mathbb{R} .

$$2. \text{ (a) Pour tout } x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (b) La variable aléatoire X est dans \mathcal{D} car elle admet une espérance et sa fonction de répartition F_X réalise une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de $I_X =]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

Déterminons G_X :

$$y = F_X(x) \iff y = 1 - e^{-\lambda x} \iff e^{-\lambda x} = 1 - y \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$$

$$\text{d'où : } r_\beta(X) = G_X(\beta) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \beta).$$

3. (a) i. Comme Φ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , avec $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = 1$, elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\underbrace{\frac{X - m}{\sigma}}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

- iii. Suivant une loi normale, X est à densité et admet une espérance. Comme composée des fonctions

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x - m}{\sigma} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$$

bijectives, strictement croissantes et de classe \mathcal{C}^1 , la fonction de répartition de X vérifie ces mêmes propriétés (avec $I_X = \mathbb{R}$).

On en déduit que $X \in \mathcal{D}$ et :

$$y = F_X(x) \iff y = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \iff x = m + \sigma\Phi^{-1}(y)$$

$$\text{d'où : } r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta).$$

- (b) Par stabilité additive de la loi normale, les variables X et Y étant indépendantes :

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2 + s^2).$$

Les calculs faits en 3.(a) appliqué à la variable $X + Y$ donnent :

$$r_\beta(X + Y) = m + \mu + \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta)$$

- (c) On a :

$$\begin{aligned} r_\beta(X + Y) \leq r_\beta(X) + r_\beta(Y) &\iff m + \mu + \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta) \\ &\leq (m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)) + (\mu + s\Phi^{-1}(\beta)) \\ &\iff \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta) \leq (\sigma + s)\Phi^{-1}(\beta) \quad (\star) \end{aligned}$$

— Si $\Phi^{-1}(\beta) > 0$ (c'est-à-dire $\beta > \frac{1}{2}$), alors :

$$(\star) \iff \sqrt{\sigma^2 + s^2} \leq \sigma + s \iff \sigma^2 + s^2 \leq \underbrace{(\sigma + s)^2}_{=\sigma^2 + s^2 + 2\sigma s}$$

et cette dernière inégalité est vraie (elle est même stricte).

— Si $\Phi^{-1}(\beta) = 0$ (c'est-à-dire $\beta = \frac{1}{2}$), l'inégalité (\star) est vraie (c'est une égalité).

— Sinon :

$$(\star) \iff \sqrt{\sigma^2 + s^2} \geq \sigma + s$$

ce qui n'est jamais vrai.

En résumé :

$$r_\beta(X + Y) \leq r_\beta(X) + r_\beta(Y) \iff \beta \geq \frac{1}{2}.$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq x - c) = F_X(x - c)$$

Par définition de la valeur à risque, on a :

— d'une part : $\beta = F_X(r_\beta(X))$;

— d'autre part : $\beta = F_Y(r_\beta(Y)) = F_X(r_\beta(Y) - c)$.

D'où :

$$F_X(r_\beta(X)) = F_X(r_\beta(Y) - c) \quad (= \beta)$$

et par la question 1. (unicité de l'antécédent de β par F_X) :

$$r_\beta(X) = r_\beta(Y) - c$$

d'où l'égalité demandée.

(b) De la même manière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{\lambda}\right) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

et on a donc :

$$F_X(r_\beta(X)) = \beta = F_Z(r_\beta(Z)) = F_X\left(\frac{r_\beta(Z)}{\lambda}\right)$$

et on en déduit, comme en (a) :

$$r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X).$$

5. (a) L'inclusion $(Y \leq x) \subset (X \leq x)$ nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) \leq P(X \leq x) = F_X(x).$$

(b) On a :

$$\underbrace{F_X(r_\beta(X)) = \beta}_{\text{par définition de la VaR}} = \underbrace{F_Y(r_\beta(Y))}_{\text{d'après 5.(a)}} \leq F_X(r_\beta(Y))$$

Comme F_X est croissante :

$$r_\beta(X) \leq r_\beta(Y).$$

6. Les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes et de même loi que X , la variable $N_{x,n}$ compte le nombre de succès ($X \leq x$) dans la répétition indépendantes de n expériences :

$$N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x)).$$

On a donc :

$$E(N_{x,n}) = nF_X(x) \quad \text{et} \quad V(N_{x,n}) = nF_X(x)(1 - F_X(x))$$

7. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(|N_{x,n} - \underbrace{nF_X(x)}_{=E(N_{x,n})}| \geq n\varepsilon\right) \\ &\leq \frac{V(N_{x,n})}{(n\varepsilon)^2} = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{F_X(x)(1 - F_X(x))}{\varepsilon^2}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}. \end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement :

$$P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

8. (a) Pour tout $\omega \in \Omega$, les réels $X_{1,1}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega)$ étant classés dans l'ordre croissant :

$$X_{1,1}(\omega) \leq \dots \leq X_{k,n}(\omega) \leq \dots \leq X_{n,n}(\omega)$$

qu'au moins k de ces nombres soient inférieurs ou égaux à x signifie exactement que les k plus petits d'entre eux sont inférieurs ou égaux à x :

$$N_{x,n}(\omega) \geq k \iff (\forall i \in \{1, \dots, k\}, X_{i,n}(\omega) \leq x) \iff X_{k,n}(\omega) \leq x.$$

(b) Sachant que $N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))$, on a donc pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$P(X_{k,n} \leq x) = P(N_{x,n} \geq k) = \sum_{r=k}^n P(N_{x,n} = r) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}.$$

Comme X est une variable aléatoire à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.

Il en est donc de même de la fonction de répartition de $X_{k,n}$:

$$F_{X_{k,n}} : x \mapsto \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

(puisque $F_{X_{k,n}} = P \circ F_X$ avec $P : y \mapsto \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} y^r (1 - y)^{n-r}$; P est polynomiale

donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}), ce qui prouve que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

9. (a) — Si $t > c$, en écrivant :

$$(U_n \geq t) = (U_n - c \geq t - c) \subset (|U_n - c| \geq t - c)$$

et en utilisant l'hypothèse avec $\varepsilon = t - c > 0$, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{P}(U_n \geq t) \leq \underbrace{\mathbb{P}(|U_n - c| \geq t - c)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

d'où par le théorème d'encadrement :

$$\mathbb{P}(U_n \geq t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

— Si $t < c$, en écrivant :

$$(U_n < t) = (U_n - c < \underbrace{t - c}_{\leq 0}) \subset (|U_n - c| > c - t)$$

et en utilisant l'hypothèse avec $\varepsilon = c - t > 0$, on obtient comme précédemment :

$$\mathbb{P}(U_n < t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'où :

$$\mathbb{P}(U_n \geq t) = 1 - \mathbb{P}(U_n < t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

(b) Par définition de la limite de u :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \quad (\star)$$

donc notamment :

$$\forall n \geq N, -(u_n - \ell) \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geq N, u_n \geq \ell - \varepsilon = c + \varepsilon.$$

Par conséquent, d'après (a) avec $t = c + \varepsilon > c$:

$$\forall n \geq N, 0 \leq \mathbb{P}(U_n \geq u_n) \leq \underbrace{\mathbb{P}(U_n \geq c + \varepsilon)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

et par le théorème d'encadrement :

$$\mathbb{P}(U_n \geq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

(c) En déduisant de (\star) que :

$$\forall n \geq N, u_n - \ell \leq \varepsilon$$

et en posant $\varepsilon = \frac{c - \ell}{2}$ (on remarque alors que $\ell + \varepsilon = c - \varepsilon$) :

$$\forall n \geq N, u_n \leq \varepsilon + \ell = c - \varepsilon.$$

On utilise alors la question (a) avec $t = c - \varepsilon < c$:

$$\forall n \geq N, 1 \geq \mathbb{P}(U_n \geq u_n) \leq \underbrace{\mathbb{P}(U_n \geq c - \varepsilon)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$$

et on conclut comme précédemment avec le théorème d'encadrement :

$$\mathbb{P}(U_n \geq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

10. (a) En écrivant

$$|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon \iff \theta' - \varepsilon \leq Y_n \leq \theta' + \varepsilon$$

on a :

$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \leq \theta' + \varepsilon) - \underbrace{\mathbb{P}(Y_n < \theta' - \varepsilon)}_{\substack{= \mathbb{P}(Y_n \leq \theta' - \varepsilon) \\ \text{car } Y_n \text{ est à densité}}}$$

(b) D'après 8.(a) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leq \theta' + \varepsilon) - \mathbb{P}(X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leq \theta' - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(N_{\theta' + \varepsilon, n} \geq \lfloor n\beta \rfloor) - \mathbb{P}(N_{\theta' - \varepsilon, n} \geq \lfloor n\beta \rfloor) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{N_{\theta' + \varepsilon, n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{N_{\theta' - \varepsilon, n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) \end{aligned}$$

(c) — Considérons la suite de variables $U = \left(\frac{N_{\theta' + \varepsilon, n}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, le réel $c = F_X(\theta' + \varepsilon)$ et

la suite réelle $u = \left(\frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$; cette dernière converge vers $\ell = \beta$ puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n\beta - 1}{n} \leq u_n \leq \beta$$

et par le théorème d'encadrement.

Comme F_X est strictement croissante sur I_X , intervalle **ouvert** (car $F_X : I_X \rightarrow]0, 1[$ est continue et strictement monotone) contenant θ' , et contenant donc aussi un réel $\mu \in]\theta', \theta' + \varepsilon[$, on a :

$$c = F_X(\theta' + \varepsilon) \geq F_X(\mu) > F_X(\theta') = F_X(r_\beta(X)) = \beta = \ell$$

(On ne peut pas dire que $\theta' + \varepsilon \in I_X$ d'où l'intervention de ce réel μ .)

D'après la question 9.(c) :

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_{\theta' + \varepsilon, n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

— De même, avec $U = \left(\frac{N_{\theta' - \varepsilon, n}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $c = F_X(\theta' - \varepsilon)$ et $u = \left(\frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
On a alors en raisonnant comme précédemment $c < \ell$, et la question 9.(b) donne :

$$P \left(\frac{N_{\theta' - \varepsilon, n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \right)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0.$$

— On déduit alors de ces deux limites et de l'égalité montrée en (b) que :

$$P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 0 = 1.$$

Par conséquent, Y_n est un estimateur convergent de $\theta' = r_\beta(X)$.

11.

```
function r = VaR(X,beta)
    R = triCroissant(X);
    // En fait, cette fonction existe en Scilab :
    // R = gsort(X,'c','i');
    n = size(X, 'c');
    r = R(floor(n*beta));
endfunction
```

12. L'espérance étant linéaire, les propriétés (R_1) , (R_2) et (R_4) sont vérifiées (avec égalité dans (R_4)). Par croissance de l'espérance, la propriété (R_3) est vérifiée.

Ainsi, E est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .

13. La VaR r_β vérifie les propriétés (R_1) (d'après 4.(a)), (R_2) (d'après 4.(b)) et (R_3) (d'après 5.). Mais d'après 3.(c), la propriété (R_4) n'est pas vérifiée pour $\beta < \frac{1}{2}$.

Par conséquent, r_β n'est pas une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} pour toute valeur de $\beta \in]0, 1[$.

(La question 3.(c) ne permet pas d'affirmer que r_β vérifie (R_4) lorsque $\beta \geq \frac{1}{2}$ car seul le cas des variables aléatoires suivant une loi normale y a été traité.)

14. (a) — Par définition de \mathcal{D} , la variable X admet une espérance, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ converge absolument; il en est donc de même de l'intégrale $\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x) dx$

De plus, deux densités de X ne diffèrent qu'en un nombre fini de points et on ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant un nombre fini de valeurs de la fonction intégrée.

Ceci prouve que $ES_\beta(X)$ est bien définie.

— Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X) f_X(x) dx = r_\beta(X) \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x) dx$$

Or :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 - F_X(r_\beta(X)) = 1 - \beta.$$

Par conséquent :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \frac{1}{1-\beta} \times r_\beta(X) \times (1-\beta) = r_\beta(X).$$

(b) Le changement de variable $t = F_X(x)$ n'étant pas affine, nous allons l'appliquer sur un segment :

$$\forall A > 0, \int_{r_\beta(X)}^A x f_X(x) dx = \int_{F_X(r_\beta(X))}^{F_X(A)} \overbrace{G_X(t)}^x \underbrace{f_X(x)}_{dt} dx = \int_{\beta}^{F_X(A)} G_X(t) dt$$

et comme $F_X(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$:

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 G_X(t) dt.$$

15. (a) Soit $c \in \mathbb{R}$. D'après la question 4.(a), $X + c \in \mathcal{D}$ et $r_\beta(X + c) = r_\beta(X) + c$.
On a de plus vérifié que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{X+c}(x) = F_X(x - c)$$

donc la fonction $f_{X+c} : x \mapsto f_X(x - c)$ est une densité de $X + c$.

D'où :

$$ES_\beta(X + c) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X+c)}^{+\infty} x f_{X+c}(x) dx = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)+c}^{+\infty} x f_X(x - c) dx$$

Avec le changement de variable affine $y = x - c$ (donc $dy = dx$) :

$$\begin{aligned} ES_\beta(X + c) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} (y + c) f_X(y) dy \\ &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} y f_X(y) dy + \frac{c}{1-\beta} \underbrace{\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(y) dy}_{=1-\beta} \\ &= ES_\beta(X) + c \end{aligned}$$

Par conséquent, ES_β vérifie la propriété (R_1) .

- (b) Soit $\lambda > 0$. D'après la question 4.(b), $\lambda X \in \mathcal{D}$ et $r_\beta(\lambda X) = \lambda r_\beta(X)$.
On avait d'ailleurs montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\lambda X}(x) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

et la fonction $f_{\lambda X} : x \mapsto f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est donc une densité de λX .

D'où :

$$ES_\beta(\lambda X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(\lambda X)}^{+\infty} f_{\lambda X}(x) dx = \frac{1}{1-\beta} \int_{\lambda r_\beta(X)}^{+\infty} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx.$$

Avec le changement de variable affine $y = \frac{x}{\lambda}$ (donc $dy = \frac{dx}{\lambda}$) :

$$ES_\beta(\lambda X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(y) \lambda dy = \frac{\lambda}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(y) dy = \lambda ES_\beta(X).$$

Par conséquent, ES_β vérifie la propriété (R_2) .

16. (a) Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, la VaR $r_\beta(X)$ est positive :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

En posant $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$, on définit deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[r_\beta(X), A]$ où $A > r_\beta(X)$, et la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{r_\beta(X)}^A x \times \lambda e^{-\lambda x} dx &= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_{r_\beta(X)}^A - \int_{r_\beta(X)}^A -e^{-\lambda x} dx \\ &= -A e^{-\lambda A} + r_\beta(X) e^{-\lambda r_\beta(X)} - \frac{1}{\lambda} \left[e^{-\lambda x} \right]_{r_\beta(X)}^A \\ &= - \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \underbrace{A e^{-\lambda A}}_{\rightarrow A \rightarrow +\infty 0} + e^{-\lambda r_\beta(X)} \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Avec le calcul fait en question 2.(b) : $r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$, on a :

$$e^{-\lambda r_\beta(X)} = e^{\ln(1-\beta)} = 1 - \beta$$

d'où :

$$\int_{r_\beta(X)}^A x \times \lambda e^{-\lambda x} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} (1-\beta) \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

et par conséquent :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \times (1-\beta) \left(r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \right) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}.$$

- (b) Puisque $r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1^-} +\infty$ (par composition de limites, avec $\lim_{0^+} \ln = -\infty$), on a :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda} \underset{\beta \rightarrow 1^-}{\sim} r_\beta(X).$$

17. (a) D'après 3.(a)iii., $r_\beta(X) = \underbrace{m}_{=0} + \underbrace{\sigma}_{=1} \Phi^{-1}(\beta) = \Phi^{-1}(\beta)$ (*), donc :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\Phi^{-1}(\beta)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\beta)} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{\Phi^{-1}(\beta)}^A$$

Comme $e^{-\frac{A^2}{2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$:

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\beta)} \exp\left(-\frac{(\Phi^{-1}(\beta))^2}{2}\right) = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\beta))}{1-\beta} = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\beta))}{1-\Phi(r_\beta(X))}.$$

- (b) Pour tout $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \underbrace{t e^{-\frac{t^2}{2}}}_{=u'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{t}}_{=v(t)} dt$$

Les fonctions $u : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[x, A]$ avec $A > x$; la formule d'intégration par parties donne :

$$\int_x^A t e^{-\frac{t^2}{2}} \times \frac{1}{t} dt = \left[-\frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_x^A - \int_x^A \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

d'où par passage à la limite (avec $\frac{1}{A} e^{-\frac{A^2}{2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$) :

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

- (c) La positivité et la croissance de l'intégrale donnent :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x^2} dt = \frac{1}{x^2} \underbrace{\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt}_{1-\Phi(x)}.$$

On a donc :

$$0 \leq \frac{\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt}{1-\Phi(x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

donc par le théorème d'encadrement :

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (1 - \Phi(x))$$

En utilisant la question (b) :

$$\frac{\varphi(x)}{x} = 1 - \Phi(x) + \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \Phi(x).$$

(en effet : $f = o(g) \iff (f+g) - g = o(g) \iff f+g \sim g$).

(d) Comme $r_\beta(X) = \Phi^{-1}(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1^-} +\infty$, la question (c) donne :

$$1 - \Phi(r_\beta(X)) \underset{\beta \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)} \quad \text{donc} \quad r_\beta(X) \underset{\beta \rightarrow 1^-}{\sim} \underbrace{\frac{\varphi(r_\beta(X))}{1 - \Phi(r_\beta(X))}}_{\text{d'après (a)}} = ES_\beta(X).$$

18. (a) Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale obtenue, le théorème de transfert avec la fonction $t \mapsto h(t - r_\beta(X))$ continue sur \mathbb{R} , s'écrit :

$$\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)) f_X(t) dt$$

$$\text{Or, } h(t - r_\beta(X)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq r_\beta(X) \\ t - r_\beta(X) & \text{sinon} \end{cases}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) &= \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} (t - r_\beta(X)) f_X(t) dt \\ &= \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) dt - r_\beta(X) \underbrace{\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(t) dt}_{=1 - F_X(r_\beta(X)) = 1 - \beta} \\ &= \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) dt - (1 - \beta) r_\beta(X) \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale étant égale à $(1 - \beta) ES_\beta(X)$, la convergence absolue est vérifiée.

(b) On a donc :

$$\mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) = (1 - \beta) (ES_\beta(X) - r_\beta(X))$$

donc :

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))).$$

```
function y = ES(X,beta)
    r = VaR(X,beta)
    n = size(X, 'c');
    for k = 1:n
        if X(k)<r
            Y(k) = 0
        else
            Y(k) = X(k)-r
        end
    end
    y = r+1/(1-beta)*mean(Y)
endfunction
```

19.

Le programme suivant permet alors de représenter les fonctions

$$\beta \in]0, 1[\mapsto r_\beta(X) \quad \text{et} \quad \beta \in]0, 1[\mapsto ES_\beta(X)$$

```
X = grand(1,10000, ..... )
r = zeros(1,100)
y = zeros(1,100)
beta = linspace(0.01,0.99,100)
for k=1:100
    r(k) = VaR(X,beta(k))
    y(k) = ES(X,beta(k))
end
plot(beta,r)
plot(beta,y,'r')
```

20. (a) L'égalité est claire lorsque l'on écrit les définitions de h et de la fonction indicatrice.

(b) Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{X > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\underbrace{(X - r_\beta(X))\mathbb{1}_{X > r_\beta(X)}}_{=h(X - r_\beta(X)) \text{ d'après (a)}}\right) - (1 - \beta)\mathbb{E}\left((X - r_\beta(X))Z\right) \\ &= \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) - (1 - \beta)\mathbb{E}(XZ) + (1 - \beta)r_\beta(X) \underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{=1} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}\left((X - r_\beta(X))(\mathbb{1}_{X > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z)\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}(h(X - r_\beta(X))) + r_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ)}_{=ES_\beta(X) \text{ d'après 18.(b)}} \end{aligned}$$

(c) D'après l'énoncé, $0 \leq (1 - \beta)Z \leq 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$:

— Si $X(\omega) > r_\beta(X)$ alors :

$$\mathbf{1}_{X(\omega) > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z(\omega) = 1 - (1 - \beta)Z(\omega) = \beta Z(\omega) \geq 0$$

donc

$$\underbrace{(X(\omega) - r_\beta(X))}_{>0} \underbrace{(\mathbf{1}_{X(\omega) > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z(\omega))}_{\geq 0} \geq 0$$

— Si $X(\omega) \leq r_\beta(X)$ alors :

$$\mathbf{1}_{X(\omega) > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z(\omega) \leq 0$$

donc

$$\underbrace{(X(\omega) - r_\beta(X))}_{\leq 0} \underbrace{(\mathbf{1}_{X(\omega) > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z(\omega))}_{\leq 0} \geq 0$$

La variable $(X - r_\beta(X))(\mathbf{1}_{X > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z)$ étant positive, son espérance l'est aussi et on déduit de la question précédente que :

$$ES_\beta(X) - E(XZ) \geq 0.$$

Puisque la variable ci-dessus est positive, l'égalité précédente a lieu lorsque cette variable est nulle ; X n'étant pas certaine (car à densité), cela revient à dire que la variable $\mathbf{1}_{X > r_\beta(X)} - (1 - \beta)Z$ est nulle, c'est-à-dire lorsque Z est la variable :

$$Z_0 = \frac{1}{1 - \beta} \mathbf{1}_{X > r_\beta(X)}.$$

Cette variable vérifie bien les conditions de l'énoncé :

$$\text{— } E(Z_0) = \frac{1}{1 - \beta} E(\mathbf{1}_{X > r_\beta(X)}) = \frac{1}{1 - \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{x > r_\beta(X)} f_X(x) dx =$$

$$\frac{1}{1 - \beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{1 - \beta} (1 - F_X(r_\beta(X))) = 1;$$

$$\text{— Comme } \mathbf{1}_{X > r_\beta(X)}(\Omega) = \{0, 1\}, \text{ on a : } 0 \leq Z_0 \leq \frac{1}{1 - \beta}.$$

21. La question 20. donne :

$$\forall Z \in \mathcal{K}, E(XZ) \leq ES_\beta(X)$$

donc $ES_\beta(X)$ est un majorant de $\{E(XZ) | Z \in \mathcal{K}\}$, et ce majorant est atteint avec $Z = Z_0$.

Par conséquent :

$$ES_\beta(X) = \max_{Z \in \mathcal{K}} E(XZ).$$

22. Les points (R_1) et (R_2) ont été prouvés en question 15.

— Soient $X, Y \in \mathcal{D}$ telles que $X \leq Y$. Alors :

$$\forall Z \in \mathcal{K}, XZ \leq YZ \text{ (car } Z \geq 0), \text{ donc } E(XZ) \leq E(YZ)$$

et on a donc :

$$ES_\beta(X) = \max_{Z \in \mathcal{K}} E(XZ) \leq \max_{Z \in \mathcal{K}} E(YZ) = ES_\beta(Y).$$

Par conséquent, ES_β vérifie la propriété (R_3) .

— Soient $X, Y \in \mathcal{D}$ telles que $X + Y \in \mathcal{D}$. Par linéarité de l'espérance :

$$\forall Z \in \mathcal{K}, E((X + Y)Z) = E(XZ) + E(YZ)$$

donc

$$ES_\beta(X + Y) = \max_{Z \in \mathcal{K}} E(X + Y) \leq \max_{Z \in \mathcal{K}} (E(XZ) + E(YZ)) = \underbrace{\max_{Z \in \mathcal{K}} E(XZ)}_{=ES_\beta(X)} + \underbrace{\max_{Z \in \mathcal{K}} E(YZ)}_{=ES_\beta(Y)}.$$

Par conséquent, ES_β vérifie la propriété (R_4) .