MATHEMATIQUES

Option Economique

Alexandre REISSMAN

Cette épreuve était constituée de deux problèmes indépendants couvrant une très grande partie du programme de mathématiques en ECE. Chacun des deux problèmes comportait des questions de difficultés très variées, permettant aux candidats les moins à l'aise de mettre en valeur leur connaissance du cours et aux candidats les plus forts de se démarquer en traitant des questions plus délicates.
Dans l'ensemble, les copies sont soignées et bien présentées. En revanche, on déplore trop d'erreurs dans la rédaction des mathématiques : des raisonnements approximatifs, des contresens logiques, des affirmations non justifiées, des définitions du cours mal comprises... Rappelons que la rigueur, la précision, mais aussi la concision de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation d'une copie.
Avec une moyenne de 9,98 et un écart-type de 4,99, cette épreuve s'est révélée très classante.

Ce problème propose d'étudier un modèle très simplifié d'évolution des intentions de votes au sein d'une population. On imagine qu'il n'y a que deux candidats A et B, et que chaque jour une personne du groupe parvient à en convaincre une autre de voter comme elle. On démontre alors qu'il est quasi-certain qu'au bout d'un certain nombre de jours toutes les personnes du groupe votent pour le même candidat.

Partie I.
Dans cette première partie, on se place dans le cas particulier d'un groupe de 4 personnes. On met en évidence une chaîne de Markov, la méthode d'étude est alors relativement classique.
1) Ces premières questions permettent de calculer les probabilités de transition entre états. Les candidats ont dans l'ensemble compris le protocole mais ont souvent eu des difficultés à justifier correctement et simplement les résultats.
2) (a) L'égalité $U_{n+1} = MU_n$ a parfois été donnée comme étant une conséquence directe du diagramme, sans plus d'explication. On attendait l'utilisation de la formule des probabilités totales, en explicitant le système complet d'événements utilisé. Nous avons pu constater à cette occasion que cette notion était mal maîtrisée par un trop grand nombre de candidats, qui nous ont proposé $([X_n = 1],[X_n = 2],[X_n = 3])$ comme système complet associé à cette expérience.
2) (b), (c) et (d)La méthode de recherche des valeurs propres est en général connue, mais les calculs ne sont pas toujours menés à bien. L'énoncé permettait toutefois de poursuivre sans connaître exactement leur valeur.

Partie II.
4) (a) Les candidats ayant bien compris la partie I ont réussi sans trop de difficultés à généraliser les résultats au cas d'un groupe de m personnes. Dans la question (b), nous retrouvons les erreurs et confusions en ce qui concerne les systèmes complets d'événements.
5) (a) Cette récurrence était délicate à rédiger. L'énoncé précis à démontrer est souvent incomplet ou incorrect, quand il est donné, ce qui est n'est pas souvent le cas. L'initialisation a posé des problèmes alors qu'elle était évidente à vérifier. Si certains candidats ont réussi à comprendre comment établir l'hérédité, aucun n'a remarqué que les cas $k = 1$et $k = m - 1$ devaient être traités à part.
5) (b) Nous avons pu lire que la probabilité $p_{n,k}$tend vers $+\infty$. Une simple relecture aurait dû permettre d'éviter de laisser de telles absurdités dans la copie.

7) (b) De très nombreux candidats proposent un résultat qui dépend de k, sans réaliser que ce n'est pas possible. Il est probable qu'il s'agisse à nouveau d'une difficulté liée à la notion non maîtrisée de système complet d'événements.
8) Cette question n'a été traitée correctement que par quelques bons candidats, qui ont compris où le sujet désirait les amener.

Ce problème présente dans la partie I une version édulcorée d'un résultat récent sur les lois de Benford obtenu par Nicolas Gauvrit et Jean-Paul Delahaye. On propose de l'appliquer ensuite afin d'obtenir des résultats sur les lois limites de variables aléatoires de Pareto.
9) (a) Le changement de variable est généralement correctement effectué.
(b) Si l'inégalité de gauche s'obtient sans trop de difficultés, celle de droite est un peu plus délicate, ce qui a échappé à de nombreux candidats.

Partie I.
Cette partie demandait une bonne compréhension de la notion de partie entière et des techniques de sommation d'inégalités. Les bons élèves ont pu faire valoir leurs qualités et accumuler beaucoup de points.
Nous déplorons dans la question 11) une coquille ayant échappé aux multiples relectures du sujet. L'erreur était grossière et facile à corriger, les candidats ont pour la plupart rectifié d'eux-mêmes.
12) Nous regrettons un manque de rigueur dans la justification de l'existence des séries et des intégrales généralisées. Dans la majorité des copies, les inégalités de la question 12 (b) sont sommées de 0 à +¥ afin d'obtenir l'encadrement de la question (c), alors qu'il était clairement précisé que n était non nul.

Partie II.
Dans le début de cette partie, les questions sont relativement classiques et ne présentent pas de difficultés particulières. Elles ont permis aux candidats sérieux d'obtenir facilement des points.
La fin du problème a été très peu abordée, certainement par faute de temps. Aucun candidat n'a traité correctement la question 17).

Correcteurs : Guy BROUARD, Ludovic FREITAG, Alain GUICHET, Françoise MICHEL, Yves MONLIBERT, Francis RACCAGLIA, Audrey RAULT, Alexandre REISSMAN, Jean-Yves ROUSSEL, Agnès VALLADEAU.