E.S.C.P Eco III 2000 Maths 3

Exercice 1

Dans tout l'exercice, α désigne un paramètre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. **a)** Montrer que, quelque soit α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre 1.

b) On note $E_1(\alpha)$ le sous espace propre de ϕ_α associé à la valeur propre 1.
Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.

2. On considère les vecteurs

$$f_1 = (1, 1, -1) \qquad \text{et} \qquad f_2 = (1, 1, -2)$$

et on note F_1 le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par f_1 et f_2.

a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de F_1.

b) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F_1 appartient à F_1.

c) Soit $\widehat{\phi_\alpha}$ l'endomorphisme de F_1 induit par ϕ_α, c'est à dire vérifiant, pour tout vecteur V de F_1, $\widehat{\phi_\alpha}(V) = \phi_\alpha(V)$.
Donner la matrice de $\widehat{\phi_\alpha}$ dans la base (f_1, f_2) de F_1.

3. Montrer que, pour tout réel α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre $\alpha - 1$ et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de ϕ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

4. **a)** Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de ϕ_α dans cette base.

b) Pour quelles valeurs du paramètre α l'endomorphisme ϕ_α est-il diagonalisable ?

Exercice 2

I. Etude d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire

Etant donné un paramètre réel $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de réels qui vérifient, pour tout n positif, la relation

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. Montrer que l'on peut trouver deux réels r et s, avec $r < s$, tels que les suites $R = (r_n)_{n\geq 0}$ et $S = (s_n)_{n\geq 0}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Exprimer r et s en fonction de α et comparer $|r|$ et $|s|$.

2. Etant donné un élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{E}$ s'écrivant $U = aR + bS$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donner l'expression de a et b en fonction de u_0 et u_1.

3. On suppose, dans cette question, que l'on a $\quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
Soit $U = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que la suite U converge vers 0.

b) Si $u_1 - u_0 r$ n'est pas nul, montrer qu'il existe un indice n_0 tel que, pour $n > n_0$, u_n ne s'annule pas et garde un signe constant et que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln s$$

c) Montrer que si, au contraire, $u_1 - u_0 r$ est nul et si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas identiquement nulle, alors, pour tout entier n positif, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Quel équivalent peut-on donner, dans ce cas, de $\ln|u_n|$?

4. On suppose, dans cette question, que l'on a $\frac{1}{2} < \alpha$.
A quelle condition sur u_0 et u_1 l'élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{E}$ est-il une suite bornée ? Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des suites bornées forment un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ dont on précisera la dimension.

II. Etude d'une récurrence non linéaire

Soit β un réel strictement positif. On note $m = \min(1, \beta)$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max(1, \beta)$ le plus grand de ces deux nombres.
On considère la suite $V = (v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = \beta$ et, pour tout n positif, la relation

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Montrer, pour tout n strictement ppsitif, l'inégalité $m \leq v_n \leq 4M$.

2. Montrer que si la suite V admet une limite, cette limite est nécessairement égale à 4.

On se propose de montrer que, pour tout β strictement positif, la suite V admet effectivement pour limite 4.

3. Montrer, pour tout n positif, l'inégalité

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

4. On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$ et on considère la suite $U = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$ et les conditions initiales $u_0 = |v_1 - 4|$ et $u_1 = |v_2 - 4|$. Montrer que, pour tout n strictement positif, $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$.

5. En conclusion, montrer à l'aide des résultats de la première partie que la suite V converge vers 4.

6. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui lise un entier N et un réel β et qui affiche, en sortie, les N premiers termes de la suite V.

Exercice 3

Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant un certaine durée x, on s'intéresse à la probabilité qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée y. Pour cela on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité $\mathbf{P}$. L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

I. On suppose d'abord que X prend ses valeurs dans N^* et que, pour tout n de N^*, $P(X = n)$ n'est pas nul.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$p_n = \mathbf{P}(X = n), \qquad G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{p_n}{G_n}$$

1. Justifier les inégalités $0 < p_n < G_n \leq 1$ et $0 < Z_n < 1$.

2. Soit n un entier naturel. Etablir l'égalité $\mathbf{P}(X \geq n+1 \ / \ X \geq n) = 1 - Z_n$.

3. **a)** Montrer que la suite $\big(\mathbf{P}(X \geq n+1 \ / \ X \geq n)\big)_{n \geq 0}$ est constante si et seulement si la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est constante.

b) Vérifier que les conditions précédentes sont réalisées dans le cas où la loi de X est une loi géométrique.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante p appartenant à $]0, 1[$ telle que la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ soit la suite constante égale à p. Montrer par récurrence que X suit une loi géométrique.

4. Montrer que si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{ne0}$ est décroissante, alors la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est croissante et la suite $\big(\mathbf{P}(X \geq n+1 \ / \ X \geq n)\big)_{n \geq 0}$ est décroissante. (On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil dont X est la durée de vie.)

II. On suppose maintenant que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans R^{+*} et admet une densité f continue et strictement positive sur R^{+*}.

On pose, pour tout réel strictement positif x,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad Z(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$$

1. **a)** Si x et y sont des réels strictement positifs, on pose $H(x, y) = \dfrac{G(x+y)}{G(x)}$. Montrer que l'on a alors, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}(Z(x) - Z(x+y))$$

b) Montrer que la fonction $x \mapsto Z(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si, pour tout réel y strictement positif fixé, la fonction $x \mapsto \mathbf{P}(X \geq x + y \ / \ X \geq x)$ est une fonction décroissante.

2. **a)** Montrer que si la loi de X est une loi exponentielle, alors la fonction Z est constante.

b) Réciproquement, montrer que si Z est la fonction constante égale au réel strictement positif λ, alors la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} G(x)$ est constante. Quelle est alors la loi de X ?