ESSEC I 2015 Corrigé

I Mise en place du problème

1. L'hypothèse $v > k + c$ signifie que chaque produit est vendu plus cher que ce qu'il coûte, ce qui semble naturel puisque le but est de faire du bénéfice, et non de vendre à perte.

II Optimisation du bénéfice moyen sur une période

II.A Cas continu

2. **Étude d'une fonction**

(a) Pour tout $x \geqslant 0$, on a : $R(x) = 1 - \mathbf{P}(D \leqslant x)$. Or, D est une variable aléatoire à densité, donc sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que R est continue sur $[0; +\infty[$.

De plus, comme f est continue sur $]0; +\infty[$, on en déduit que la fonction de répartition de D (et donc aussi la fonction R) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. On a alors, pour tout $x > 0$: $R'(x) = -f(x)$ et donc $R'(x) < 0$. On en déduit que R est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, R est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, R réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} R(x); R(0)\right]$. Or, $R(0) = 1 - \mathbf{P}(D \leqslant 0) = 1$ ($\mathbf{P}(D \leqslant 0) = 0$ puisque f est nulle sur $]-\infty; 0]$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$ (car $R(x) = 1 - \mathbf{P}(D \leqslant x)$ et la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle tend toujours vers 1 en $+\infty$).

$\boxed{\text{Conclusion : } R \text{ réalise bien une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1].}$

(b) La fonction R est continue sur $[0; +\infty[$ (voir question précédente). Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x R(t)dt$ (qui est la primitive de R qui s'annule en 0) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ (et donc dérivable) sur } [0; +\infty[\text{. De plus, pour tout } x \geqslant 0, \text{ on a : } \varphi'(x) = vR(x) - (k + c).}$

(c) On étudie le signe de $\varphi'(x)$. Pour cela, on résout :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) > 0 &\iff vR(x) - (k + c) > 0 \\
&\iff R(x) > \frac{k + c}{v} \\
&\iff R(x) > R(S) \\
&\iff x < S \quad \text{(stricte décroisance de } R\text{)}
\end{aligned}$$

De même : $\varphi'(x) < 0$ si et seulement si $x > S$ et $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = S$. D'où le tableau de variations de φ :

x	0		S		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\varphi(S)$	$\searrow$	

(d) D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; S[$, on a $\varphi(x) < \varphi(S)$ par stricte croissance de φ sur $[0; S]$. Et, pour tout $x \in]S; +\infty[$, on a $\varphi(x) < \varphi(S)$ par stricte décroissance de φ sur $[S; +\infty[$. Donc finalement, $\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ positif et différent de } S, \text{ on a } \varphi(x) < \varphi(S)}$.

3. **Calcul approché de S avec Scilab**

(a) On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\right) &= \mathbf{P}\left(R(X) \leqslant R(S)\right) \\
&= \mathbf{P}(X \geqslant S) \quad \text{(stricte décroisance de } R\text{)} \\
&= 1 - \mathbf{P}(X < S) \\
&= 1 - \mathbf{P}(X \leqslant S) \quad (X \text{ est une variable aléatoire à densité})
\end{aligned}$$

Or, X suit une loi exponentielle de paramètre 1 et $S \geqslant 0$. Donc $\mathbf{P}(X \leqslant S) = 1 - e^{-S}$, ce qui donne bien : $\boxed{\mathbf{P}\left(R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\right) = e^{-S}}$.

(b) D'après la question précédente, on a $S = -\ln\left[\mathbf{P}\left(R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\right)\right]$. Pour obtenir une valeur approchée de S, il suffit donc de faire des simulations pour estimer la probabilité $\mathbf{P}\left(R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\right)$ et d'afficher l'opposé du logarithme de cette estimation. D'où le programme complété :

```
k=input('k=') ; c=input('c=') ; v=input('v=') ;

compt = 0;

for i=1:1000 do
    X=grand(1,1,"exp",1)
    if R(X)<=(k+c)/v
        compt = compt+1;
    end
end

disp('S='); disp(-log(compt/1000));
```

4. **Espérance de vente**

(a) Si la quantité disponible est suffisante pour satisfaire à toute la demande (i.e si $q \geqslant D$), alors la quantité vendue correspond à la demande (i.e $V = D$). Par contre, si la demande est trop importante (i.e si $q < D$), alors on se contente de vendre toute la quantité disponible (i.e $V = q$). Dans tous les cas, on a $\boxed{V = \min(D, q)}$.

(b) i. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant q \\ q & \text{si } x > q \end{cases}$.

On en déduit que g est continue sur $]-\infty; q[$ et sur $]q; +\infty[$.

De plus, on a immédiatement : $g(x) \underset{x \to q^-}{\longrightarrow} q$ et $g(x) \underset{x \to q^+}{\longrightarrow} q$, c'est-à-dire $g(x) \underset{x \to q^-}{\longrightarrow} g(q)$ et $g(x) \underset{x \to q^+}{\longrightarrow} g(q)$. Ce qui prouve que g est également continue en q.

$\boxed{\text{Conclusion : La fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

ii. La fonction f est continue sur $]0; q]$. Donc l'éventuel problème concernant la convergence de l'intégrale se situe en 0. Or, pour tout $x \in]0; 1]$, on a $0 \leqslant xf(x) \leqslant f(x)$, et l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente (f est une densité de probabilité). Par critère de comparaison pour des fonctions continues et positives, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 xf(x)dx$ est convergente. Comme l'intégrale $\int_1^q xf(x)dx$ est convergente également (il n'y a pas de problème : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), on en déduit, par relation de Chasles que l'intégrale $\boxed{\int_0^q xf(x)dx \text{ est convergente}}$.

iii. D'après la question 4.(a), on a $V = g(D)$. D'après le théorème du transfert, pour montrer que V admet une espérance, il suffit donc de montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ est absolument convergente, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx$ est absolument convergente (car f est nulle sur $]-\infty; 0]$).

Or, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geqslant 0$ (car $g(x)$ est alors le minimum de 2 réels positifs) et $f(x) \geqslant 0$ (car f est une densité de probabilité). Donc la convergence équivaut ici à l'absolue convergence : il suffit de prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx$ est convergente.

Or, l'intégrale $\int_0^q g(x)f(x)dx$ est convergente d'après la question précédente (car $g(x) = x$ pour tout $x \leqslant q$). De plus, $\int_q^{+\infty} g(x)f(x)dx$ est convergente également. En effet, comme $g(x) = q$ pour tout $x \geqslant q$, il s'agit simplement de $q \int_q^{+\infty} f(x)dx$, qui converge étant donné que f est une densité de probabilité.

Par relation de Chasles, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx$ est convergente, ce qui montre que $\boxed{V \text{ admet une espérance}}$. De plus, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
E(V) &= \int_0^{+\infty} g(x)f(x)dx \\
&= \int_0^q g(x)f(x)dx + \int_q^{+\infty} g(x)f(x)dx \\
&= q\int_0^q xf(x)dx + q\int_q^{+\infty} f(x)dx \\
&= q\int_0^q xf(x)dx + q\mathbf{P}(D > q)
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{E(V) = q\displaystyle\int_0^q xf(x)dx + qR(q)}$.

iv. Remarque : il peut y avoir des problèmes en 0 car f n'y est pas forcément continue. On ne peut donc pas faire d'intégration par parties directement sur $[0; q]$. On va donc travailler sur $[a; q]$ (avec $a > 0$) et faire tendre a vers 0.

Soit $a > 0$ quelconque. Alors $\displaystyle\int_a^q R(x)dx = \int_a^q u'(x)v(x)dx$ avec u et v les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x$ et $v(x) = R(x)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^q R(x)dx &= \Big[u(x)v(x)\Big]_a^q - \int_a^q u(x)v'(x)dx \\
&= qR(q) - aR(a) - \int_a^q xR'(x)dx \\
&= qR(q) - aR(a) + \int_a^q xf(x)dx \quad \text{car } R' = -f \text{ (cf question 2.(a))}
\end{aligned}$$

Or, $0 \leqslant R(a) \leqslant 1$ (une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1). Donc $0 \leqslant aR(a) \leqslant a$, ce qui implique $R(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$. En passant à la limite (quand a tend vers 0) dans l'égalité ci-dessus, on obtient donc :

$$\int_0^q R(x)dx = qR(q) + \int_0^q xf(x)dx$$

C'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$\boxed{E(V) = \int_0^q R(x)dx}$$

5. **Bénéfice espéré**

(a) Si on ne commande pas de produit, alors on dépense kq_i et on gagne vV. Donc $\boxed{B = vV - kq_i}$.

Comme V admet une espérance (question 4.(b).iii), on en déduit que B aussi et, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(B) &= vE(V) - kq_i \\
&= v\int_0^q R(x)dx - kq_i \quad \text{(question précédente)} \\
&= v\int_0^{q_i} R(x)dx - kq_i \quad (q = q_i \text{ comme il n'y a pas d'achat)} \\
&= v\int_0^{q_i} R(x)dx - (k+c)q_i + cq_i
\end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{\beta(q_i, 0) = \varphi(q_i) + cq_i}$.

(b) Cette fois, si on commande une quantité q_c de produit, alors on dépense $k(q_i + q_c)$ pour le stockage et $cq_c + c_F$ pour l'achat, tandis qu'on gagne vV. On a donc $\boxed{B = vV - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F}$.

Par conséquent, toujours par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(B) &= vE(V) - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \\
&= v\int_0^q R(x)dx - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \quad \text{(question 4.(b).iv)} \\
&= v\int_0^{q_i+q_c} R(x)dx - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \\
&= v\int_0^{q_i+q_c} R(x)dx - (k+c)(q_i + q_c) + cq_i - c_F
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{\beta(q_i, q_c) = \varphi(q_i + q_c) + cq_i - c_F \text{ lorsque } q_c > 0}$.

6. **Optimisation**

(a) Par hypothèse, $q_i \geqslant S$. Donc, quel que soit $q_c > 0$, on a $S \leqslant q_i < q_i + q_c$. Or, on sait (question 2.(c)) que φ est strictement décroissante sur $[S; +\infty[$. Donc $\varphi(q_i) > \varphi(q_i + q_c)$. On en déduit que $\varphi(q_i) + cq_i > \varphi(q_i + q_c) + cq_i$ et donc a fortiori : $\varphi(q_i) + cq_i > \varphi(q_i + q_c) + cq_i - c_F$.

$\boxed{\text{Conclusion : si } q_i \geqslant S, \text{ alors, quel que soit } q_c > 0, \text{ on a } \beta(q_i, 0) > \beta(q_i, q_c).}$

Autrement dit, si $q_i \geqslant S$, alors tout achat de produit entraîne une baisse de l'espérance de bénéfice (par rapport au fait de ne rien acheter).

$\boxed{\text{La meilleure stratégie est donc de ne rien acheter.}}$

(b) On suppose maintenant $q_i < S$.

i. On chercher à maximiser $\beta(q_i, q_c)$ (avec $q_c > 0$), ce qui revient à maximiser $\varphi(q_i + q_c)$ (puisque $cq_i - c_F$ ne dépend pas de q_c). Or, d'après la question 2.(c), $\varphi(x)$ est maximal pour $x = S$. Donc la valeur de q_c qui permet de maximiser $\beta(q_i, q_c)$ est $S - q_i$ (de manière à avoir $q_i + q_c = S$).

$\boxed{\text{Autrement dit, en cas d'achat, la quantité optimale à acheter (de manière à maximiser l'espérance du bénéfice) est } S - q_i.}$

ii. Pour tout $x \in [0; S[$, on a $S - x > 0$, donc d'après la question 5.(b) : $\beta(x, S-x) = \varphi(x + S - x) + cx - c_F = \varphi(S) + cx - c_F$. De plus, d'après la question 5.(a) : $\beta(x, 0) = \varphi(x) + cx$. D'où :

$$\psi(x) = \Big(\varphi(S) + cx - c_F\Big) - \Big(\varphi(x) + cx\Big)$$

Ce qui donne bien : $\boxed{\psi(x) = \varphi(S) - \varphi(x) - c_F}$.

iii. Comme $\varphi(S)$ et c_F ne dépendent pas de x, ψ suit les mêmes variations que $-\varphi$ sur $[0; S[$. Or, φ est strictement croissante sur cet intervalle (question 2.(c)).

On en déduit que $\boxed{\psi \text{ est strictement décroissante sur } [0; S[}$.

iv. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; S[$, on a $\psi(x) \leqslant \psi(0)$. Or, $\psi(0) = \varphi(S) - \varphi(0) - c_F = \varphi(S) - c_F$, qui est négatif par hypothèse. Donc, pour tout $x \in [0; S[$, on a $\psi(x) \leqslant 0$.

Autrement dit, $\boxed{\text{si } c_F \geqslant \varphi(S), \text{ alors } \psi \text{ est négative sur } [0; S[}$.

Pour tout $x \in [0; S[$, $\psi(x)$ représente le gain d'espérance de bénéfice en faisant une commande (par rapport au fait de ne rien acheter) lorsque le stock contient une quantité x de produit. On peut donc interpréter le résultat de cette question de la manière suivante :

$\boxed{\text{Si } c_F \geqslant \varphi(S) \text{ alors les coûts fixes de commande sont tellement élevés qu'il n'est jamais rentable de faire une commande (quel que soit la quantité disponible en stock).}}$

Il s'agit donc d'une situation dégénérée et non viable économiquement.

v. La fonction ψ est continue (car φ l'est) sur $]0; S[$ et y est strictement décroissante (question 6.(b).iii). D'après le théorème de la bijection, ψ réalise donc une bijection de $]0; S[$ sur $\left]\lim\limits_{x \to S} \psi(x); \psi(0)\right[$. Or, $\lim\limits_{x \to S} \psi(x) = -c_F$ (d'après 6.(b).ii, par continuité de φ) et $\psi(0) = \varphi(S) - c_F$. Ainsi, $0 \in \left]\lim\limits_{x \to S} \psi(x); \psi(0)\right[$ étant donné que $-c_F < 0$ et $\varphi(S) - c_F > 0$ (par hypothèse).

Par conséquent, il existe un unique réel $r \in]0; S[$ tel que $\psi(r) = 0$. De plus, par stricte décroissance de ψ sur $[0; S[$, on a, pour tout $x \in [0; r[$ (respectivement $x \in]r; S[$) : $\psi(x) > \psi(r)$ (resp. $\psi(x) < \psi(r)$), i.e $\psi(x) > 0$ (resp. $\psi(x) < 0$).

$\boxed{\text{Conclusion : dans le cas où } c_F < \varphi(S), \text{ il existe unique réel } r \in]0; S[\text{ où la fonction } \psi \text{ s'annule. De plus, elle est strictement positive sur } [0; r[\text{ et strictement négative sur }]r; S[).}$

En interprétant ψ de même qu'à la question précédente, on peut alors interpréter ce résultat de la manière suivante :

> Si la quantité disponible en stock est inférieure à r, alors la stratégie optimale est de faire une commande (de manière à avoir une quantité S en stock). Par contre, si la quantité disponible en stock est supérieure à r, alors la stratégie optimale est de ne pas faire de commande.

II.B Cas discret

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbf{P}(D \geqslant n) = \mathbf{P}(D = n) + \mathbf{P}(D \geqslant n+1)$, soit $\boxed{R_n = p_n + R_{n+1}}$.

   (b) D'après la relation ci-dessus, on a $R_n > R_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ étant donné que $p_n > 0$ par hypothèse.
   On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

   De plus, $\boxed{R_0 = \mathbf{P}(D \geqslant 0) = 1}$ puisque D est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Enfin :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} R_n &= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(D \geqslant n)\\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [D \geqslant n]\right) \quad \text{(probabilité d'une intersection décroissante d'événements)}\\ &= \mathbf{P}(\varnothing) \quad (D \text{ ne peut pas être supérieur à tous les entiers naturels})\end{aligned}$$

   C'est-à-dire : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0}$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\varphi_n - \varphi_{n-1} &= \left[v\sum_{k=1}^{n} R_k - (k+c)n\right] - \left[v\sum_{k=1}^{n-1} R_k - (k+c)(n-1)\right]\\ &= v\left[\sum_{k=1}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n-1} R_k\right] - (k+c)\big(n-(n-1)\big)\end{aligned}$$

   Ce qui se simplifie en : $\boxed{\varphi_n - \varphi_{n-1} = vR_n - (k+c)}$.

   D'après la question précédente, la suite $(\varphi_n - \varphi_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante, de premier terme $v - (k+c)$, qui est strictement positif, et de limite $-(k+c)$ (quand n tend vers $+\infty$) qui est strictement négatif. Il existe donc un entier naturel S tel que $\varphi_n - \varphi_{n-1} \geqslant 0$ pour tout $n \leqslant S$ et $\varphi_n - \varphi_{n-1} \leqslant 0$ pour tout $n \leqslant S$.
   Autrement dit : la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'abord croissante (jusqu'au terme $n = S$), puis décroissante. Elle atteint donc un maximum pour $n = S$,

qui vaut φ_S.

$\boxed{\text{Conclusion : on a bien prouvé qu'il existe un entier naturel } S \text{ tel que } \varphi_S \text{ soit la valeur maximale de la suite } (\varphi_n).}$

8. **Calcul de S avec Scilab**

   On s'inspire de la question précédente : on calcule les termes successifs de la suite (φ_n) tant qu'elle est croissante (c'est-à-dire tant que $\varphi_n - \varphi_{n-1} \geqslant 0$, i.e tant que $R_n \geqslant \dfrac{k+c}{v}$) :

```
k=input('k=') ; c=input('c=') ; v=input('v=') ;
n=0 ; phi=0 ; R=1-p(0) ; disp(phi);

while R >= (k+c)/v do
    n = n+1;
    phi = phi+v*R-(k+c);
    disp(phi)
    R = R-p(n);
end

disp('S=');disp(n);
```

9. (a) On a $V = g(D)$. Donc, d'après le théorème du transfert, pour montrer que V admet une espérance, il suffit de montrer que $\sum g(n)p_n$ est convergente ($g(n)p_n$ est toujours positif, donc l'absolue convergence équivaut à la convergence).

   Or, pour tout $n \geqslant q$, on a $g(n)p_n = qp_n$, et la série de terme général qp_n est convergente (car la série $\sum p_n$ l'est).

   On en déduit que $\boxed{V \text{ admet une espérance}}$. De plus :

$$\begin{aligned}
E(V) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)p_n \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} g(n)p_n + \sum_{n=q}^{+\infty} g(n)p_n \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} np_n + \sum_{n=q}^{+\infty} qp_n \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} np_n + q\sum_{n=q}^{+\infty} p_n \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} np_n + q\sum_{n=q}^{+\infty} \mathbf{P}(D=n) \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} np_n + q\mathbf{P}(D \geqslant q)
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{E(V) = \sum_{n=0}^{q-1} np_n + qR_q}$.

(b) D'après la question précédente et la question 7.(a) :

$$\begin{aligned}
E(V) &= \sum_{n=0}^{q-1} n(R_n - R_{n+1}) + qR_q \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} nR_n - \sum_{n=0}^{q-1} nR_{n+1} + qR_q \\
&= \sum_{n=0}^{q-1} nR_n - \sum_{k=1}^{q} (k-1)R_k + qR_q \qquad \text{(changement d'indice : } k = n+1\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{k=1}^{q} (k-1)R_k + qR_q \qquad \text{(le terme } n = 0 \text{ est nul)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{k=1}^{q-1} (k-1)R_k - (q-1)R_q + qR_q \qquad \text{(on isole le terme } k = q\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{k=1}^{q-1} (k-1)R_k + R_q \qquad \text{(on simplifie les deux derniers termes)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{n=1}^{q-1} (n-1)R_n + R_q \qquad \text{(changement d'indice } n = k\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} \Big(n - (n-1)\Big)R_n + R_q \qquad \text{(on regroupe les deux sommes)} \\
&= \sum_{n=1}^{q-1} R_n + R_q
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{E(V) = \sum_{n=1}^{q} R_n}$.

10. (a) C'est exactement le même principe qu'à la question 5.(a). Si on ne commande pas de produit, on a $B = vV - kq_i$. Donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\beta(q_i, 0) &= E(B) \\
&= vE(V) - kq_i \\
&= v \sum_{n=1}^{q} R_n - kq_i \\
&= v \sum_{n=1}^{q_i} R_n - kq_i \quad (q = q_i \text{car } q_c = 0) \\
&= v \sum_{n=1}^{q_i} R_n - (k+c)q_i + cq_i
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{\beta(q_i, 0) = \varphi_{q_i} + cq_i}$.

(b) De même qu'à la question 5.(b), on a $B = vV - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F$. D'où, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(B) &= vE(V) - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \\
&= v \sum_{n=1}^{q} R_n - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \\
&= v \sum_{n=1}^{q_i+q_c} R_n - k(q_i + q_c) - cq_c - c_F \\
&= v \sum_{n=1}^{q_i+q_c} R_n - (k + c)(q_i + q_c) + cq_i - c_F
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{\beta(q_i, q_c) = \varphi_{q_i+q_c} + cq_i - c_F \text{ lorsque } q_c > 0}$.

(c) Par analogie avec la question 6.(c), la bonne stratégie est de ne rien commander tant que $\varphi_S - \varphi_{q_i} - c_F \leqslant 0$. On résout donc cette inéquation :

$$\begin{aligned}
\varphi_S - \varphi_{q_i} - c_F \leqslant 0 &\iff \varphi_{q_i} \geqslant \varphi_S - c_F \\
&\iff \varphi_{q_i} \geqslant 26{,}51 - 2{,}5 \\
&\iff \varphi_{q_i} \geqslant 24{,}01 \\
&\iff q_i \geqslant 7 \quad \text{(d'après les valeurs données)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc ici, la bonne stratégie est de ne rien commander tant que } q_i \geqslant 7.}$

III Évolution du stock dans le temps

11. (a) On le montre par récurrence. C'est évident pour $n = 0$ puisque $X_0 = 0$. Maintenant, supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, on ait $X_n(\Omega) \subset [\![0; S]\!]$ et montrons qu'il en est alors de même pour X_{n+1}.

Soit $\omega \in \Omega$ quelconque. Il y a deux cas à envisager :

– Soit $X_n(\omega) < r$ auquel cas on remplit le stock (jusqu'à avoir une quantité S), puis on vend la quantité $\min(D_{n+1}(\omega), X_n(\omega))$ (question 4.(a)). On a alors $X_{n+1}(\omega) = S - \min(D_{n+1}(\omega), X_n(\omega))$. Comme S, $D_{n+1}(\omega)$ et $X_n(\omega)$ sont des entiers, on en déduit que $X_{n+1}(\omega)$ et un entier également.
De plus, comme $0 \leqslant X_n(\omega) \leqslant S$, on a $0 \leqslant \min(D_{n+1}(\omega), X_n(\omega)) \leqslant S$ et donc $0 \leqslant X_{n+1}(\omega) \leqslant S$.

– Soit $X_n(\omega) < r$ auquel cas on laisse le stock tel quel, et on vend la quantité $\min(D_{n+1}(\omega), X_n(\omega))$. On a alors $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) - \min(D_{n+1}(\omega), X_n(\omega))$. De même qu'au cas précédent, $X_{n+1}(\omega)$ est alors un entier. De plus, $0 \leqslant X_{n+1}(\omega) \leqslant X_n(\omega) \leqslant S$.

Dans tous les cas, on a donc $X_{n+1}(\omega) \in [\![0; S]\!]$, ce qui montre que X_{n+1} est à valeurs dans $[\![0; S]\!]$.

$\boxed{\text{Par récurrence, on a donc montré que } X_n \text{ est à valeurs dans } [\![0; S]\!] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(b) Soit $i \in [\![0; S]\!]$ quelconque. On applique la formule des probabilités totales à l'événement $[X_{n+1} = i]$ avec le système complet d'événements $\Big([X_n = j]\Big)_{j \in [\![0;S]\!]}$. (c'est bien un système complet d'événements d'après la question précédente) :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{S} \mathbf{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)\mathbf{P}(X_n = j)$$

C'est-à-dire : $\boxed{\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{S} m_{i,j}\mathbf{P}(X_n = j)}$.

Et par définition du produit matriciel, ceci peut se réécrire : $\boxed{U_{n+1} = MU_n}$.

12. **Étude d'un cas particulier**

(a) Soit $\omega \in \Omega$ quelconque. On envisage les différents cas :

1er cas : $X_n(\omega) = 0$

Dans ce cas, on commence par remplir le stock (à une quantité égale à 3). Ensuite, soit la demande est de 0 (probabilité p_0) auquel cas on aura $X_{n+1}(\omega) = 3$, soit la demande est de 1 (probabilité p_1) auquel cas on aura $X_{n+1}(\omega) = 2$, soit la demande est de 2 (probabilité p_2) auquel cas on aura $X_{n+1}(\omega) = 1$, soit la demande est supérieure ou égale à 3 (probabilité R_3), auquel cas on vendra tout le stock et on aura $X_{n+1}(\omega) = 0$. Ainsi, on a les 4 probabilités :

$$P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = R_3 \qquad P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = p_2$$
$$P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = p_1 \qquad P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = p_0$$

2ème cas : $X_n(\omega) = 1$

Dans ce cas, on commence par remplir le stock (à une quantité égale à 3). On se retrouve alors dans la même situation qu'au cas précédent. D'où les 4 proabilités :

$$P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = R_3 \qquad P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = p_2$$
$$P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = p_1 \qquad P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3) = p_0$$

3ème cas : $X_n(\omega) = 2$

Dans ce cas, on ne remplit pas le stock (qui reste à une quantité égale à 2). Donc soit la demande est de 0 (probabilité p_0) auquel cas on aura

$X_{n+1}(\omega) = 2$, soit la demande est de 1 (probabilité p_1) auquel cas on aura $X_{n+1}(\omega) = 1$, soit la demande est supérieure ou égale à 2 (probabilité R_2), auquel cas on vendra tout le stock et on aura $X_{n+1}(\omega) = 0$. Ainsi, on a les 4 probabilités :

$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = R_2 \qquad P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) = p_1$$
$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) = p_0 \qquad P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) = 0$$

4ème cas : $X_n(\omega) = 3$

Dans ce cas, on se retrouve dans la même situation qu'aux deux premiers cas (après avoir rempli le stock). D'où les 4 probabilités :

$$P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = R_3 \qquad P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = p_2$$
$$P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = p_1 \qquad P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) = p_0$$

Les 16 probabilités déterminées aux 4 cas ci-dessus montrent alors bien que :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} R_3 & R_3 & R_2 & R_3 \\ p_2 & p_2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_1 & p_0 & p_1 \\ p_0 & p_0 & 0 & p_0 \end{pmatrix}}$$

(b) i. D'après la question 11.(b), pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= m_{2,0}a_n + m_{2,1}b_n + m_{2,2}c_n + m_{2,3}d_n \\ &= p_1 a_n + p_1 b_n + p_0 c_n + p_1 d_n \quad \text{(question précédente)} \\ &= p_1(a_n + b_n + c_n + d_n) + (p_0 - p_1)c_n \end{aligned}$$

Or, $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$. D'où : $\boxed{c_{n+1} = (p_0 - p_1)c_n + p_1}$.

ii. La suite (c_n) est arithmético-géométrique. On détermine son expression.

L'équation $x = (p_0 - p_1)x + p_1$ a une unique solution qui est $x = \dfrac{p_1}{1-(p_0-p_1)}$ (qui est bien définie car $p_0 - p_1 \neq 1$, puisque p_0 et p_1 sont des probabilités strictement positives). Posons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c'_n = c_n - \dfrac{p_1}{1-p_0+p_1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} c'_{n+1} &= c_{n+1} - \frac{p_1}{1-p_0+p_1} \\ &= (p_0-p_1)c_n + p_1 - \frac{p_1}{1-p_0+p_1} \quad \text{(question précédente)} \\ &= (p_0-p_1)c_n - \frac{(p_0-p_1)p_1}{1-p_0+p_1} \\ &= (p_0-p_1)\left[c_n - \frac{p_1}{1-p_0+p_1}\right] \\ &= (p_0-p_1)c'_n \end{aligned}$$

La suite (c'_n) est donc géométrique de raison $(p_0 - p_1)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c'_n = (p_0 - p_1)^n c'_0 = \dfrac{-p_1}{1 - p_0 + p_1}(p_0 - p_1)^n$ (car $c_0 = 0$).

Par conséquent : $c_n = \dfrac{-p_1}{1 - p_0 + p_1}(p_0 - p_1)^n + \dfrac{p_1}{1 - p_0 + p_1}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{c_n = \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}\Big(1 - (p_0 - p_1)^n\Big)}$$

iii. Comme p_0 et p_1 sont deux probabilités strictement positives, on a $p_0 - p_1 \in \,]-1; 1[$, et donc $(p_0 - p_1)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } (c_n) \text{ converge vers } \gamma = \dfrac{p_1}{1 - p_0 + p_1}.}$

(c) De même qu'au 12.(b).i, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} = (p_1 - p_2)b_n + p_2$, avec $b_0 = 0$. Donc, de même qu'à la question 12.(b).ii, on a :

$$b_n = \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}\Big(1 - (p_1 - p_2)^n\Big)$$

On en déduit alors (de même qu'à la question 12.(b).iii) que la suite $\boxed{(b_n) \text{ converge vers } \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2}}$.

De la même manière, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_{n+1} = (0 - p_0)d_n + p_0 = -p_0 d_n + p_0$, avec $d_0 = 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \frac{p_0}{1 + p_0}\Big(1 - (-p_0)^n\Big)$$

Et on en déduit que $\boxed{(d_n) \text{ converge vers } \dfrac{p_0}{1 + p_0}}$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$, et donc $a_n = 1 - b_n - c_n - d_n$.

$\boxed{\text{D'après ce qui précède, on en déduit que } (a_n) \text{ converge vers une limite } \ell \text{ avec } \ell = 1 - \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} - \gamma - \dfrac{p_0}{1 + p_0}.}$

(d) Par définition de la convergence en loi, les résultats des deux questions précédentes se réinterprètent de la manière suivante :

$\boxed{\text{La suite } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } Y \text{ à valeurs dans } \{0,1,2,3\} \text{ avec } \mathbf{P}(Y=0) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n,\ \mathbf{P}(Y=1) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n,\ \mathbf{P}(Y=2) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \text{ et } \mathbf{P}(Y=3) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n \text{ (voir questions précédentes pour les expressions de ces limites).}}$

13. **Existence et unicité d'une loi de probabilité invariante par M**

(a) Soit $j \in [\![0; S]\!]$ quelconque. On envisage deux cas :

- Si $j < r$, alors $m_{0,j} = R_S$. En effet, si le stock contient une quantité j, on commence par le compléter à une quantité S (puisque $j < r$). Ensuite, le seul moyen de se retrouver avec un stock vide est d'avoir une demande supérieure ou égale à S, ce qui a une probabilité R_S de se produire.

- Si $j \geqslant r$, alors on ne complète pas le stock. Le seul moyen de le vider est alors d'avoir une demande supérieure ou égale à j, ce qui a une probabilité R_j de se produire. D'où $m_{0,j} = R_j$.

Dans les deux cas, il existe donc un entier naturel n tel que $m_{0,j} = R_n$. Or, quel que soit n dans $\mathbb{N}$, on a $R_n > p_n > 0$.
$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } j \in [\![0;S]\!], \text{ on a } m_{0,j} > 0}$.

(b) i. Pour tout $j \in [\![0;S]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{S} m_{i,j} &= \sum_{i=0}^{S} \mathbf{P}_{X_n=j}(X_{n+1} = i) \\ &= \mathbf{P}_{X_n=j}(0 \leqslant X_{n+1} \leqslant S)\end{aligned}$$

Donc (d'après la question 11.(a)) : $\boxed{\sum_{i=0}^{S} m_{i,j} = 1}$.

ii. Le résultat de la question précédente peut s'écrire matriciellement de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,S} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{S,0} & \cdots & m_{S,S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En transposant, on en déduit :

$${}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ce qui montre que } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } {}^tM, \text{ associé à la valeur propre 1.}}$

iii. Comme 1 est valeur propre de ${}^tM$, la matrice ${}^tM - I$ n'est pas inversible (I désignant la matrice identité d'ordre $S+1$), donc son rang est strictement inférieur à $S+1$. D'après le résultat de cours rappelé dans l'énoncé, le rang de ${}^t({}^tM - I)$, c'est-à-dire le rang de $M - I$, est donc strictement inférieur à $S+1$ également. On en déduit que $M-I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que $\boxed{\text{1 est valeur propre de } M}$.

(c) *Analyse de la situation*

Soit $u_0, \ldots, u_S$ les coefficients de U. On cherche λ tel que le vecteur V égal à λU vérifie $MV = V$, ait au moins un coefficient strictement positif et vérifie $\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$.

Intéressons-nous à la dernière condition. Comme $V = \lambda U$, on a $v_i = \lambda u_i$, et donc :

$$\sum_{i=0}^{S} |v_i| = \sum_{i=0}^{S} |\lambda u_i| = \sum_{i=0}^{S} |\lambda|.|u_i| = |\lambda| \sum_{i=0}^{S} |u_i|$$

Pour avoir $\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$, il faut donc nécessairement que $|\lambda| = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$ (le dénominateur n'est pas nul car U est un vecteur non nul), ce qui ne laisse finalement que deux choix possibles pour λ : $\lambda = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$ ou $\lambda = \dfrac{-1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$.

Il suffit donc de montrer qu'un des deux convient.

Réponse à la question

Soit $\lambda = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$ et $V = \lambda U$. On a alors $MV = M(\lambda U) = \lambda MU$ et donc (puisque U est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1) : $MV = \lambda U = V$. De plus :

$$\sum_{i=0}^{S} |v_i| = \sum_{i=0}^{S} |\lambda u_i| = \sum_{i=0}^{S} |\lambda|.|u_i| = |\lambda| \sum_{i=0}^{S} |u_i| = 1$$

Reste à voir si V a au moins un coefficient strictement positif. Si c'est le cas, on a fini.

Sinon, cela signifie que V n'a que des coefficients négatifs ou nuls. Dans ce cas, on recommence en prenant $\lambda = \dfrac{-1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$ à la place de $\lambda = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$, ce qui revient à changer V en $-V$. Les conditions $MV = V$ et $\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$ sont encore vérifiées (de la même manière que ci-dessus), mais maintenant V n'a que des coefficients positifs ou nuls. De plus, sur ces coefficients, au moins un est non nul (s'ils étaient tous nuls, on ne pourrait pas avoir

$\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$). Par conséquent, V a au moins un coefficient strictement positif.

Conclusion : dans tous les cas, il existe un réel λ tel que la matrice colonne $V = \lambda U$, de coefficients $v_0, \ldots, v_S$, vérifie $MV = V$, $\sum_{j=0}^{S} |v_j| = 1$ et l'un au moins des coefficients de V est strictement positif.

(d) On commence par la première inégalité. Pour tout réel x, on a $|x| = x$ ou $|x| = -x$. On envisage donc deux cas :

1er cas : $\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| = \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j$

Pour tout réel x, on a $x \leqslant |x|$. Donc en particulier, pour tout $j \in [\![0; S]\!]$, on a $v_j \leqslant |v_j|$. En multipliant par $m_{0,j}$ (qui est strictement positif d'après la question 13.(a)) cela donne : $m_{0,j} v_j \leqslant m_{0,j} |v_j|$. Et donc, en additionnant ces inégalités : $\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} |v_j|$, c'est-à-dire :

$$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} |v_j|$$

On veut une inégalité stricte. Donc, pour finir, il n'y a qu'à montrer que le cas d'égalité ne peut pas se produire.
Par l'absurde, supposons que $\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| = \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} |v_j|$. Alors cela signifie que les inégalités $m_{0,j} v_j \leqslant m_{0,j} |v_j|$ sont toutes des égalités : $m_{0,j} v_j = m_{0,j} |v_j|$ pour tout $j \in [\![0; S]\!]$. Et donc, puisque $m_{0,j} \neq 0$ (question 13.(a)) : $v_j = |v_j|$ pour tout $j \in [\![0; S]\!]$. Or, ceci implique $v_j \geqslant 0$ pour tout j, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.
Le cas d'égalité ne peut donc pas se produire. D'où :

$$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} |v_j|$$

2ème cas : $\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| = -\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j$

C'est exactement le même principe, en partant de $-v_j \leqslant |v_j|$ (au lieu de $v_j \leqslant |v_j|$). En multipliant par $m_{0,j}$ et en sommant, on obtient alors l'inégalité large (comme ci-dessus). Et, de même, le cas d'égalité ne peut pas se produire, sinon cela impliquerait que les inégalités $-v_j \leqslant |v_j|$ sont toutes des égalités, ce qui est absurde (car cela signifierait que $v_j \leqslant 0$

pour tout j, ce qui contredit le résultat de la question précédente).

$$\boxed{\text{Conclusion : dans tous les cas, on a l'inégalité } \left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j}v_j\right| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j}|v_j|.}$$

On montre maintenant l'autre inégalité. Soit $i \in [\![1;S]\!]$ quelconque. Alors, par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}v_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{S} |m_{i,j}v_j|$$

Or, $|m_{i,j}v_j| = m_{i,j}|v_j|$ car $m_{i,j} \geqslant 0$ (par définition $m_{i,j}$ est une probabilité). D'où :

$$\boxed{\left|\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}v_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{i,j}|v_j|}$$

Ensuite, on sait que $MV = V$ d'après la question précédente. Donc, pour tout $i \in [\![0;S]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}v_j = v_i$. Les inégalités ci-dessus peuvent donc se réécrire :

$$|v_0| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j}|v_j|$$

Et, pour tout $i \in [\![1;S]\!]$:

$$|v_i| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{i,j}|v_j|$$

On additionne ces $S+1$ inégalités. On obtient alors :

$$\sum_{i=0}^{S} |v_i| < \sum_{i=0}^{S}\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}|v_j| \qquad (*)$$

Or, ceci se simplifie. À gauche, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$ d'après la question précédente. Et à droite :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{S}\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}|v_j| &= \sum_{j=0}^{S}\sum_{i=0}^{S} m_{i,j}|v_j| \quad \text{(on permute les sommes)} \\
&= \sum_{j=0}^{S}\left(|v_j|\sum_{i=0}^{S} m_{i,j}\right) \quad (|v_j| \text{ ne dépend pas de } i) \\
&= \sum_{j=0}^{S} |v_j| \quad \text{(question 13.(b).i)} \\
&= 1 \quad \text{(question précédente)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité $(*)$ se réécrit : $1 < 1$, ce qui est absurde. L'hypothèse de départ de la question ne peut donc pas avoir lieu.
On en déduit que $\boxed{\text{tous les coefficients de } V \text{ sont positifs ou nuls}}$.

(e) Soit $U = V - W$. C'est un vecteur non nul (car $W \neq V$), et qui vérifie $MU = U$. En effet : $MU = M(V - W) = MV - MW = V - W = U$. C'est donc un vecteur propre de M pour la valeur propre 1.
On s'inspire alors de ce qu'on a fait à la question 13.(c). Posons $\alpha = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |u_i|}$ (où $u_0, \ldots, u_S$ sont les coefficients de U) et $X = \alpha U$. Le réel α est strictement positif et, de même qu'à la question 13.(c), on a $MX = X$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |x_i| = 1$ (où $x_0, \ldots, x_S$ sont les coefficients de X). Il n'y a plus qu'à vérifier que X admet au moins un coefficient strictement positif.

On sait que $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$ (question 13.(c)) et que les coefficients de V sont tous positifs ou nuls (question précédente). Donc en fait $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} v_i = 1$.
De même, comme W vérifie les mêmes propriétés que V, on a également $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} w_i = 1$ (où $w_0, \ldots, w_S$ sont les coefficients de W). Donc, en soustrayant : $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} (v_i - w_i) = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} \alpha(v_i - w_i) = 0$, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} x_i = 0$. Or, les x_i ne sont pas tous nuls puisque le vecteur X est non nul ($X = \alpha U$ avec $\alpha > 0$ et $U \neq 0$). Donc, parmi les coefficients $x_0, \ldots, x_S$, il y en a au moins un strictement positif et au moins un strictement négatif.
Ainsi, le vecteur X a au moins un coefficient strictement positif, il vérifie $MX = X$, et $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |x_i| = 1$.

$\boxed{\text{On a donc bien montré qu'il existe un réel strictement positif } \alpha \text{ tel que } \alpha(V - W) \text{ vérifie les mêmes propriétés que } V.}$

Ensuite, comme X vérifie les mêmes propriétés que V, on en déduit (d'après la question précédente) que X n'a que des coefficients positifs ou nuls. Ceci couplé avec le fait (vu ci-dessus) que $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} x_i = 0$ implique que $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![0; S]\!]$. Mais ceci est absurde, car cela contredit le fait (vu ci-dessus) que X a au moins un coefficient strictement positif.

$\boxed{\text{Conclusion : l'hypothèse de départ ne peut pas avoir lieu. Autrement dit, il n'y a pas de vecteur } W \text{ différent de } V \text{ qui vérifie les mêmes propriétés que } V.}$

Soit U_0 un vecteur propre quelconque de M associé à la valeur propre 1. D'après la question 13.(c), il existe alors un réel λ_0 tel que $\lambda_0 U_0$ vérifie les mêmes propriétés que V. D'après ce qui précède, ceci entraîne que $\lambda_0 U_0 = V$. Comme $\lambda_0 \neq 0$ (sinon on aurait $V = 0$, ce qui est absurde), on a $U_0 = \dfrac{1}{\lambda_0} V$ et donc $U_0 \in Vect(V)$.
En notant E_1 l'espace propre de M associé à la valeur propre 1, on a donc $E_1 \subset Vect(V)$.
Par ailleurs, l'inclusion réciproque est évidente : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M(\lambda V) = \lambda M V = \lambda V$, ce qui montre que $\lambda V \in E_1$.
Par conséquent, $\boxed{E_1 = Vect(V)}$ et donc $\boxed{\dim(E_1) = 1}$ (puisque $V \neq 0$).

(f) Soit $i \in [\![0;S]\!]$ quelconque. D'après la question 11.(b), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{S} m_{i,j} \mathbf{P}(X_n = j)$. On passe à la limite dans cette égalité (quand n tend vers $+\infty$). On obtient alors (par convergence en loi de (X_n) vers X) : $\mathbf{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{S} m_{i,j} \mathbf{P}(X = j)$ et ce, quel que soit $i \in [\![0;S]\!]$.
Or, ces égalités (pour i allant de 0 à S) peuvent se réécrire matriciellement de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,S} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{S,0} & \cdots & m_{S,S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=S) \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $T = MT$ en notant T la matrice colonne $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=S) \end{pmatrix}$.
On en déduit que T appartient à l'espace propre de M associé à la valeur propre 1. Par conséquent, d'après la fin de la question précédente, il existe un réel λ tel que $T = \lambda V$.
Reste à montrer que $\lambda = 1$. Pour cela, on reprend l'égalité $T = \lambda V$. Ceci implique que la somme des coefficients de T est égale à la somme des coefficients de λV. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} \mathbf{P}(X_n = i) = 1$ (car X_n est à valeurs dans $[\![0;S]\!]$, voir 11.(a)). Donc, en passant à la limite (lorsque n tend vers $+\infty$) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} \mathbf{P}(X = i) = 1$, ce qui montre que la somme des coefficients de T est égale à 1.
De plus, comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} |v_i| = 1$ (question 13.(c)) et que les coefficients de V sont tous positifs ou nuls (question 13.(d)), on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{S} v_i = 1$ et donc

$\sum_{i=0}^{S} \lambda v_i = \lambda$. Autrement dit, la somme des coefficients de λV est égale à λ. Comme ceci doit être égal à la somme des coefficients de T (puisque $T = \lambda V$), on en déduit que $\lambda = 1$, et donc finalement que $T = V$.

Conclusion : on a montré que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X, alors $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=S) \end{pmatrix} = V$.