Corrigé ESSEC II ECE 2021

Laurent Dietrich

3 mai 2021

1 Partie 1

1. (a) Cette inégalité est vraie pour tout réel $x \geq 0$. En effet, si $0 \leq x \leq 1$ alors on a $0 \leq x \leq 1 \leq 1+x^4$ et si $x \geq 1$ alors $1+x^4 \geq x^4 \geq x^r$. Comme X_1^r est à valeurs positives, l'inégalité recherchée est vraie.

   (b) Comme X_1 admet un moment d'ordre 4, X_1^4 admet une espérance. Par transformation affine, il en est de même pour $1+X_1^4$ et par l'inégalité ci-dessus, il en est donc de même pour X_1^r.

   (c) X_1 est positive, donc $\mu \geq 0$ avec égalité si et seulement si X_1 est presque sûrement nulle, ce qui n'est pas le cas car $\mathbf{P}(X_1 = 0) \neq 0$. On a donc $\mu > 0$.

   (d) $(X_1 - \mu)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \mu^{4-k} X_1^k$. Par la question précédente et par transformation affine, chaque terme de cette somme admet une espérance. Par linéarité, $(X_1 - \mu)^4$ admet une espérance, c'est-à-dire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

2. (a) Soit $n \geq 1$. On a $B_n = B_{n+1} \cup A_n \supset B_{n+1}$.

   (b) ($\Rightarrow$). On suppose $\omega \in B$. Ainsi $\forall n \geq 1$, $\omega \in B_n$ donc il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Ceci étant valable pour tout $n \geq 1$, on en conclut qu'il existe une infinité de $k \geq 1$ tels que $\omega \in A_k$ (s'il y en avait qu'un nombre fini, on aurait une contradiction en prenant pour n leur maximum).

   ($\Leftarrow$). On suppose qu'il existe une infinité de $k \geq 1$ tels que $\omega \in A_k$. Supposons par l'absurde que $\omega \notin B$. Cela signifie qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\omega \notin B_n$, donc que pour tout $k \geq n$, $\omega \notin A_k$, ce qui contredit le fait que ω appartient à une infinité de A_k.

   (c) C'est le théorème de la limite monotone : la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion

   (d) Soit C et D deux événements. On a

$$\mathbf{P}(C \cup D) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D) - \underbrace{\mathbf{P}(C \cap D)}_{\geq 0} \leq \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D)$$

   (e) Montrons par récurrence, pour tout $N \geq n$, la proposition suivante :

$$\mathcal{H}(N) : \left[\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k \right) \leq \sum_{k=n}^{N} \mathbf{P}(A_k) \right]$$

   — Initialisation : $H(n)$ est vraie car elle ne dit rien d'autre que $\mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(A_n)$.

— Hérédité : fixons $N \geq n$ un entier et supposons $\mathcal{H}(N)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N+1} A_k\right) &= \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \cup A_{N+1}\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) + \mathbf{P}(A_{N+1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}(A_{N+1}) \qquad \text{par } \mathcal{H}(N) \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(A_k).
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et la conclusion.

On obtient le résultat recherché en faisant $N \to +\infty$.

(f) Comme la série de terme général $\mathbf{P}(A_k)$ converge, son reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par encadrement avec l'inégalité ci-dessus, on a $\mathbf{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Dans cette question, il ne faut *pas* supposer les Y_k positives, sinon toute la suite n'a aucun intérêt car toutes les quantités ci-dessus seraient nulles...

   (a) C'est du cours, c'est la loi faible des grands nombres, les Y_k étant bien indépendantes, admettant toutes une même espérance et variance (car de même loi et admettent un moment d'ordre 4).

   (b) i. Comme l'inégalité $\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon$ concerne des nombres positifs, elle est équivalente, par croissance de la fonction puissance 4 sur $\mathbb{R}_+$, à $\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4$.

   ii. C'est l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\mathbf{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$$

   puisque $\frac{\Sigma_n}{n}$ est bien positive et admet une espérance. [1]

   iii. Quand on développe $\Sigma_n^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^4$, pour chaque terme développé il faut choisir quatre fois (dans chaque parenthèse) un des Y_k. Dans le résultat proposé,
   - la première somme rassemble tous les termes où l'on a choisi quatre fois le même Y_k.
   - La seconde, ceux où l'on choisit deux fois un Y_k et deux fois un autre Y_j. Il y a $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ façons de choisir ces termes en développant : on a deux parenthèses parmi les 4 où l'on peut choisir Y_k, puis il *faut* choisir Y_j dans les autres, et on divise $\binom{4}{2}$ par 2 car sinon on compterait deux fois les mêmes termes (quand k et j échangent leurs valeurs).
   - Enfin, la troisième somme correspond à tous les autres termes, ceux où l'on ne choisit qu'une fois un Y_k puis que des autres.

1. Remarque : le programme est un peu flou sur ce point, il précise qu'on peut appliquer l'inégalité de Markov à $|X|^r$ pour $r \in \mathbb{N}^*$. Ici on part du principe qu'il sous-entend qu'il n'y a pas d'hypothèse à rajouter par rapport à l'application à X, ce qui est vrai car au pire des cas (si X n'admet pas de moment d'ordre r) l'inégalité de Markov dit seulement la chose inutile suivante : $\mathbf{P}(\dots) \leq +\infty$. L'inégalité n'est utile que si X admet un moment d'ordre r, ce qu'on montre ensuite avec $r = 4$ ici.

iv. On applique la linéarité de l'espérance à l'égalité prouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Sigma_n^4) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_k)^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \mathbf{E}(Y_k^2 Y_j^2) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_k W_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \rho^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \sigma^2\sigma^2 + \sum_{k=1}^{n} 0\mathbf{E}(W_k) \text{ par indép. des } Y_k \text{ et le lemme des coalitions}\\ &= n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4\end{aligned}$$

car il y a n valeurs possibles de k et $n-1$ de j dans la deuxième somme.

v. Soit $n \geq 1$ entier. $\mathbf{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = \frac{\rho^4}{n^3} + \frac{3n(n-1)}{n^4}\sigma^4 \leq \frac{\rho^4}{n^2} + \frac{3n^2\sigma}{n^4} = \frac{\rho^4+3\sigma}{n^2}$. Ainsi, $C = \rho^4 + 3\sigma$ convient.

vi. On applique ii. avec $\varepsilon = \frac{1}{n^{1/8}}$ puis v., on a bien

$$\frac{1}{\varepsilon^4}\frac{C}{n^2} = \frac{1}{n^{4/8}}\frac{C}{n^2} = \frac{C}{n^{12/8}} = \frac{C}{n^{3/2}}.$$

4. (a) On a pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \mathbf{P}(A_n) \leq \frac{C}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann ($3/2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ converge.

   (b) C'est exactement ce qui a été démontré dans la question 2., qui s'applique ici puisque la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ converge.

   (c) Les A_n ne se produisent donc qu'un nombre fini de fois. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, à partir d'un certain on a $\left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right| \leq \frac{1}{n^{1/8}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0$: l'événement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0$ est donc certain et a pour probabilité 1.

   (d) Ce que l'on vient de faire dans 3. et 4. s'applique aux $Y_k = X_k - \mu$: elles sont bien indépendantes, centrées, de même loi, et $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4 par la question 1.(d). Avec ce choix, on remarque que $\Sigma_n = S_n - n\mu$ donc $\frac{\Sigma_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \mu$ et la question précédente conclut.

5. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) = X_{n+1}(\omega) \geq 0$.

   (b) Supposons $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, ainsi $(S_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme cette suite est par ailleurs croissante, elle est majorée, et positive, donc bornée. Ainsi $\frac{1}{n}S_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) Comme $\mu > 0$, par la question 4.(d) l'événement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ est négligeable, donc l'événement $S_\infty \in \mathbb{R}_+$ aussi.

2 Partie 2

6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $S_k \leq s$ alors $S_k \leq t$ puisque $s \leq t$ donc

$$\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq s\} \subset \{k \in \mathbb{N},\ S_k \leq t\}$$

donc $N_s \leq N_t$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $N_t(\omega) \geq n$. On a $S_{N_t(\omega)} \leq t$. Comme $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a alors $S_n(\omega) \leq t$.

Supposons $S_n(\omega) \leq t$. Alors $n \in \{k \in \mathbb{N},\ S_n(\omega) \leq t\}$ donc $N_t(\omega) \geq n$.

(c) Par (a), la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante donc admet une limite.

(d) i. $t \mapsto N_t(\omega))$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui converge vers K. Montrons qu'elle est alors stationnaire. Par définition de limite, en prenant $\varepsilon = 1/3$, il existe T_ω tel que pour tout $t \geq T_\omega$, $N_t(\omega) \in]K - 1/3, K + 1/3[$, d'où la conclusion car le seul entier de cet intervalle est K.

ii. On a en particulier $N_{T_\omega}(\omega) = K$ donc K est le rang maximal auquel la suite $(S_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ est inférieure ou égale à T_ω. Donc $S_K(\omega) \leq T_\omega$ et $S_{K+1}(\omega) > T_\omega$. Ceci est valable en remplaçant T_ω par n'importe quel $t \geq T_\omega$ puisque c'est le cas dans i.

iii. Nous supposions déjà que $N_\infty(\omega) = K$. On a grâce à la question précédente, $X_{k+1}(\omega) = S_{K+1}(\omega) - S_k(\omega) \geq t - T_\omega$ pour tout $t \geq T_\omega$ donc $X_{k+1}(\omega) \geq x$ pour tout réel x postitif (prendre $t = T_\omega + x$), ce qui est absurde.

iv. Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, $N_\infty(\omega) = +\infty$ donc l'événement $[N_\infty = +\infty]$ est certain.

7.
```
while S<=t
S=S+X()
N=N+1
```

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. $[N_t = n] = [N_t \geq n] \setminus [N_t \geq n+1]$ et $[N_t \geq n+1] \subset [N_t \geq n]$ d'où l'égalité demandée.

(b) Soit $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

i. $F_0(t) = \mathbf{P}(S_0 \leq t) = \mathbf{P}(0 \leq t) = 1$ et $F_1(t) = \mathbf{P}(X_1 \leq t) = F(t)$.

ii. Par la question précédente et 6.(b),

$$\mathbf{P}(N_t = n) = \mathbf{P}(S_n \leq t) - \mathbf{P}(S_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

9. Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme $([U = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales on a

$$\mathbf{P}(V = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([V = j] \cap [U = k]\right) = \sum_{k\in E} \mathbf{P}_{[U=k]}\left(V = j\right) = \sum_{k\in E} \mathbf{P}_{[U'=k]}\left(V' = j\right) = \mathbf{P}(V' = j)$$

où E désigne l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{P}(U = k) \neq 0$.

10. (a) Soit $i \geq 1$. $W = i$ si et seulement si $Z_1, \dots, Z_{i-1} = 0$ et $Z_i = 1$. Par indépendance mutuelle, la probabilité de cet événement est $(1-p)\dots(1-p)p = (1-p)^{i-1}p$. W suit en fait une loi géométrique de paramètre p.

(b) i. Soit $k \geq n$. $[W_n = k] = [Z_1 + \dots + Z_{k-1} = n-1] \cap [Z_k = n]$, ce qui signifie qu'il y a $n-1$ succès parmi les $k-1$ premières épreuves représentées par les Z_l, suivies d'un succès pour la $n^{\text{ème}}$ épreuve. Par indépendance mutuelle des Z_l, on a le résultat annoncé.

ii. Soit $k \geq n$ et $j \geq k+1$. Sachant $[W_n = k]$, $W_{n+1} = j$ signifie qu'aux épreuves numéro $k+1, \dots, j-1$ on a eu des échecs puis un succès à l'épreuve numéro j. Par indépendance mutuelle des Z_l, la probabilité recherchée est donc

$$(1-p)\cdots(1-p)p = (1-p)^{j-1-(k+1)+1}p = p(1-p)^{j-k-1}.$$

(c) On suppose donc que les X_i suivent une loi géométrique de paramètre p.

   i. Sachant $[S_n = k]$, l'événement $[S_{n+1} = j]$ signifie que $X_{n+1} = j - k$. Comme X_{n+1} a la même loi que X_1, on a
   $$\mathbf{P}_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

   ii. C'est une application de 9. et d'une récurrence : pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ et W_1 ont bien la même loi par hypothèse. Si de plus pour un certain $n \geq 1$ fixé, S_n et W_n ont la même loi, alors par 9. S_{n+1} et W_{n+1} ont la même loi.

(d) Ce n'est pas clairement annoncé mais cette question utilise encore l'hypothèse de la question (c). Par 8.(b)ii. et la question précédente,
$$\mathbf{P}(N_t) = F_n(t) - F_{n+1}(t) = \mathbf{P}(W_n \leq t) - \mathbf{P}(W_{n+1} \leq t) = \mathbf{P}(W_n \leq \lfloor t \rfloor) - \mathbf{P}(W_{n+1} \leq \lfloor t \rfloor)$$
et on conclut par (b)i.

3 Partie 3

11. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Par définition de $N_t(\omega)$, c'est le dernier rang k auquel la suite croissante $(S_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ est inférieure ou égale à t, donc $S_{N_t}(\omega) \leq t$ mais $S_{N_t+1}(\omega) > t$.

    (b) Il suffit de diviser l'inégalité ci-dessus par $N_t(\omega)$, mais ceci est faisable seulement si $N_t(\omega) > 0$. Ceci a lieu pour t suffisamment grand, disons $t \geq T_\omega > 0$, car à la question 6.(d) on a démontré que $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$.

    (c) C'est une application directe de 4.(d) et du fait que $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$.

    (d) $\frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$ converge presque sûrement vers $\mu \cdot 1 = \mu$.

    (e) Par l'encadrement obtenu en (b) , on a presque sûrement $\frac{t}{N_t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$ donc $\frac{N_t}{t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu}$ car $\mu > 0$.

12. (a) Si $U(\omega) = 0$ c'est immédiat avec la convention mentionnée. Sinon, $U(\omega) > 0$ et $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ décroit vers 0 donc à partir d'un certain rang on aura $\frac{1}{n} < U(\omega)$ et donc $Y_n(\omega) = 0$.

    (b) Pour tout $\omega \in \Omega$ on a donc $\lim\limits_{\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$. L'événement $\left[\lim\limits_{\to+\infty} Y_n(\omega) = 0\right]$ est donc certain.

    (c) Soit $n \geq 1$ un entier. $\mathbf{E}(Y_n) = 0 \cdot \mathbf{P}(U > 1/n) + n \cdot \mathbf{P}(U \leq 1/n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

13. (a) Soit $\omega \in \Omega$.
    $$\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\mathbf{1}_{[J\geq k]}(\omega) = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega) \cdot 1 + \sum_{k=J(\omega)+1}^{+\infty} X_k(\omega) \cdot 0 = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega)$$
    ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, les deux variables aléatoires mentionnées sont égales.

    (b) Soit $k \geq 1$. On a supposé que $\mathbf{1}_{[J\geq k]}$ est indépendante de $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots$.

    (c) i. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\mathbf{1}_{[U(\omega)\geq n]} = 1$ pour $1 \leq n \leq U(\omega)$ et vaut 0 ensuite, donc
    $$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[U(\omega)\geq n]} = U(\Omega)$$
    et ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, la conclusion s'en suit.

ii. Il suffit de passer à l'espérance dans l'égalité de la question précédente et d'appliquer l'écriture formelle admise ; en effet, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[U(\omega)\geq n]}\right) = 0 \cdot \mathbf{P}(U < n) + 1 \cdot \mathbf{P}(U \geq n) = \mathbf{P}(U \geq n).$$

(d) Par ce même dernier argument et l'écriture formelle admise,

$$\mathbf{E}(S_J) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}(X_k)\mathbf{P}(J \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}(X_1)\mathbf{P}(J \geq k) = \mathbf{E}(X_1)\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(J \geq k) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(J).$$

14. (a) On a l'égalité d'événements $[N_t \leq n-1] = [S_n > t]$: cet événement ne concerne que $X_1, \ldots, X_n$ qui sont indépendantes de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$

(b) On applique 13.(d), qui est valable grace à la question précédente et on remarque que par transformation affine, $\mathbf{E}(N_t + 1) = \mathbf{E}(N_t) + 1$ donc on a bien $\mathbf{E}(S_{N_t+1}) = \mu\left(\mathbf{E}(N_t) + 1\right)$. Il suffit de diviser par $\mu > 0$ dans cette égalité pour obtenir $\mathbf{E}(N_t) = \frac{\mathbf{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$.

15. Soit $t > 0$. On divise l'inégalité précédente par t et on utilise le fait que $\frac{\mathbf{E}(S_{N_t+1})}{t} = \mathbf{E}\left(\frac{S_{N_t+1}}{t}\right) \geq 1$ par croissance de l'espérance puisque $S_{N_t+1} > t$ par 11.(a).

16. (a) On applique le lemme des coalitions, les X_i sont mutuellement indépendantes donc les $f(X_i)$ aussi où $f\colon x \mapsto \min(x, b)$. Les $\widetilde{X}_i$ ont même loi car les X_i ont même loi. Enfin, elles sont positives car les X_i le sont et $b \geq 0$.

(b) i. Soit $n \geq 1$. On a pour tout $1 \leq i \leq n$, $\widetilde{X}_i \leq X_i$ donc en sommant : $\widetilde{S}_n \leq S_n$.

ii. Soit $t \geq 0$. Pour tout $k \geq 0$ entier, par l'inégalité précédente si $S_k \leq t$ alors $\widetilde{S}_k \leq t$ donc en particulier $\widetilde{S}_{N_t} \leq t$ donc $\widetilde{N}_t \geq N_t$.

iii. Soit $t \geq 0$. On a $\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t+1} = \widetilde{S}_{\widetilde{N}_t} + \widetilde{X}_{\widetilde{N}_t+1} \leq t + b$ car les $\widetilde{X}_i$ sont tous inférieurs ou égaux à b.

(c) i. Soit $t > 0$. On applique 14.(b) à $\widetilde{N}_t$ et $\widetilde{S}$ puis on divise par $t > 0$.

ii. Soit $b > 0$. La première inégalité est la croissance de l'espérance en raison de 16.(b).ii. Pour la seconde il suffit de remarquer que par (c).i.,

$$\frac{\mathbf{E}(\widetilde{N}_t)}{t} \leq \frac{\mathbf{E}\left(\widetilde{S}_{\widetilde{N}_t+1}\right)}{t\widetilde{\mu}_b} \leq \frac{t+b}{t\widetilde{\mu}_b}$$

par croissance de l'espérance et (b).iii.

(d) i. C'est (c).ii. : en effet, puisque $b = \sqrt{t}$ alors $\widetilde{\mu}_b = \mathbf{E}(\min(\sqrt{t}, X_1))$.

ii. Puisque $\min(\sqrt{t}, X_1) \leq X_1$ alors $X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \geq 0$. Pour la deuxième inégalité, on fixe $\omega \in \Omega$ et on compare $X_1(\omega) - \min(\sqrt{t}, X_1(\omega))$ à $X_1(\omega)\mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)$. Si $X_1(\omega) > \sqrt{t}$ alors $\min(\sqrt{t}, X_1(\omega)) = \sqrt{t}$ et l'inégalité recherchée est $X_1(\omega) - \sqrt{t} \leq X_1(\omega)$ ce qui est vrai. Sinon, c'est $0 \leq 0$ qui est vraie aussi.

iii. On utilise la croissance de l'espérance dans la question précédente :

$$0 \leq \mu - \mathbf{E}\left(\min\left(\sqrt{t}, X_1\right)\right) \leq \mathbf{E}\left(X_1 \mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\right)$$

Il reste à prouver que $\mathbf{E}\left(X_1 \mathbf{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour conclure par encadrement. Distinguons deux cas.

— Si X_1 est discrète, alors $\mathbf{E}\left(X_1 \mathbf{1}_{[X_1>\sqrt{t}]}\right) = \sum\limits_{x\in X(\Omega), x\geq\sqrt{t}} x\mathbf{P}(X=x) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que reste d'une série convergente puisque X admet une espérance.

— Si X_1 est à densité avec une densité f, même conclusion avec $\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

iv. Il suffit de passer à la limite $t\to+\infty$ dans (d).i., $\frac{t+\sqrt{t}}{t} \sim \frac{t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et d'utiliser la limite précédente.