Chapitre 8

ESSEC MATHS 2. Corrigé

Partie I

1. Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments étant égal à $n!$, on a $\text{card}(\Omega) = n\,!$
2. Un élément de $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ est une permutation de E_n fixant (au moins) les éléments $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Sa restriction sur les $n-k$ autres éléments est une bijection sur ceux-ci et détermine entièrement la permutation. Donc $\text{Card}(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = (n-k)\,!$ On peut donc écrire :

$$s_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)\,! = \binom{n}{k} (n-k)\,! = \frac{n\,!}{k\,!}$$

3. a) En utilisant la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned} d &= \text{Card}(D_{n,0}) \\ &= \text{Card}(\bar{A}_1 \cap \ldots \bar{A}_n) \\ &= \text{Card}\left(\overline{\cup_{i=1}^{n} A_i}\right) \\ &= n\,! - \text{Card}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= n\,! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k \\ &= n\,! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} \\ &= n\,! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

   b) La donnée d'une permutation à exactement k points fixes équivaut au choix de k points fixes parmi les n éléments (il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles) et d'un dérangement sur les $n-k$ éléments restants). D'où par le principe multiplicatif :

$$d_k = \binom{n}{k} \text{Card}(D_{n-k,0})$$

c) Continuons le calcul précédent grâce à la question 3.a). Il vient :

$$\begin{aligned} d_k &= \binom{n}{k} \times (n-k)\,! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} \times \frac{n!}{(k+i)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} s_{k+i} \end{aligned}$$

4. a) En fait, il y a une erreur d'énoncé et il faut poser $d_0 = s_0 = 1$ et remarquer que la formule précédente reste valable pour $k = 0$. Reécrivons cette dernière égalité en changeant les indices et en utilisant la convention portant sur les coefficients binomiaux pour obtenir que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$d_{i-1} = \sum_{j=i}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} s_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} s_{j-1}$$

pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Cette expression permet de connaître la i-ième ligne de la matrice M donnant $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ en fonction de $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$. Son terme général a_{ij} est :

$$a_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}$$

Donc,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \ldots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & -\binom{3}{2} & \ldots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Rappel de cours.** Toute matrice d'ordre n est l'écriture matricielle dans la base canonique d'un *unique* endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, appelé endomorphisme *canoniquement associé*. Plus généralement, si M est une matrice d'ordre n et si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, il existe un *unique* endomorphisme de E dont l'écriture matricelle dans la base $\mathcal{B}$ est précisément M.

En vertu de ce résultat, il existe un unique endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont l'écriture dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ est M. La méthode permettant de reconstruire φ est à retenir : des colonnes de la matrice M, il découle que :

$$\begin{aligned}
\varphi(X^{j-1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} a_{i\,j}\, X^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{k+1-i} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \qquad \text{à l'aide de la convention} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-1-i} \binom{j-1}{i} X^{i} \qquad \text{en faisant le changement de variables } i' = i-1 \\
&= (X-1)^{j-1} \qquad \text{par la formule du binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$. Il est bien connu qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ. En effet, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$, alors par linéarité de φ, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, \varphi(X^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\ (X-1)^k \\
&= P(X-1)
\end{aligned}$$

On peut remarquer tout de suite que M est une matrice triangulaire sans aucun élément nul (« *zéro* ») sur la diagonale. Elle est donc inversible et l'endomorphisme φ associé l'est aussi nécessairement. Cependant, le sujet suggère une autre piste : si on note

$$\begin{array}{rccc}
\psi\ : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\
& P & \longmapsto & P(X+1)
\end{array}$$

On montre aisément que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi φ est inversible et d'inverse ψ.

c) Chercher la relation liant $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ à $(d_0, s_1, \ldots, d_n)$ revient à calculer M^{-1}, qui est l'écriture matricielle de ψ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
\psi(X^{j-1}) &= (X+1)^{j-1} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i \\
&= \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \qquad \text{en faisant le changement de variables } i' = i+1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}
\end{aligned}$$

pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$. Ceci détermine les vecteurs colonnes de M^{-1} et le coefficient à la i-ième ligne, j-ième colonne est $\binom{j-1}{i-1}$. On peut alors conclure que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$s_k = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k+i}{k} d_{k+i}$$

Commentaire. Le nombre $D_{n,0}$ est le nombre de « dérangements » de $[\![1, n]\!]$. Les relations liant les $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ aux $(d_0, s_1, \dots, d_n)$ sont les classiques formules d'inversion de Pascal (deviner pourquoi en observant M^{-1}).

Partie II

1. a) Il est clair que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a en utilisant **I.**3.b) :

$$P([X_n = k]) = \frac{\mathrm{Card}(D_{n,k})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{d_k}{n\,!} = \frac{1}{k\,!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i\,!}$$

b) Comme X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X_n = k]) = 1$, ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i\,!} = 1$$

Il nous reste à justifier soigneusement l'égalité entre les deux sommes. Une façon de procéder est de poser pour tout entiers $i, k \in [\![0, n]\!]$:

$$a_{k\,i} := \begin{cases} \dfrac{(-1)^i}{k\,!\,i\,!} & \text{dès que } i \leqslant n-k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i\,!} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{k\,i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{k\,i} \quad \text{(interversion classique sans contraintes)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{(-1)^i}{k\,!\,i\,!} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i\,!}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k\,!}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Pour une permutation arbitraire w de $[\![1,n]\!]$, $X_n(w)$ compte le nombre de coïncidences entre les numéros extérieur et intérieur de chaque produit, c'est-à-dire le nombre de points fixes de la permutation w. Donc,

$$\begin{aligned}
X_n(w) &= \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, w(i) = i\}\right) \\
&= \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, w \in A_i\}\right) \\
&= \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, 1_{A_i}(w) = 1\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(w) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right)(w)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité entre variables aléatoires :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$$

Remarquons que chaque variable aléatoire 1_{A_i} est une variable aléatoire de Bernoulli dont la probabilité de succès (qui est aussi son espérance) est, en utilisant **I.**2. :

$$\mathbf{P}([1_{A_i} = 1]) = \frac{\mathrm{Card}(A_i)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1)\,!}{n\,!} = \frac{1}{n}$$

Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$$

3. a) Rappelons quelques propriétés des fonctions caractéristiques : si A et B sont deux parties de Ω, alors $1_A \cdot 1_B = 1_{A\cap B}$. En particulier, on a $(1_A)^2 = 1_A$. En développant[1], on obtient :

$$X_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1_{A_i}\cdot 1_{A_j} = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} 1_{A_i\cap A_j}$$

[1]C'est un cas particulier de la formule dite du *multinôme*.

b) Remarquons comme précédemment que chaque $1_{A_i \cap A_j}$ est encore une variable aléatoire de Bernoulli dont la probabilité de succès (qui est aussi son espérance) est, en utilisant la question **I.**2. :

$$\mathbf{P}([1_{A_i \cap A_j} = 1]) = \frac{\mathrm{Card}(A_i \cap A_j)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{(n-2)\,!}{n\,!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Par linéarité de l'espérance et en remarquant qu'il y a $n(n-1)$ couples de E_n d'éléments distincts, on a

$$\mathbf{E}(X_n^2) = 1 + n(n-1)\,\frac{1}{n(n-1)} = 2$$

D'où par la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) - \mathbf{E}(X_n)^2 = 2 - 1^2 = 1$$

4. a) Au vu des résultats attendus, il semblerait que tous les produits mis en vente soient achetés. Information pas très réaliste (sauf si la somme B est trop alléchante !), que nous ferons notre dans la suite. Pour l'entreprise, le coût se résume aux rentrées d'argent (n produits vendus au prix unitaire de n Euros), auxquelles on retranche les sommes rendues aux gagnants (chaque éventuel acheteur gagnant reçoit B Euros et il y a X_n gagnants), d'où :

$$C_n = n\,b - B\,X_n$$

Le coût moyen de la campagne est évidemment l'espérance de X_n, qui, par linéarité, vaut :

$$\mathbf{E}(C_n) = n\,b - \mathbf{E}(X_n) = n\,b - B$$

et :

$$\sigma(C_n) = \sqrt{\mathbf{V}(X_n)} = \sqrt{0 + (-B)^2 \times 1} = B \qquad \text{car } B \text{ est positif.}$$

b) Question difficile qui n'appelle pas, à mon humble avis, de réponse manichéenne ! Pour lancer l'opération, le directeur général exigera vraisemblablement que n, b et B soient choisis afin le coût moyen de l'opération soit strictement positif et supérieur au risque encouru, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{E}(X_n) \geqslant \sigma(C_n) \quad \text{soit} \quad B \leqslant \frac{n\,b}{2}$$

Autrement dit, si le le nombre n de produits mis en vente est fixé ainsi que le prix unitaire b, le directeur demandera, dans cette logique, que la somme B remise à chaque acheteur gagnant n'excède pas $\dfrac{n\,b}{2}$ Euros.

5. Le gain (algébrique) G_n d'un acheteur acquérant un seul produit est soit $B - b$ Euros s'il y a coïncidence des numéros extérieur et intérieur de son produit, soit $-b$ Euros dans le cas contraîre. Donc

$$G_n = B\,Y_n - b$$

où Y_n est une variable aléatoire de Bernoulli. Son paramètre est la probabilité de gagner, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n}$. Par linéarité de l'espérance, le gain moyen de l'acheteur est donc :

$$\mathbf{E}(G_n) = \frac{B}{n} - b$$

Commentaire. *Il est vrai que la variable aléatoire X_n est par* **2.** *une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre $\frac{1}{n}$. Bien que la loi de X_n ne fasse pas intervenir de coefficients binomiaux, il est tentant de conclure que « X_n suit alors une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$ » . C'est oublier que ce résultat exige l'indépendance mutuelle des variables de Bernoulli $(1_{A_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Or, on a par exemple pour $i \neq j$:*

$$\mathbf{P}([1_{A_i} = 1]) \times \mathbf{P}([1_{A_i} = 1]) = \frac{1}{n^2} \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}\left([1_{A_i} = 1] \cap [1_{A_j} = 1]\right) = \frac{1}{n(n-1)}$$

ce qui montre que ce n'est pas le cas. D'ailleurs, ceux qui se seraient fourvoyés devraient en conclure que la variance de X_n vaut $\frac{n-1}{n}$ alors qu'elle vaut 1 par la question **3.a)***.*

Partie III

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Alors X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbf{P}([X = k]) = \frac{e^{-1}}{k\,!}$ pour tout entier naturel k. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1 équivaut à montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \mathbf{P}([X = k])$$

Rappelons que pour tout réel x, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n\,!}$ est convergente et de somme e^x.

Comme k est fixé et que n tend vers $+\infty$, on peut supposer que $n \geqslant k$ et par **II.1.a)** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i\,!} = \frac{1}{k\,!}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} = \frac{e^{-1}}{k\,!} = \mathbf{P}([X = k])$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Remarquons que la série dans le membre droit de l'égalité désirée est convergente puisque c'est le reste d'ordre $n-k$ de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n\,!}$ qui est convergente. D'après la question **II.1.a)**, on a :

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k\,!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{k\,!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

D'où le résultat.

3. Remarquons que la série $\sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!}$ converge puisque c'est le reste d'ordre $m-1$ de la série convergente $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i\,!}$. Il en est de même pour la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k}$ puisqu'elle est géométrique

de raison $\dfrac{1}{m+1}$ avec $\left|\dfrac{1}{m+1}\right| < 1$ puisque $m \geqslant 1$. La somme de cette série géométrique vaut :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m} \leqslant 2 \quad \text{car } m \geqslant 1.$$

Notons aussi, en nous inspirant de la remarque de l'énoncé, que pour tout entier naturel k, on a $(m+k)\,! = m\,!\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(m+j) \geqslant m\,!\prod_{j=1}^{k}(m+1) \geqslant m\,!\,(m+1)^k$. D'où

$$\sum_{i=m}^{+\infty}\frac{1}{i!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+k)!} \leqslant \frac{1}{m\,!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^k} = \frac{1}{m\,!}\,\frac{m+1}{m} \leqslant \frac{2}{m\,!}$$

4. En sommant l'égalité obtenue en **III.1** pour $k \in [\![0,n]\!]$, en utilisant l'égalité poly-triangulaire, la question **3.** et la formule du binôme, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left|P(X_n=k)-\frac{e^{-1}}{k\,!}\right| &= \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k\,!}\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i\,!}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{1}{i\,!} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}\,\frac{2}{(n-k+1)\,!} \\
&= \frac{2}{(n+1)\,!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} \\
&= \frac{2}{(n+1)}\left(2^{n+1}-1\right) \\
&\leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

5. Après être passée j fois ($j \geqslant 1$) dans la boucle, la valeur de x, initialement égale à 2, a été multipliée successivement par $\dfrac{2}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{4}, \ldots, \dfrac{2}{j+1}$. Elle vaut donc :

$$x = 2\cdot\prod_{k=2}^{j+1}\frac{2}{k} = \frac{2^{j+1}}{(j+1)\,!}$$

Remarquons aussi qu'à l'entrée de la $(j+1)$-ième boucle, la variable k vaut $j+2$.

6. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+2} < 1$$

ce qui prouve que la suite est strictement décroissante. Minorée par 0, elle converge vers une limite positive en vertu du théorème de convergence monotone.

Pour déterminer cette limite, il y a profusion des méthodes :
<u>première méthode :</u> comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est majoré par $1/2$. On en déduit par une récurrence immédiate que

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \cdot u_{n_0}$$

En vertu du théorème d'encadrement, il vient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Seconde méthode : on peut le faire manuellement en remarquant que pour $n \geqslant 4$, on a :

$$0 < u_n = \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \underbrace{\left(\frac{2}{k}\right)}_{<1/2} \leqslant \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

D'où la même conclusion en vertu du théorème d'encadrement.
Troisième méthode, qui est la plus courte : la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n\,!}$ étant convergente, son terme général tend vers 0, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n\,!} = 0$.

7. Si l'on suppose que la boucle a été éxécutée j fois, alors `x` vaut, à l'entrée de la boucle suivante, u_j. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, il existe un rang à partir duquel les termes de cette suite se trouvent dans l'intervalle $]0, \texttt{eps}/2]$. Dès que `x` est dans cet intervalle, la boucle `while` s'achève.
8. Ceci signifie en regardant le programme que $k = 14$. Une remarque faite plus haut montre donc que la boucle a été exécutée 12 fois. Attirons l'attention du lecteur sur une convention du langage Turbo-Pascal® :

Point Info syntaxique sur while. Toute boucle (`while condition P`) entamée s'achève ! Autrement dit, même si elle contient une instruction niant `P`, les instructions suivantes seront exécutées. Il n'y a pas sortie immédiate de la boucle `while`. Il n'y aura seulement pas de boucle supplémentaire.

Donc, si au cours de l'éxecution du programme, l'instruction `x :=x*(2/k) ;` donne à `x` une valeur $\leqslant \texttt{eps}/2$, l'instruction qui suit `k :=k+1 ;` est quand même exécutée et on sort de la boucle `while`.

Puisque la boucle a été 12 fois, la variable `x` contient u_{12} d'après **III.5.a)** avec $u_{11} > \texttt{eps}/2$ et $u_{12} \leqslant \texttt{eps}/2$. D'ailleurs, la calculatrice (dont l'utilisation est interdite) le confirme en donnant :

$$\left\{\begin{array}{ccr} \texttt{eps}/2 & \simeq & 5 \cdot 10^{-6} \\ u_{10} & \simeq & 51 \cdot 10^{-6} \\ u_{11} & \simeq & 8,5 \cdot 10^{-6} \\ u_{12} & \simeq & 1,31 \cdot 10^{-6} \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad u_{12} < \frac{\texttt{eps}}{2} < u_{11} < u_{10}$$

Partie IV

1. Comme précédemment, Y_ℓ compte le nombre de coïncidences observées sur les ℓ exemplaires achetés, ou plus précisément,

$$
\begin{aligned}
Y_n^\ell(w) &= \operatorname{Card}(\{i \in L \,/\, w(i) = i\}) \\
&= \operatorname{Card}(\{i \in L \,/\, w \in A_i\}) \\
&= \operatorname{Card}(\{i \in L \,/\, 1_{A_i}(w) = 1\}) \\
&= \sum_{i \in L} 1_{A_i}(w) \\
&= \left(\sum_{i \in L} 1_{A_i}\right)(w)
\end{aligned}
$$

D'où l'égalité entre variables aléatoires :

$$X_n = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}}$$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(Y_n^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{E}(1_{A_{j_i}}) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{n} = \frac{\ell}{n}$$

2. a) Il suffit de refaire le même calcul que celui exécuté en **II.3.a)**.

   b) Par un calcul analogue à **II.3.b)**, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_n^\ell) &= \mathbf{E}((Y_n^\ell)^2) - \mathbf{E}(Y_n^\ell)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{E}(1_{A_{j_i}}) + \sum_{1 \leqslant i \neq k \leqslant \ell} \mathbf{E}(1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}) - \mathbf{E}(Y_n^\ell)^2 \\
&= \frac{\ell}{n} + \ell(\ell - 1)\,\frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{\ell}{n}\right)^2 \\
&= \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

   Remarquons que si $\ell = n$, alors $Y_n^\ell = X_n$ et l'on observe que les formules précédentent donnent $\mathbf{E}(Y_n^\ell) = \mathbf{V}(Y_n^\ell) = 1$, ce qui est en accord avec les résultats obtenus en **II.2** et **II.3.b)**.

3. a) Comme précédemment, le gain G_n de l'acheteur est différence entre les sommes rapportées par les coïncidences observées : $B\,Y_n^\ell$ Euros, et les sommes déboursées pour l'achat des ℓ exemplaires : $b\,\ell$ Euros. Donc,

$$G_n = B\,Y_n^\ell - b\,\ell$$

   b) Par linéarité de l'espérance (dont on se lasse plus) et **IV.1.**, **IV.2.b)**, on a :

$$\mathbf{E}(G_n) = B\,\frac{\ell}{n} - b\,\ell = \ell\left(\frac{B}{n} - b\right)$$

   et

$$\sigma(G_n) = \sqrt{\mathbf{V}(G_n)} = \sqrt{B^2\,\mathbf{V}(Y_n^\ell)} = B\sqrt{\frac{\ell(n^2-2n+\ell)}{n^2(n-1)}}$$

c) Regardons $\mathbf{E}(G_n)$ et $\sigma(G_n)$ comme fonctions de ℓ. Afin de ne pas alourdir les écritures, notons les $\mathbf{E}$ et σ respectivement. Evidemment, la fonction de gain moyen $\mathbf{E}$ augmente avec ℓ mais σ aussi qui, rappelons-le, mesure la dispersion des gains au gain moyen. La prudence s'impose donc. Les calculs qui suivent sont familiers aux économistes et doivent faire partie du bagage culturel du lecteur. On trouve sans peine que :

$$\frac{\mathbf{E}'(\ell)}{\mathbf{E}(\ell)} = \frac{1}{\ell} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma'(\ell)}{\sigma(\ell)} = \frac{n^2-2n+2\ell}{2\ell(n^2-2n+\ell)}$$

appelées parfois *dérivées logarithmiques* de $\mathbf{E}$ et σ. D'où puisque $n \geqslant 2$:

$$\frac{\mathbf{E}'(\ell)}{\mathbf{E}(\ell)} - \frac{\sigma'(\ell)}{\sigma(\ell)} = \frac{1}{\ell} - \frac{n^2-2n+2\ell}{2\ell(n^2-2n+\ell)} = \frac{n(3n-4)}{2\ell(n^2-2n+\ell)} > 0$$

Pour ℓ fixé dans $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{\mathbf{E}(\ell+1)-\mathbf{E}(\ell)}{\mathbf{E}(\ell)} = \frac{\mathbf{E}'(\ell)}{\mathbf{E}(\ell)} = \frac{1}{\ell}$$

et l'approximation grossière :

$$\frac{\sigma(\ell+1)-\sigma(\ell)}{\sigma(\ell)} \simeq \frac{\sigma'(\ell)}{\sigma(\ell)} < \frac{1}{\ell}$$

Ainsi quand le nombre d'exemplaires varie d'une unité en passant de ℓ à $\ell+1$, l'accroissement relatif du gain moyen est de $\dfrac{1}{\ell}$ %, alors que l'accroissement relatif du risque est inférieur à ce pourcentage.

En conclusion, la dispersion relative croissant moins vite que le gain relatif, on pourrait estimer qu'il y a un interêt financier pour l'acheteur à acquérir plusieurs exemplaires.

***