ESSEC
Option économiqueAnnée 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.Exercice 1 :

probabilités et algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.

I.Etude d'un endomorphisme

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynôme nul ; on désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Justifier que $P(aX+1-a)$ (c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:$x \longmapsto P(ax+1-a)$) est un polynôme de même degré que P.

   Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax+1-a)$

2. Soient a et b des nombres réels non nuls.
   (a) Déterminer la composée $f_b \circ f_a$ de f_a par f_b.
   (b) Démontrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.
   (c) On pose : $(f_a)^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

3. Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
   (a) Expliciter M_a dans le cas $N=3$.
   Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$-ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
   (b) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
   Ce résultat reste-t-il valable si n est un entier négatif ?

4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a .
   Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\left((X-1)^k\right)$.
   L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de N pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile $(0 < p < 1)$ et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1 - p$.
On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les N pièces ;
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite.
À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants.
On considère les variables aléatoires suivantes :

- X_0 est la variable aléatoire certaine égale à N,
- pour tout entier naturel n non nul, X_n est le nombre de côtés pile apparaissant à l'étape n, avec la convention que, si à une certaine étape n_0 aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à n_0 l'événement $(X_n = 0)$ est réalisé.

1. **Etude des variables aléatoires X_n**
   Soit n un entier naturel, soient i et j des entiers compris au sens large entre 0 et N.

   (a) Préciser la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que l'événement $(X_n = j)$ est réalisé.
   En déduire l'expression de $P(X_{n+1} = i)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $\ldots$, $P(X_n = N)$.

   (b) On pose :
   $$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}.$$
   Déterminer une matrice M telle que : $U_{n+1} = MU_n$.
   En déduire l'expression de U_n en fonction de p, n et U_0, puis la loi de X_n . Vérifier la cohérence des résultats pour $n = 0$ et $n = 1$.

   (c) Déterminer le nombre moyen m_n de pièces lancées au cours des n premières étapes $(n \geqslant 1)$.

2. **Etude d'un temps d'attente**
   On suppose les N pièces numérotées de 1 à N, et on note $T_1, ..., T_N$ les variables aléatoires donnant le temps d'attente de la première apparition de face respectivement pour la première, deuxième, ..., Nième pièce. De plus, on pose :
   $$T = \sup(T_1, \ldots, T_N).$$

   (a) Préciser la loi et l'espérance des variables aléatoires $T_1, \ldots, T_N$.
   Quelle est le nombre total moyen de pièces lancées au cours de l'expérience aléatoire ? Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question II. 1. c) .

   (b) Interpréter la variable aléatoire T. Justifier brièvement que T admet une espérance.

   (c) Pour tout entier naturel k non nul, calculer la probabilité de l'événement $(T \leqslant k)$ en fonction de k, N et p. En déduire la loi de T.

   (d) Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$.
   Démontrer, dans le cas $N = 2$:
   $$E(T) = \frac{1+2p}{1-p^2},$$

puis dans le cas général :

$$E(T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}\binom{N}{i}}{1-p^i}.$$

Exercice 2 : probabilités et analyse

On considère une urne composée de boules blanches et de boules rouges, mais dont la composition exacte est inconnue. Supposons qu'après avoir effectué n tirages au hasard avec remise dans cette urne, soit obtenu un total de r boules rouges. Il semble alors raisonnable de penser que la proportion initiale de boules rouges est proche de $\frac{r}{n}$.
Le problème qui suit propose une étude de cette situation.

I. Etude d'une loi de probabilité conditionnelle

Dans cette partie, N, n et r désignent des entiers tels que : $N \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant n$.
On considère $N+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_N$ telles que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, l'urne U_k soit composée de k boule(s) rouge(s) et de $N-k$ boule(s) blanche(s). On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors n tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. (a) Soit k un entier compris au sens large entre 0 et N.
   Quelle est la loi de R conditionnée par l'événement $(U = k)$?

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'égalité :

$$P(R=r) = \frac{\binom{n}{r}}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}.$$

2. Soit i un entier compris au sens large entre 0 et N.
   Démontrer :

$$P_{R=r}(U=i) = \frac{\left(\frac{i}{N}\right)^r \left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}.$$

3. Soient p un réel de $[0\,;\,1]$ tel que pN soit un entier naturel et Y_N la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges dans l'urne choisie initialement parmi les $N+1$ urnes.

   (a) Écrire l'événement $(Y_N \leqslant p)$ à l'aide de la variable aléatoire U.
   Déterminer alors l'expression de $P(Y_N \leqslant p/R=r)$ en fonction de N, n, r et p.

   (b) En déduire, à l'aide du théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{\substack{N\to+\infty \\ pN \text{ entier naturel}}} P_{R=r}(Y_n \leqslant p) = \frac{\int_0^p t^r(1-t)^{n-r}dt}{\int_0^1 t^r(1-t)^{n-r}dt}$$

II. Loi de probabilité bêta

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels supérieurs ou égaux à 1.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. On notera dorénavant $B(a,b)$cette intégrale.

2. (a)
   - Démontrer l'égalité :$B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b)$.
   - A l'aide d'une intégration par parties, prouver : $B(a,b+1)=\frac{b}{a}B(a+1,b)$.
   - Des deux relations précédentes, déduire la formule : $B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}B(a,b)$.

   (b) Calculer $B\,(1,\,b)$, puis exprimer explicitement $B(a,b)$ en fonction de a et b dans le cas où a et b sont entiers.

   (c) Écrire un programme en langage Pascal permettant de calculer et d'afficher la valeur de $B(a,b)$, les entiers naturels non nuls a et b étant saisis au clavier par l'utilisateur.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels supérieurs ou égaux à 1, non nécessairement entiers. C désignant un nombre réel, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=Cx^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } 0<x<1 \\ f(x)=0 & \text{si } x\leqslant 0 \text{ ou } x\geqslant 1. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que, pour une certaine valeur de la constante C à déterminer, la fonction f est une densité de probabilité
   (c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} f=1$). On supposera dorénavant C ainsi fixée.
   On dit alors qu'une variable aléatoire de densité f suit la loi de probabilité bêta de paramètres a et b.

   (b)
   - Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0,\,1[$.
     Justifier que, si a et b sont distincts de 1, alors, sur $]0,\,1[$, f' s'annule en un réel et un seul.
   - Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 en discutant selon la valeur de a.
   - Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans chacun des deux cas

$$\begin{cases} 1<a<2 \\ b>2 \end{cases}$$

     et

$$\begin{cases} a>2 \\ b=2. \end{cases}$$

   (c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé et admettant pour densité f.
   - Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
   - Démontrer que X admet une variance égale à $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

III. Conclusion

Considérons à nouveau une urne composée de boules blanches et de boules rouges, dont la composition exacte est inconnue. On peut traduire cette ignorance en supposant que la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges de cette urne suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,\,1]$. Cela revient à faire tendre dans la partie I. le nombre d'urnes vers l'infini.
En reprenant la situation et les notations de la partie I., et en admettant, dans la question 3. b) de cette partie, que le calcul de limite reste valable que pN soit un entier naturel ou pas, montrer que la suite des variables Y_N sachant $(R=r)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de probabilité bêta dont on déterminera les paramètres puis l'espérance.