MATHÉMATIQUES III

Option économique

Alexandre Reissman

Le sujet

L'épreuve était, cette année encore, constituée de deux exercices indépendants.

Le premier consistait en l'étude d'une chaîne de Markov à trois états, qui apparaît lors de la modélisation d'une situation simple : deux personnes se cherchent dans un immeuble en forme de pentagone.

Le second problème exposait les travaux de J. L. Kelly (1956) portant sur les stratégies à adopter lors de paris répétés. Le critère de Kelly est encore utilisé de nos jours pour optimiser les investissements (portefeuilles d'actions) ou lors des paris sportifs. La mise en place du problème est de nature probabiliste, et donne lieu par la suite à des développements analytiques qui occupent l'essentiel du sujet. On proposait également en fin de problème des exemples de simulations informatiques permettant de valider expérimentalement les résultats établis.

Commentaires généraux sur les copies

Le jury a dans l'ensemble été satisfait du niveau des copies.
Le sujet comportait un nombre important de questions, mais les candidats n'en n'ont pas été décontenancés pour autant. À quelques rares exceptions près, les deux problèmes ont été abordés. Les diverses questions de cours disséminées dans l'énoncé (étude des suites récurrentes linéaires, somme de variables de Bernoulli indépendantes, formulaire classique de probabilités, sommes de séries usuelles) sont globalement bien traitées, et les élèves sérieux ont pu ainsi valoriser leur travail de préparation.
Les meilleurs candidats ont su se distinguer par leurs qualités de rapidité dans les calculs et de concision dans les argumentations. Ce sont également ceux capables de prendre du recul vis-à-vis de leurs résultats et qui en perçoivent les conséquences. À cet égard, les questions demandant des interprétations probabilistes se sont révélées être les plus discriminantes.

Moyenne générale : $9,7$
Écart-type : $3,5$
Médiane : $9,5$

Remarques sur quelques points de correction

Exercice 1

- A.1 La notion de système complet d'événements est bien souvent non comprise, beaucoup de candidats pensent qu'il s'agit de montrer que la somme des probabilités des événements vaut un.
- A.3.a L'hypothèse d'indépendance des déplacements est essentielle et doit être mentionnée.
- A.3.c Beaucoup de temps et de pages perdues dans cette question. On pouvait se contenter de détailler le calcul d'une ou deux probabilités (les plus délicates à obtenir).
- A.4 Ne pas oublier de citer la formule des probabilités totales, en rappelant le système complet d'événements utilisé.

A.5.c On déplore plusieurs tentatives de «bluff» : des calculs faux dès la première ligne, qui aboutissent miraculeusement au résultat donné dans l'énoncé. Est-il nécessaire de préciser l'impression qu'elles laissent sur le correcteur ?

A.6.b Le fait que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$ mérite une justification.

A.6.c Le résultat est généralement donné sans justification, et quelques fois très approximativement (on a pu lire «la probabilité est quasi-nulle»). Très rares sont ceux qui pensent à utiliser les suites croissantes d'événements.

B.1 La réponse souvent proposée est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, voire $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors que l'on remarque facilement que la rencontre ne peut pas avoir lieu avant deux déplacements.

B.2 Certains confondent les événements $(X = n)$ et A_n.

B.3&4 Peu de candidats se soucient de la convergence de la série. Les calculs sont très rarement menés correctement à leur terme. Les résultats sont étonnamment simples, puisqu'en fait l'espérance vaut 12 et l'écart-type 10.

Exercice 2

I.2 Si la linéarité de l'espérance est souvent invoquée, à juste titre, il faut penser à mentionner l'indépendance des variables afin de pouvoir écrire que l'espérance d'un produit est le produit des espérances.

I.3 Avec une stratégie de «quitte ou double», le premier échec rencontré conduit à la ruine. Certains candidats l'ont saisi, mais peinent à le formuler mathématiquement. En faisant intervenir la variable aléatoire géométrique donnant le temps d'attente du premier échec, on obtenait sans effort le résultat ainsi que le temps moyen demandé.

II.2 C'est une question de cours, qui a été bien rédigée. La plupart des candidats pensent à rappeler les hypothèses (notamment l'indépendance des variables) avant de conclure.

III.1.b Interprétation la plus souvent lue : la courbe admet une asymptote. Le jury attendait une interprétation probabiliste, qui mette en rapport cette question avec le résultat de la première partie.

III.1.d L'allure d'une courbe représentative doit mettre en évidence l'ensemble des résultats trouvés : variations, limites, concavité...

III.2. Cette question a donné lieu à des réponses souvent confuses, voire complètement fantaisistes.

IV.1.a Beaucoup d'erreurs sur la détermination des limites. L'équivalent $\ln(1+x) \sim x$ en 0 est mal utilisé. Certains ne remarquent même pas la forme indéterminée, et peuvent écrire des énormités comme : la limite vaut $\frac{\ln 1}{\ln 1} = 0$.

IV.1.b Des erreurs dans le calcul de la dérivée de $x \mapsto \ln(1-x)$ sont dommageables pour la suite.

IV.2 Le développement limité de la fonction logarithme en 1 est souvent non connu.

IV.3.b Question très peu traitée, les connaissances sur la dérivabilité des bijections réciproques et la formule de dérivée associée n'étant pas maîtrisées.

V La partie informatique a été peu abordée, mais est généralement bien réussie.

Correcteurs :
Guy BROUARD, Michel DENGREVILLE, Eric GUICHET, Françoise MICHEL, Alexandre REISSMAN, Geneviève ROCHE, Jean-Yves ROUSSEL