MATHEMATIQUES III

Option économique **Geneviève ROCHE**

Éric GUICHET

1146 candidats ont composé cette année sur l'épreuve de mathématiques III.

Le sujet

L'épreuve comportait un exercice et un problème totalement indépendants.

L'exercice, très classique, était consacré à la trigonalisation puis au calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 3. Le problème consistait, pour sa part, en l'étude de la loi de Pareto et en l'estimation des paramètres d'une telle loi.

Bilan de la correction des copies

À de très rares exceptions près, les candidats ont abordé l'exercice et le problème.

Dans leur grande majorité, les candidats présentent avec soin leurs copies, s'attachent à justifier rigoureusement leurs réponses, et sont capables d'avancer dans la résolution d'un sujet en admettant explicitement certains résultats qu'ils ne sont pas parvenus à démontrer.

Même si elles restent exceptionnelles, quelques tentatives malheureuses d'abuser le correcteur sont à déplorer ; est-il nécessaire de rappeler que le bluff ne paie pas ?

Le sujet proposait des entrées multiples, des questions de difficultés variées, et faisait appel à de nombreuses notions du programme (algèbre linéaire, intégration, probabilités). C'est pourquoi la quasi totalité des étudiants ont abordé de nombreux passages, mais avec des succès très divers : plusieurs questions ont nettement départagé les candidats.

- **Exercice** (suites et algèbre linéaire)

On ne peut que regretter de rencontrer trop souvent l'affirmation : $X_n = X_0 A^n$, correspondant à exploiter sans discernement l'analogie avec les suites géométriques réelles.

La méthode du pivot de Gauss est généralement bien mise en œuvre ; les erreurs de calcul sont plus nombreuses quand les étudiants ne se contentent pas de manipulations sur les lignes mais s'essayent à des échanges d'inconnues. Certains étudiants se sont limités à affirmer que 2 était solution de l'équation $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, ce qui ne suffisait pas à justifier qu'il s'agissait de la seule valeur propre de A. Que A ne soit pas diagonalisable a été quasiment unanimement obtenu, mais sa justification à mis en évidence une grande confusion entre les notions de rang, ordre et dimension. Il n'a pas été rare de lire : $\dim\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\right) = 3$.

La question **3.** s'est révélée très discriminante ; environ la moitié des candidats a su traduire sur les composantes des vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 les conditions imposées par l'énoncé. Ce n'est plus qu'une infime minorité qui a pensé à justifier que la famille obtenue (e'_1, e'_2, e'_3) était bien une base de $\mathbb{R}^3$.

L'application de la formule du binôme de Newton pour développer $(2I + N)^n$ n'est pas aussi familière que l'on serait en droit de l'attendre : omission fréquente de la mention que les matrices $2I$ et N commutent, le coefficient 2 perd sa puissance en cours de route, erreur dans l'exploitation du fait que N est nilpotente d'ordre 3 (toutes les occurrences de n sont remplacées par 2) et, plus rarement, absence des coefficients binomiaux sous le symbole Σ.

Enfin, l'erreur classique dans la formule du changement de base ($A = P^{-1} T P$ au lieu de $T = P^{-1} A P$) est bien sûr apparue quelques fois. Signalons qu'affirmer :

$$A = P^{-1}T\,P \quad \text{donc} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P^{-1}T^n\,P$$

doit s'accompagner d'une justification, même brève, par exemple en mentionnant « par une récurrence élémentaire » ou en mettant en évidence le télescopage multiplicatif. Il convient tout de même de rédiger au moins une fois, dans sa copie, un raisonnement par récurrence dans sa totalité. Le problème qui suit en donnait par exemple la possibilité.

- **Problème** (probabilités)

Partie I (Loi exponentielle)

Les questions **1.** et **2. a)** permettaient de vérifier l'acquisition de connaissances de base (définition d'une probabilité conditionnelle, définition d'une loi exponentielle, linéarité de l'espérance, additivité de la variance dans le cas de l'indépendance). Elles ont globalement été traitées de façon satisfaisante, l'indépendance servant malheureusement pour certains étudiants à justifier l'additivité de l'espérance. Une erreur trop fréquemment observée : $\mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = n^2\,\mathrm{V}(X_1)$.

Le principe de récurrence est généralement bien compris et le « cadre » de sa mise en œuvre rédigé de façon satisfaisante. En revanche, l'étape délicate de l'hérédité nécessitait une analyse très fine des calculs en jeu, et n'a été réussie que par un petit nombre.

Partie II (Loi de Pareto)

Si les calculs des intégrales sont la plupart du temps exacts, les conditions de convergence de celles-ci ont été plus rarement explicitées. De plus, on relève régulièrement la confusion entre $\mathrm{E}(X^2)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Dans la question **3.**, l'inclusion entre les événements $(X > x + y)$ et $(X > x)$ est fréquemment retournée et l'interprétation demandée consiste très souvent à paraphraser le résultat obtenu.

Enfin, dans la dernière question de cette partie, un certain nombre d'étudiants a confondu les expressions $\ln\dfrac{X}{b}$ et $\dfrac{\ln X}{b}$. Maudit trait de fraction !

Partie III (Estimation des paramètres d'une loi de Pareto)

Cette partie a été moins bien réussie que les précédentes et s'est avérée la plus discriminante de l'ensemble de l'épreuve. Les principales erreurs commises et difficultés rencontrées ont été les suivantes : que φ' s'annule ne suffit pas à justifier que la fonction φ admette un maximum ; avant même le difficile calcul de l'intégrale correspondante (surtout si on ne voyait pas le lien avec f_{n-1}), l'écriture de la formule de transfert a occasionné nombre d'accidents parmi lesquels la formule : $\mathrm{E}(1/Y) = 1/\mathrm{E}(Y)$; tout semble permis pour obtenir l'inégalité de la question **1. d) i)** et chacun y va de sa « propre » formule de Bienaymé-Tchebychev.

Certains étudiants reprennent la main en fin de partie (question **2.**) avec des questions plus classiques parmi lesquelles la détermination de la fonction de répartition de la variable Z_n.

****

Conclusion

Les notes s'échelonnent de 0,5 à 20 ; peu de copies sont jugées très faibles et le maximum est obtenu par des candidats ayant traité la totalité de l'épreuve.

Cette année encore, le jury a pu apprécier le bon niveau d'ensemble des candidats et l'excellence de certains, ce qui ne pourrait être atteint sans le travail de très grande qualité fourni par les étudiants comme par les enseignants qui les ont en charge.

Moyenne générale : 8,82

Écart-type : 3,68

Correcteurs : Guy BROUARD, Michel DENGREVILLE, Eric GUICHET, Françoise MICHEL, Geneviève ROCHE, Jean-Yves ROUSSEL