Corrigé ESSEC math II éco 2015

1 Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Définitions : $(a;b) \in \mathbb{N}^2$, $[\![a;b]\!] = \{k \,|k \in \mathbb{Z}\ ,\ a \leqslant k \leqslant b\}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels, I ensemble fini d'entiers naturels, $\min\limits_{i\in I}(x_i) = \min\{x_i \,|i \in I\}$

1. $\min\limits_{i\in[\![0;4]\!]} \dfrac{(-1)^i}{i+1} = \min\left\{1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}\right\} = -\dfrac{1}{2}$
2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.
   (a) $\forall (n;k) \in \mathbb{N}^2$,$u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n;n+k]\!]} x_i = \min\{x_j \,|j \in [\![n;n+k]\!]\} \geqslant u_n(k+1)$ car
   $\{x_j \,|j \in [\![n;n+k]\!]\} \subseteq \{x_j \,|j \in [\![n;n+k+1]\!]\}$
   donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (u_n(k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.
   (b) $(u_n(k))_{k\geqslant 0}$ est décroissante minorée par 0, donc elle converge . $\boxed{u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)}$
   (c) Soit $(n;k) \in \mathbb{N}^2$, $\{x_j \,|j \in [\![n+1;n+k+1]\!]\} \subseteq \{x_j \,|j \in [\![n;n+k+1]\!]\}$, donc
   $u_{n+1}(k) = \min\{x_j \,|j \in [\![n+1;n+k+1]\!]\} \geqslant \min\{x_j \,|j \in [\![n;n+k+1]\!]\} = u_n(k+1)$, donc
   $u_{n+1}(k) \geqslant u_n(k+1) \geqslant u_n$ car $(u_n(k))_{k\geqslant 0}$ est décroissante.
   $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(k) \geqslant u_n$, en passant à la limite $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante}}$.
   (d) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant croissante elle admet une limite (qui peut être $+\infty$).
   La **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ avec $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{k\in[\![n;+\infty[\![}(x_k)\right)$
3. $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ sont les suites réelles positives définies par :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
   (a) i. Cas de $(y_n)_{n\geqslant 0}$. On a $u_n(0) = 1 + (-1)^n = y_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = 0$, donc $u_n = 0$.
   ii. Cas de $(z_n)_{n\geqslant 0}$. On a $u_n(0) = z_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = 2$, donc $u_n = 2$.
   (b) $\liminf\limits_{n\to+\infty}(y_n) = 0$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty}(z_n) = 2$
4. (a) $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de réels positifs, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
   Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \{x_j \,|j \in [\![n;n+k]\!]\} = x_n$ donc $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ c'est à-dire $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.
   (b) $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ .
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\{x_j \,|j \in [\![n;n+k]\!]\} = x_{n+k}$, $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n+k} = \ell$
   donc $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n)$.
   (c) i. I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}^*$, et $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\alpha_i \in I$.
   Comme $\{\alpha_i \,|i \in [\![1;r]\!]\}$ est fini, il existe $j \in [\![1;r]\!]$ tel que $\alpha_j = \min\{\alpha_i \,|i \in [\![1;r]\!]\}$ c'est à dire que
   $\boxed{\text{si } \forall i \in [\![1;r]\!],\ \alpha_i \in I,\ I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\ , \text{ alors },\ \min\limits_{i\in[\![1;r]\!]} \alpha_i \in I}$
   ii. $\boxed{(x_n)_{n\geqslant 0} \text{ est une suite de réels positifs convergente vers } \ell \text{ réel positif}}$,
   $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ , se traduit par, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![N_\varepsilon;+\infty[\![$, $|x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   Pour $\varepsilon > 0$, on a $\forall n \in [\![N_\varepsilon;+\infty[\![$, $\ell - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant \ell + \varepsilon$ et donc $\ell - \varepsilon \leqslant \inf\limits_{k\in[\![n;+\infty[\![} x_k \leqslant \ell + \varepsilon$ et donc
   $\ell - \varepsilon \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n) \leqslant \ell + \varepsilon$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit que $\boxed{\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n) = \ell}$.
5. f est une fonction continue sur à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   (a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par : $\boxed{\forall h \geqslant 0, \quad \varphi_x(h) = \min\limits_{u\in[x,x+h]} f(u)}$.
   On notera que du fait que f est continue sur $[x;x+h]$, elle atteint son minimum sur $[x;x+h]$ (théorème).
   Si $0 \leqslant h \leqslant t$, $\{f(u) \,|u \in [x;x+h]\} \subseteq \{f(u) \,|j \in [x;x+t]\}$ donc
   $\min\{f(u) \,|u \in [x;x+h]\} \geqslant \min\{f(u) \,|u \in [x;x+t]\}$ soit $\varphi_x(h) \geqslant \varphi_x(t)$ d'où
   $\boxed{\varphi_x \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

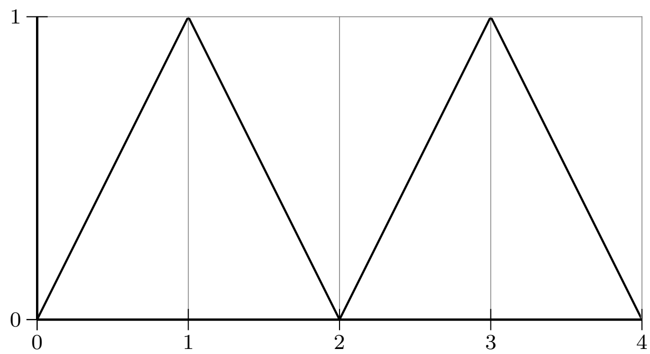
(b) φ_x est décroissante minorée par 0 donc admet une limite en $+\infty$ (théorème). $\boxed{\Phi_x = \lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_x(h)}$

(c) Si $0 \leqslant x \leqslant t$, on a $\{f(u)\,|u \in [x;+\infty[\} \supseteq \{f(u)\,|u \in [t;+\infty[\}$ donc
$\Phi_x = \lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_x(h) = \min\{f(u)\,|u \in [x;+\infty[\} \leqslant \min\{f(u)\,|u \in [t;+\infty[\} = \lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_t(h) = \Phi_t$
d'où $\boxed{x \mapsto \Phi_x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe car $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (théorème).
La limite inférieure de f est $\boxed{\liminf\limits_{x \to +\infty}(f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \min\{f(u)\,|u \in [x;+\infty[\}}$

(e) f est la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ appartient à } [0;1] \\ 2-x & \text{si } x \text{ appartient à } [1;2] \end{cases}$
et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x, (f est périodique de période 2).

i. Représentation graphique de f sur le segment $[0;4]$.



ii. Le minimum de f sur un intervalle de longueur une période 2, vaut 0 donc si $x \geqslant 0$ et $h \geqslant 2$, $\varphi_x(h) = 0$.

iii. $\Phi_x = \lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_x(h) = 0$ donc $0 = \lim\limits_{h \to +\infty} \Phi_x = \liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(f) f est une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on a les notations de 5a et 5b.

i. Soit $x \geqslant 0$ pour $h \geqslant 0$ positif, on a $f(x) \geqslant \min\{f(u)\,|u \in [x;x+h]\} = \varphi_x(h)$.

ii. En faisant tendre h vers $+\infty$, $f(x) \geqslant \lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_x(h) = \Phi_x$ donc
$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[\ ,\ f(x) \geqslant \Phi_x = \min\{f(u)\,|u \in [x;+\infty[\}}$.

iii. On suppose que $\ell = \liminf\limits_{x \to +\infty}(f(x)) > 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x = \ell > 0$. Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$, il existe $x_0 > 1$ tel que $\forall x \in [x_0;+\infty[, |\Phi_x - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x) \geqslant \Phi_x \geqslant \ell - \varepsilon = \varepsilon$.
$\boxed{\text{Si } \ell = \liminf\limits_{x \to +\infty}(f(x)) > 0 \text{ , pour } \varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0 \text{ , il existe } x_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0;+\infty[,\ f(x) \geqslant \Phi_x \geqslant \varepsilon}$.

(g) Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\boxed{\forall x \geqslant 0\ ,\ f(x) \geqslant g(x) \text{ et } \liminf\limits_{x \to +\infty}(g(x)) = \ell > 0}$.
$\min\{g(u)\,|u \in [x;+\infty[\} \leqslant \min\{f(u)\,|u \in [t;+\infty[\}$ et donc
$\ell = \liminf\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(\min\{g(u)\,|u \in [x;+\infty[\}) \leqslant \lim\limits_{x \to +\infty}(\min\{f(u)\,|u \in [t;+\infty[\}) = \liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$\boxed{\text{alors } \liminf\limits_{x \to +\infty}(f(x)) \geqslant \ell}$

2 Lois sous-exponentielles

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{A};P)$.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, $\overline{F}$ la queue de la fonction de répartition est définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout x positif.

6. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_X(n) &= P(X=n) \\ p_Y(n) &= P(Y=n) \\ p_{X+Y}(n) &= P(X+Y=n) \end{cases}$
.
$((X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ et un système complet d'évènements donc, en utilisant la formule des probabilités totales, pour $n \in \mathbb{N}$,
$p_{X+Y}(n) = P(X+Y=n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P\left((X+Y=n)\bigcap(X=k)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P\left((Y=n-k)\bigcap(X=k)\right)$
$\underset{X,Y \text{ indépendantes}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} P((Y=n-k))\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} P((Y=n-k))\,P(X=k)$ donc
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k)p_Y(n-k)}$.

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, densité respectives f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et continues à droite en 0, $X+Y$ admet une densité notée $f_X * f_Y$ définie par, $\forall x \geqslant 0$, $f_X * f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u)f_Y(x-u)du$. F_{X+Y} est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X+Y$.

7. $\lambda > 0$, X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ , f une densité et F la fonction de répartition. $\boxed{\forall x \geqslant 0 \text{ , } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$.

   (a) Pour $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt$ et $\boxed{\overline{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}}$

   (b) Soit $x \geqslant 0$, $(f * f)(x) = \int_0^x f_X(u)f_Y(x-u)du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda(x-u)}du = \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x du = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$

   (c) Pour $x \geqslant 0$, $F_{X+Y}(x) = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t}dt = \left[\lambda t\left(-e^{-\lambda t}\right)\right]_0^x - \int_0^x \lambda\left(-e^{-\lambda t}\right)dt = \left[\lambda t\left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^{-\lambda t}\right)\right]_0^x$
   $\boxed{\forall x \geqslant 0 \text{ , } F_{X+Y}(x) = 1 - (\lambda x + 1)\,e^{-\lambda x}}$

   (d) De (c) pour $x > 0$, $\overline{F}_{X+Y}(x) = (\lambda x + 1)\,e^{-\lambda x}$, $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$, $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{(\lambda x+1)\,e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda x + 1$ donc
   $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty}$.

8. X est une variable aléatoire positive, $F = F_X$.
   $\boxed{X \text{ est \textbf{à support illimité à droite} si pour tout } x \text{ positif, } \overline{F}(x) > 0}$
   Remarque : Du fait que $\overline{F}$ et décroissante à valeurs dans $[0;1]$, X n'est pas à support illimité à droite signifie qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in [a;+\infty[$, $0 = \overline{F}(a) \geqslant \overline{F}(x) \geqslant 0$, donc $\forall x \in [a;+\infty[$, $\overline{F}(x) = 0$.
   X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

   (a) On remarque que si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors , $a + b \geqslant \max(a;b)$ donc , pour $x > 0$,
   $(\max(X;Y) > x) \subseteq (X+Y > x)$ d'où $\overline{F_{X+Y}}(x) = P(X+Y > x) \geqslant P(\max(X;Y) > x)$ donc
   $\boxed{\forall x \geqslant 0 \text{ , } \overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant P(\max(X;Y) > x)}$.

   (b) $(\max(X;Y) \leqslant x) = (X \leqslant x)\bigcap(Y \leqslant x)$, et de l'indépendance de $X;Y$ on déduit que
   $P(\max(X;Y) \leqslant x) = P((X \leqslant x)\bigcap(Y \leqslant x)) = P(X \leqslant x)\,P(Y \leqslant x) = F^2(x)$ d'où
   $\boxed{P(\max(X;Y) > x) = 1 - F^2(x)}$.

   (c) Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{(1-F(x))\,(1+F(x))}{1-F(x)} = 1 + F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = 2}$

   (d) Pour $x \geqslant 0$ de (ab) on a $\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant P(\max(X;Y) > x) = 1 - F^2(x)$ donc
   $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant \dfrac{1-F^2(x)}{1-F(x)} = 1 + F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ de P1 (5g) on obtient $\boxed{\liminf_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)}\right) \geqslant 2}$.

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si , $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$, où,F_{X+Y} est la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positive X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
X et Y sont des variables aléatoires réelles positives indépendantes de même loi sous-exponentielle.

(a) Soit $x \geqslant 0$ comme $X;Y$ sont à valeurs positives, $(X > x) \subseteq (X + Y > x)$ donc
$(X + Y > x) \bigcap (X > x) = (X > x)$
$$P_{(X+Y>x)}(X > x) = \frac{P\left((X + Y > x) \bigcap (X > x)\right)}{P\left(X + Y > x\right)} = \frac{P\left(X > x\right)}{\overline{F}_{X+Y}(x)} = \frac{\overline{F}\left(x\right)}{\overline{F}_{X+Y}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \text{ , donc}$$
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_{(X+Y>x)}(X > x) = \frac{1}{2}}$$

(b) De 8(bc) on a $P(\max(X;Y) > x) = 1 - F^2(x)$ et $\dfrac{P(\max(X;Y) > x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{1 - F^2(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ donc de (a)
$$\frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X;Y) > x)} = \frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}\left(x\right)} \frac{\overline{F}(x)}{P(\max(X;Y) > x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\times\frac{1}{2} \text{ , d'où , } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X;Y) > x)} = 1}.$$

(c) $((\max(X;Y) \leqslant x) ; (\max(X;Y) > x))$ est un système complet d'évènements.
En utilisant la formule des probabilités totales on obtient
$P(X + Y > x) = P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right) + P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) > x)\right)$ or de $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$ on déduit que
$(\max(X;Y) > x) \subseteq (X + Y > x)$ donc $(X + Y > x) \cap (\max(X;Y) > x) = (\max(X;Y) > x)$ d'où
$$\boxed{P(X + Y > x) = P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right) + P(\max(X;Y) > x)}$$

(d) Pour $x \geqslant 0$, de (c) on a
$$\frac{P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right)}{P(\max(X;Y) > x)} = \frac{P(X + Y > x) - P(\max(X;Y) > x)}{P(\max(X;Y) > x)}$$
$$= \frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X;Y) > x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc , $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right)}{P(\max(X;Y) > x)} = 0}$.

(e) $P(X + Y > x) = P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right) + P(\max(X;Y) > x)$
$$= P(\max(X;Y) > x) \left(1 + \frac{P\left((X + Y > x) \cap (\max(X;Y) \leqslant x)\right)}{P(\max(X;Y) > x)}\right) \text{ donc}$$
$$\boxed{P(X + Y > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} P(\max(X;Y) > x)}$$

3 Problèmes de queues

f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et F est la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$,
$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x}dx = +\infty \text{ .}$$

10. X est une variable aléatoire de densité f. On suppose que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx = +\infty$.

Si X n'est pas à support illimité à droite il existe $x > 0$ tel que $\overline{F}\left(x\right) = 0$ de la positivité et de la décroissance de $\overline{F}$ on déduit que $\forall t \geqslant x$, $\overline{F}\left(t\right) = 0 = 1 - F\left(t\right)$. Comme f est continue on a $\forall t \in [x; +\infty[$, $0 = F'\left(t\right) = f\left(t\right)$ et donc$\forall \lambda > 0$,$\forall t \in [x; +\infty[$, $f(t)e^{\lambda t} = 0$ donc
$$\int_x^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}dt = 0 \text{ et donc } \int_1^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}dt = \int_1^x f(t)e^{\lambda t}dt < +\infty \text{ contredisant l'hypothèse.}$$
$\boxed{\text{Si la loi de } X \text{ est à queue lourde, elle est à support illimité à droite}}$.

11. Étude de quelques lois particulières :

(a) Si f est une densité de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ continue sur $]0;+\infty[$ alors pour $\lambda \in]0;\mu[$
$\forall x \in [1;+\infty[,\ f(x)\,e^{\lambda x} = \mu e^{-(\mu-\lambda)x}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(\mu-\lambda)x}dx = \frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx < +\infty$.

$\boxed{\text{Une loi exponentielle n'est pas à queue lourde.}}$

(b) $\boxed{f \text{ vérifie } f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \text{ si } x \text{ est positif ou nul et } f(x) = 0 \text{ si } x \text{ est strictement négatif}}$.

i. On a donc $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$, enfin f est nulle pour les valeurs négatives et pour $t > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^t = -\frac{1}{1+t} + 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

ii. $\lambda > 0$. Pour $x > 0$, $1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2} = e^{-2\ln(x)+\lambda x} = e^{\lambda x\left(1-\frac{2\ln(x)}{\lambda x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda x\left(1 - \frac{2\ln(x)}{\lambda x}\right) = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty.$
Donc il existe $x_0 > 1$, tel que $\forall x \geqslant x_0$, $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1.$

iii. Pour $x > x_0$, $\displaystyle\int_1^x f(t)e^{\lambda t}dt \geqslant \int_{x_0}^x f(t)e^{\lambda t}dt \geqslant \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{\text{la loi définie par } f \text{ est à queue lourde}}$.

(c) $\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et } X \text{ la variable aléatoire définie par } X = e^Z}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

i. $X_*(\Omega) \subseteq]0;+\infty[$. Soit $x \in]0;+\infty[$ on a
$F_X(x) = P(x \leqslant x) = P\left(e^Z \leqslant x\right) = P(Z \leqslant \ln(x)) = \Phi(\ln(x)).$
Pour $x \in]0;+\infty[$, soit $f(x) = F_X'(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}$.

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \text{ est une densité de } X}.$$

ii. Pour $\lambda > 0$ on a $\lambda x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x = \lambda x\left(1 - \dfrac{1}{2\lambda}\left(2\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ or
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln(x)\right) = 0}$

iii. Pour $x > 0$, $f(x)e^{\lambda x} = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}e^{\lambda x} = \exp\left(-\ln(x) - \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2 + \lambda x\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$ et car ii. , donc $\boxed{\text{il existe } x_0 \geqslant 1 \text{ , tel que , } \forall x \geqslant x_0,\quad f(x)e^{\lambda x} \geqslant 1}$.

iv. Pour $t > x_0$, $\displaystyle\int_1^x f(t)e^{\lambda t}dt \geqslant \int_{x_0}^x f(t)e^{\lambda t}dt \geqslant \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{\text{la loi de } X \text{ est à queue lourde}}$.

> X est une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition de X.
> $\forall x \in [0;+\infty[$, $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$, $R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, $F'(x) = f(x)$.

12. Pour $x > 0$, $R'(x) = -\dfrac{\overline{F}'(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)} = r(x)$, R et R' sont continues sur $]0;+\infty[$ continues à droite de 0,

$R(0) = -\ln\left(\overline{F}(0)\right) = -\ln(1) = 0$. On a donc $R(x) = R(x) - R(0) = \displaystyle\int_0^x R'(t)\,dt = \int_0^x r(t)\,dt.$

Or $R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$, $-R(x) = \ln\left(\overline{F}(x)\right)$, $\exp(-R(x)) = \overline{F}(x)$ donc

$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[\ ,\ \overline{F}(x) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^x r(y)dy\right)}$.

13. Ici $\boxed{\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{R(x)}{x}\right) = \ell > 0}$.

(a) Pour $x > 0$, $\dfrac{R(x)}{x} = \dfrac{-\ln\left(\overline{F}(x)\right)}{x}$ de 5(f)iii pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$ il existe $x_0 > 1$ tel que

$\forall x \in [x_0;+\infty[,\ \dfrac{-\ln\left(\overline{F}(x)\right)}{x} \geqslant \varepsilon$, $-\ln\left(\overline{F}(x)\right) \geqslant \varepsilon x$, $\ln\left(\overline{F}(x)\right) \leqslant -\varepsilon x$, $\overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon x}$.

Donc $\boxed{\exists x_0 \geqslant 1, \exists \varepsilon > 0\ ,\ \forall x \in [x_0;+\infty[\ ,\ \overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon x}}$.

(b) $\boxed{\lambda \in]0;\varepsilon[\ ,\ A > 0}$. On remarque que $\overline{F}$ est une primitive de $-f$ qui est continue. En intégrant par parties,

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x)dx = \left[e^{\lambda x}\left(-\overline{F}(x)\right)\right]_0^A - \int_0^A \lambda e^{\lambda x}\left(-\overline{F}(x)\right)dx = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda\int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)dx$$

donc, $\boxed{\displaystyle\int_0^A e^{\lambda x} f(x)dx = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda\int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)dx}$.

(c) Soit $A > x_0$, on a $\overline{F}(A) \leqslant e^{-\varepsilon A}$ et $0 \leqslant \overline{F}(A)e^{\lambda A} \leqslant e^{-\varepsilon A}e^{\lambda A} = e^{-(\varepsilon-\lambda)A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall x \in [x_0;+\infty[$, $0 \leqslant e^{\lambda x}\overline{F}(x) \leqslant e^{\lambda x}e^{-\varepsilon x} = e^{-(\varepsilon-\lambda)x}$ et comme $\varepsilon - \lambda > 0$,

$\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} e^{-(\varepsilon-\lambda)x}dx = \left[-\frac{e^{-(\varepsilon-\lambda)x}}{\varepsilon-\lambda}\right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{e^{-(\varepsilon-\lambda)x_0}}{\varepsilon-\lambda}$ donc $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} e^{\lambda x}\overline{F}(x)dx$ converge, ainsi que $\displaystyle\int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)dx$ qui

est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{\lambda x} f(x)dx \in \mathbb{R}$ d'où

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x)dx$ converge c'est à dire que

$\boxed{\text{la loi de } X \text{ n'est pas à queue lourde}}$.

14. Inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant l'espérance $E(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a : $P(Z > \alpha) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}E(Z)$.
$X \geqslant 0$, de support illimité à droite, où loi de X n'est pas à queue lourde.

(a) $X \geqslant 0$, $x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$ est continue en restriction à $[0;+\infty[$ donc admet une primitive sur $[0;+\infty[$

$\boxed{X \text{ n'est pas à queue lourde se traduit par il existe } \lambda > 0}$

$\boxed{\text{tel que}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx < +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}dx$ converge c'est à dire que $\boxed{c = E(e^{\lambda X}) < +\infty}$.

(b) Pour $x > 0$, en notant $Z = e^{\lambda X}$ on a ,

$\overline{F}(x) = P(X > x) = P\left(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}\right) = P\left(Z > e^{\lambda x}\right) \underset{\text{inégalité de Markov}}{\leqslant} \dfrac{E(Z)}{e^{\lambda x}} = ce^{-\lambda x}$.

$\boxed{\lambda > 0 \text{ étant défini en (a) on a, } \forall x > 0,\ \overline{F}(x) \leqslant ce^{-\lambda x}}$.

(c) Pour $x > 0$, $R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$ et $\overline{F}(x) \leqslant ce^{-\lambda x}$, $\ln\left(\overline{F}(x)\right) \leqslant \ln\left(ce^{-\lambda x}\right) = -\lambda x + \ln(c)$, $-\ln\left(\overline{F}(x)\right) \geqslant \lambda x - \ln(c)$

donc $\dfrac{R(x)}{x} = \dfrac{-\ln\left(\overline{F}(x)\right)}{x} \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et de P1.5.(g) on déduit que $\boxed{\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{R(x)}{x}\right) \geqslant \lambda > 0}$.

Remarque : $\boxed{\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{R(x)}{x}\right)=0 \text{ traduit que la loi de } X \text{ est à queue lourde}}$.

15. X est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. La loi de X possède une **queue longue** c'est à dire que $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>0$, $\forall x\in[A;+\infty[$, $\forall y\in[0;1]$, $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}-1\right|<\varepsilon$.

(a) Pour $y\in[0;1]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>0$, $\forall x\in[A;+\infty[$, $\forall y\in[0;1]$, $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}-1\right|=\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}\right|<\varepsilon$ est la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}=0$ donc $\boxed{\forall y\in[0;1]\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}=0}$

(b) Pour $y\in[0;1]$ $x\geqslant 0$,
$\dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)}=\dfrac{1-\overline{F}(x+y)-\big(1-\overline{F}(x)\big)}{\overline{F}(x)}=-\dfrac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$
donc $\boxed{\forall \text{y}\in[0;1]\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)}=0}$.

(c) Pour $y\in[0;1]$, $x\geqslant 0$, on a $(X>x+y)\bigcap(X>x)=(X>x+y)$ et donc avec (b) et
$P_{(X>x)}(X>x+y)=\dfrac{P\left(X>x+y\right)}{P\left(X>x\right)}=\dfrac{1-F\left(x+y\right)}{\overline{F}\left(x\right)}=\dfrac{\overline{F}\left(x\right)-\left(F\left(x+y\right)-F\left(x\right)\right)}{\overline{F}\left(x\right)}=1-\dfrac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)}$
on déduit que $\boxed{\forall y\in[0;1]\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}P_{(X>x)}(X>x+y)=1}$.

(d) De (c) , et de la continuité de ln sur $]0;+\infty[$, pour $x\geqslant 0$,
$R\left(x+1\right)-R\left(x\right)=-\ln\big(\overline{F}(x+1)\big)+\ln\big(\overline{F}(x)\big)=-\ln\left(\dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}\left(x\right)}\right)=-\ln\big(P_{(X>x)}(X>x+y)\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\ln\left(1\right)=0$
donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(R(x+1)-R(x))=0}$

16. $\boxed{F \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue}}$
se traduit par $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_\varepsilon>0$, $\forall x\in[A_\varepsilon;+\infty[$, $\forall y\in[0;1]$, $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}-1\right|<\varepsilon$ or
« $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}-1\right|<\varepsilon$ » $\iff$ « $\left|\overline{F}(x+y)-\overline{F}\left(x\right)\right|<\varepsilon\overline{F}\left(x\right)$ » $\iff$ « $\left(1-\varepsilon\right)\overline{F}\left(x\right)<\overline{F}(x+y)<\left(1+\varepsilon\right)\overline{F}\left(x\right)$ »

(a) $\boxed{\lambda>0}$.

i. Soit $\varepsilon=1-e^{-\frac{\lambda}{2}}>0$, donc $1-\varepsilon=e^{-\frac{\lambda}{2}}$, pour $x_0=A_\varepsilon$ on a $\boxed{\forall x\in[x_0;+\infty[\ ,\ \forall y\in[0;1]\ ,\ \overline{F}(x+y)\geqslant\overline{F}(x)e^{-\frac{\lambda}{2}}}$.
En particulier $\boxed{\forall x\in[x_0;+\infty[\ ,\ \overline{F}(x+1)\geqslant\overline{F}(x)e^{-\frac{\lambda}{2}}}$.

ii. Pour $n=0$ on a $\overline{F}(x_0+n)=\overline{F}\left(x_0\right)=\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}\geqslant\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}$.
Supposons que pour un entier naturel n on ait $\overline{F}(x_0+n)\geqslant\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}$.
de i. en prenant $x=x_0+n$ on a $\overline{F}(x_0+n+1)\geqslant\overline{F}(x_0+n)e^{-\frac{\lambda}{2}}\underset{\text{recurrence}}{\geqslant}\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}}=\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n+1}{2}}$
donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \overline{F}(x_0+n)\geqslant\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}}$.

iii. De ii. pour $n\in\mathbb{N}$ on a $\overline{F}(x_0+n)\geqslant\overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}$, $e^{\lambda\frac{n}{2}}\overline{F}(x_0+n)\geqslant\overline{F}\left(x_0\right)$ et en multipliant par $e^{\lambda x_0+\lambda\frac{n}{2}}>0$, on obtient $e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n)>\overline{F}\left(x_0\right)e^{\lambda x_0+\lambda\frac{n}{2}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n)=+\infty}$

(b) Pour $\lambda>0$, soit $g:x\mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$. De (a) iii. on a $\lim\limits_{n\to+\infty}g\left(x_0+n\right)=+\infty$ donc g n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'où
$\boxed{\forall\lambda>0\ ,\ x\mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x) \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}_+}$.

(c) Si $\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{R(x)}{x}\right)=\ell>0$ de 13(a) $\exists x_0\geqslant 1,\exists\varepsilon>0,\forall x\in[x_0;+\infty[,\overline{F}(x)\leqslant e^{-\varepsilon x}$. Pour $\lambda=\dfrac{\varepsilon}{2}$ on a $\forall x\in[x_0;+\infty[$, $0\leqslant e^{\lambda x}\overline{F}(x)\leqslant e^{-\frac{\varepsilon}{2}x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $x\mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ est bornée sur $[x_0;+\infty[$. D'autre part $x\mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ est continue donc bornée sur $[0;x_0]$ donc $x\mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ est bornée sur $[0;+\infty[$ contredisant ce qui a été établi en (b) .

Conclusion $\boxed{\liminf\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{R(x)}{x} \right) = 0}$.

(d) Si X est à queue longue alors de (c) on a $\liminf\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{R(x)}{x} \right) = 0$ ce qui avec 3 traduit que la loi de X est à queue lourde. $\boxed{\text{Si } X \text{ est une variable aléatoire de loi à queue longue cette loi est a une queue lourde}}$.