

RAPPORT DE CORRECTION
DE MATHÉMATIQUES II Option E
Conception ESSEC BS

SOMMAIRE

le sujet	2
Attentes du jury	7
Remarques de correction	8
Conseils aux futurs candidats	9

Le sujet



Code sujet : 287

Conception : ESSEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Lundi 6 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Un modèle probabiliste d'une expérience aléatoire représente dans un certain sens le désordre qui intervient dans l'expérience et il est donc naturel que des outils soient introduits qui permettent de mesurer l'intensité de ce désordre. C'est le cas de la notion d'entropie qui fait l'objet du présent problème. On considérera différentes situations et notamment la façon dont on mesure l'information que deux variables aléatoires s'apportent mutuellement.

Dans la première partie on étudie le cas plus simple techniquement de variables dont la loi admet une densité. Les deuxième et troisième parties sont consacrées au cas discret. Dans la deuxième partie, on introduit les différentes notions d'entropie pour le cas de variables discrètes et dans la troisième partie, on examine comment on peut mesurer l'information apportée mutuellement par deux variables aléatoires.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour toute variable aléatoire Y , on notera $E(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Première partie : Entropie différentielle d'une variable à densité

- 1) La fonction logarithme de base 2, notée $\log_2$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$.
- (a) Montrer que pour tout (x, y) élément de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.
 - (b) Vérifier que pour tout réel α , $\log_2(2^\alpha) = \alpha$.
 - (c) Montrer que la fonction $\log_2$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une densité de X . On appelle **support** de f l'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$, et on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b ($a < b$, a et b finis ou infinis). L'entropie différentielle de X est, sous réserve d'existence, le réel

$$h(X) = - \int_a^b f(x) \log_2 f(x) dx.$$

Montrer que $h(X) = -E(\log_2 f(X))$.

3) Soit X une variable aléatoire de densité f de support I , intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b . On suppose que X admet une entropie différentielle.

- (a) Soit c un réel, et soit Y la variable aléatoire définie par $Y = c + X$.
 - i) Déterminer une densité de Y .
 - ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Y)$, et la déterminer en fonction de $h(X)$.
- (b) Soit α un réel strictement positif, et soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \alpha X$.
 - i) Déterminer une densité de Z .
 - ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Z)$, et la déterminer en fonction de $h(X)$.

4) On détermine dans cette question l'entropie différentielle de quelques variables aléatoires suivant des lois classiques.

- (a) Soit $a > 0$. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, a]$.
 - i) Donner une densité de X .
 - ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(X)$, et la déterminer.
 - iii) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $h(X) > 0$.

(b) On considère Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Montrer que Y admet une entropie différentielle et que $h(Y) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e)$.

(c) On considère Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Z)$ et la déterminer.

- (d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}$ ($\lambda > 0$).

- i) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
- ii) Soit W une variable aléatoire de densité f . Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(W)$ et la déterminer.

5) On dit qu'un couple (X, Y) de variables aléatoires est un couple gaussien centré si, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta Y$ est une variable de loi normale centrée, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite tels que $\alpha X + \beta Y$ a même loi que γZ . On considère un tel couple (X, Y) et on note σ^2 la variance de X . On suppose que $\sigma^2 > 0$.

- (a) Montrer que X suit une loi normale centrée.
- (b) Calculer $h(X)$.

(c) On suppose désormais que X et Y suivent la même loi normale centrée de variance σ^2 et on admet que les propriétés de l'espérance des variables discrètes se généralisent aux variables aléatoires quelconques.

- i) Montrer que $E(XY)$ existe.
- ii) Montrer de plus que pour tout réel λ , $\lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2) \geq 0$.
- iii) En déduire que $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.
- iv) On pose $\rho = E(XY)/\sigma^2$. Montrer que $\rho \in [-1, 1]$.
- v) Que vaut ρ si X et Y sont indépendantes?

- (d) On suppose $|\rho| < 1$. On appelle **entropie jointe** du couple (X, Y) le réel

$$h(X, Y) = \log_2(2\pi e\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}).$$

- i) A quelle condition $h(X, Y)$ est-elle nulle ?
 ii) L' **information mutuelle** de X et Y est définie par

$$I(X, Y) = h(X) + h(Y) - h(X, Y).$$

Calculer $I(X, Y)$.

- iii) Montrer que $I(X, Y) \geq 0$.
 iv) Quelle est la limite de $I(X, Y)$ quand ρ tend vers 1 ?

Deuxième partie : Généralités sur l'entropie des variables discrètes

Soit A un ensemble fini non vide. On dit que X est une variable aléatoire dont la loi est à support A , si X est à valeurs dans A et si pour tout $x \in A$, $P(X = x) > 0$.

6) Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel. On appelle **entropie** de X le réel

$$H(X) = - \sum_{k=0}^n P(X = k) \log_2 P(X = k).$$

- (a) On définit la fonction $g : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2 P(X = k)$ pour k élément de $\{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que $H(X) = -E(g(X))$.
 (b) Montrer que $H(X) \geq 0$.
 (c) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
 i) Calculer $H(X)$ en fonction de p . On note ψ la fonction qui, à p , associe $H(X)$.
 ii) Montrer que ψ est concave sur $]0, 1[$.
 iii) Déterminer la valeur p_0 où ψ est maximale.
 (d) On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0, 1, 2, 3\}$ avec les probabilités

$$P(X = 0) = 1/2; P(X = 1) = 1/4; P(X = 2) = P(X = 3) = 1/8.$$

Calculer $H(X)$.

7) On souhaite écrire une fonction en Scilab pour calculer l'entropie d'une variable aléatoire X dont le support de la loi est de la forme $A = \{0, 1, \dots, n\}$ où n est un entier naturel. On suppose que le vecteur P de Scilab est tel que pour tout k de A , $P(k+1) = P(X = k)$. Compléter la fonction ci-dessous d'argument P qui renvoie l'entropie de X , c'est-à-dire $-\sum_{k=0}^n P(X = k) \log_2 P(X = k)$.

```
function h = Entropie(P)
...
endfunction
```

Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `length(P)` qui donne le nombre d'éléments de P .

On souhaite maintenant démontrer quelques inégalités concernant l'entropie.

8) On commence par une inégalité générale, appelée **Inégalité de Jensen**.

(a) Soit $N \geq 2$. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose $P(X = x_i) = p_i$. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $p_i < 1$.

On désire démontrer par récurrence la propriété suivante

$\mathcal{P}(N)$: Pour toute φ fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, si X une variable aléatoire de loi à support $A \subset \mathbb{R}_+$ avec $\text{Card } A = N$, on a $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

(c) Soit $N \geq 3$. On suppose que $\mathcal{P}(N-1)$ est vérifiée. Soit X une variable aléatoire de loi à support $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose $P(X = x_i) = p_i$.

Pour i tel que $1 \leq i \leq N-1$, on pose $p'_i = \frac{p_i}{1 - p_N}$.

i) Montrer que $\sum_{i=1}^{N-1} p'_i = 1$ et $0 < p'_i < 1$ pour $1 \leq i \leq N-1$.

ii) Soit Y une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ telle que $P(Y = x_i) = p'_i$ pour $1 \leq i \leq N-1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{N-1} p'_i \varphi(x_i) \geq \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} p'_i x_i\right)$.

iii) Montrer que $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$.

(d) Montrer que si φ est concave sur $\mathbb{R}_+$, on a $E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))$.

9) Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On pose, pour k tel que $0 \leq k \leq n$, $p_k = P(X = k)$.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n p_k \log_2 \frac{1}{(n+1)p_k} \leq \log_2 \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{(n+1)p_k} = 0$.

(b) Montrer que $\sum_{k=0}^n p_k \log_2[(n+1)p_k] = \log_2(n+1) - H(X)$.

(c) Montrer que $H(X) \leq \log_2(n+1)$.

(d) On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$. Calculer $H(X)$.

10) Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On suppose en outre X et Y indépendantes.

(a) Montrer que $P(X = Y) = \sum_{k=0}^n (P(X = k))^2$.

(b) On pose $v(k) = P(X = k)$ pour tout k élément de $\{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$2^{E(\log_2 v(X))} \leq E(2^{\log_2 v(X)}) = E(v(X)).$$

(c) En déduire que $2^{-H(X)} \leq P(X = Y)$.

(d) Donner un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.

Troisième partie : Entropie jointe et information mutuelle de deux variables discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On appelle **entropie jointe** de X et Y le réel

$$H(X, Y) = - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n P([X = k] \cap [Y = j]) \log_2 P([X = k] \cap [Y = j]),$$

avec la convention $0 \log_2 0 = 0$.

11)

- (a) On définit la fonction $g : \{0, 1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en posant pour $(k, j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$

$$g(k, j) = \log_2 P([X = k] \cap [Y = j]).$$

Montrer que $H(X, Y) = -E(g(X, Y))$.

- (b) Montrer que $H(X, Y) = H(Y, X)$.
(c) Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on pose

$$H(Y/X = k) = - \sum_{j=0}^n P_{[X=k]}(Y = j) \log_2 P_{[X=k]}(Y = j).$$

On appelle **entropie conditionnelle** de Y sachant X le réel

$$H(Y/X) = \sum_{k=0}^n P(X = k) H(Y/X = k).$$

Montrer que $H(X, Y) = H(X) + H(Y/X)$.

- (d) Montrer que pour tout couple de variables aléatoires X et Y de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X).$$

12) On considère dans cette question deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, 2, 3\}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par le tableau suivant

$j \backslash k$	0	1	2	3
0	1/8	1/16	1/32	1/32
1	1/16	1/8	1/32	1/32
2	1/16	1/16	1/16	1/16
3	1/4	0	0	0

(on lit dans la k -ième colonne et la j -ième ligne la valeur de $P([X = k] \cap [Y = j])$).

- (a) Déterminer la loi de X et montrer que $H(X) = 7/4$.
(b) Déterminer la loi de Y et calculer $H(Y)$.
(c) Montrer que $H(X/Y) = 11/8$.
(d) Que vaut $H(Y/X)$?
(e) Calculer $H(X, Y)$.

13) Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On appelle **information mutuelle** de X et de Y le réel

$$I(X, Y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n P([X = k] \cap [Y = j]) \log_2 \frac{P([X = k] \cap [Y = j])}{P(X = k)P(Y = j)}.$$

- (a) Montrer que $I(X, Y) = I(Y, X)$.
(b) Montrer que $I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$.
(c) Montrer que $I(X, X) = H(X)$.
(d) Que vaut $I(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes?

14) Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On fixe $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq j \leq n$, on pose $p_j = \frac{P([X = k] \cap [Y = j])}{P(X = k)}$. On suppose que $p_j > 0$ pour tout $0 \leq j \leq n$ et on pose

$$x_j = \frac{P(X = k)P(Y = j)}{P([X = k] \cap [Y = j])}.$$

(a) Montrer que $\sum_{j=0}^n p_j = 1$.

(b) Soit Z_k une variable aléatoire de loi à support $\{x_0, \dots, x_n\}$ dont la loi est donnée par $P(Z_k = x_j) = p_j$ pour $0 \leq j \leq n$. Montrer que

$$E(\log_2 Z_k) \leq 0.$$

(c) En déduire que $I(X, Y) \geq 0$.

Le sujet

Le problème proposé concernait le concept d'entropie qui mesure le désordre résultant d'une répartition aléatoire. Trois parties — traitables de façon assez largement indépendante — étudiaient successivement: l'entropie différentielle associée à une loi à densité, l'entropie associée à une loi discrète et une majoration fondamentale résultant de l'inégalité de Jensen (dont une démonstration était proposée), et enfin le cas d'un couple de variables aléatoires discrètes et l'interprétation de leur entropie jointe comme information apportée par une variable sur l'autre variable.

Les attentes du jury

Le problème comportait peu de réelles difficultés même s'il était nécessaire de montrer un peu de ténacité pour ne pas se laisser impressionner dès le démarrage par une (fausse) impression de complexité de la notion d'entropie. La question 2), qui ramenait la fonction h à une simple espérance par le biais du théorème de transfert, était justement faite pour dissiper ce genre de peur auquel trop de candidats ont cependant succombé. Beaucoup de questions plutôt élémentaires ont aussi dérouté de nombreux élèves. Les déterminations de densités de la première partie ont par exemple été globalement très mal traitées, révélant souvent un manque de perception manifeste du concept de densité régulièrement confondue avec la fonction de répartition.

Trop de candidats semblent penser en outre que dans un couple de variables aléatoires (X,Y) , les deux composantes sont nécessairement indépendantes, ce qui rendait sans objet toute la question 5 sur les vecteurs gaussiens, ou les questions 13 et 14 sur l'information mutuelle. Mais le "clou" du sujet, sur lequel il faut tirer un signal d'alarme, est la collection proprement invraisemblable de perles concernant l'utilisation de la fonction logarithme (de base 2... ou non), qui révèle le trop peu de manipulations élémentaires des fonctions usuelles par les élèves depuis le lycée.

Remarques de correction

Dans l'ensemble les copies ont ainsi été plutôt décevantes mais le sujet en a néanmoins permis une répartition assez bonne, et les résultats sont assez conformes à ceux des années précédentes. Les copies se répartissent ainsi comme d'habitude entre les six catégories suivantes:

- Les très faibles
- Les faibles où un minimum de travail élémentaire était néanmoins fait
- Les copies moyennes où les candidats abordaient avec sérieux une grande partie des questions les plus simples
- Celles où quelques initiatives supplémentaires de bon aloi permettaient de répondre à des questions un peu plus élaborées
- Les bonnes copies où les candidats répondaient à une bonne proportion des questions
- Et enfin les très bonnes qui, si elles sont restées assez rares, n'en ont pas moins existé.

Conseils aux futurs candidats

Il faut répéter que le but de l'épreuve proposée ne peut être seulement d'étaler des « connaissances » plus ou moins solidement acquises mais aussi de montrer un peu de savoir-faire élémentaire, en acceptant avec confiance de se laisser porter par le sujet.

Comme signalé plus haut, il y avait très peu de questions vraiment subtiles et le passage d'une question à la suivante se faisait souvent de façon presque immédiate et tautologique (par exemple sous la forme d'une réécriture). Les candidats qui ont joué ce jeu avec sérieux et sans précipitation s'en sont en général bien sortis. Et il est clair que ce n'est pas sur les parties les plus sophistiquées du programme que l'effort de beaucoup de candidats plus fragiles doit porter, mais sur le fait de s'entraîner à progresser dans un tel enchaînement de questions qui forme la trame essentielle des problèmes donnés dans cette épreuve.