

Exercice 1

On considère les matrices A, B, D, P, E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad \mathbf{a:} \quad (A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (1 - \alpha)x - 2y = 0 \\ -x + (2 - \alpha)y = 0 \end{cases} \iff (1) \begin{cases} [(1 - \alpha)(2 - \alpha) - 2]y = 0 \\ x = (2 - \alpha)y \end{cases}$$

$$[\dots] = \alpha^2 - 3\alpha = \alpha(\alpha - 3) \text{ donc}$$

$$- \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 3 \text{ alors } (1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ et n'est pas valeur propre}$$

$$- \text{ si } \alpha = 0 \text{ alors } (1) \iff x = 2y, \text{ les solutions ne sont pas toutes nulles.}$$

$$0 \text{ est donc valeur propre associé à } E_0 = \text{Vect}((2, 1))$$

$$((2, 1)) \text{ est génératrice de } E_0 \text{ et formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre.}$$

$$\text{C'est donc une base de } E_0$$

$$- \text{ si } \alpha = 3 \text{ alors } (1) \iff y = -x \text{ (pour avoir la matrice de passage } P \text{) et de même,}$$

$$3 \text{ est valeur propre associée à } E_3 = \text{Vect}((1, -1)) \text{ dont une base est } ((1, -1))$$

b: Comme A d'ordre 2 possède 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et la juxtaposition de vecteurs propres associés $((1, -1), (2, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2

$$\text{Conclusion : } \boxed{P \text{ est inversible et } A = P D P^{-1}}$$

$$\mathbf{c:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} L_2 + L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} L_1 - \frac{2}{3}L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } PEP^{-1} = B \text{ donc}$$

$$P^{-1}BP = E$$

2) Soit Φ l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\Phi(M) = AM - MB$.

a: Φ est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (produit et somme de matrice 2x2)

Pour tout M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réels :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)B \\ &= \alpha(AM - MB) + \beta(AN - NB) \\ &= \alpha\Phi(M) + \beta\Phi(N) \end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire et $\text{Conclusion : } \boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

b: $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = MB\} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM - MB = 0\} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \Phi(M) = 0\}$

$\text{Conclusion : } \boxed{K \text{ est le noyau de } \Phi}$.

c: On a

$$\begin{aligned} M \in K &\iff AM = MB \\ &\iff P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MPP^{-1}BP \\ &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E. \end{aligned}$$

d: On pose $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on a donc

$$DX = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } XE = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} DX = XE &\iff \begin{pmatrix} 3a & 3c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 & c = 0 \\ b = 0 & d = 0 \end{cases} \\ &\iff X = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de $DX = XE$ sont $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

e: Avec $X = P^{-1}MP$ on avait $M \in K \iff DX = XE$ donc

$M \in K \iff$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = P^{-1}MP = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit $M = aP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = aA$

Conclusion : $K = \text{Vect}(A)$.

f: On a $\dim(\ker(\Phi)) + \dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$

et comme (A) est génératrice de K et libre, $\dim(\ker(\Phi)) = 1$

Conclusion : $\dim(\text{Im}(\Phi)) = 3$

Exercice 2

1) **a:** h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$

En $+\infty$: $h(x) = x^4 - 4x + 1 = x^4(1 - 4/x^3 + 1/x^4) \rightarrow +\infty$

En $-\infty$: $h(x) = x^4 - 4x + 1 \rightarrow +\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^3 - 1$	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$

b: h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ donc bijective de $]-\infty, 1]$ sur $[h(1), \lim_{-\infty} h[= [-2, +\infty[$

De plus, $0 \in [-2, +\infty[$

Donc l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α sur $]-\infty, 1]$

de même, il existe une unique solution β sur $]1, +\infty[$

Conclusion : (E) a exactement deux solutions

c: On a $h(0) = 1 \geq 0 = h(\alpha) > -2 = h(1)$ et h est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ donc $0 \leq \alpha < 1$

On a déjà vu que $\beta > 1$

Conclusion : $\alpha \in [0; 1[$ et $\beta > 1$.

2) On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$.

On définit alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation, valable pour tout

entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{(u_n)^4 + 1}{4}$.

a: g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(x) = x$ donc g est strictement croissante sur $[0, 1]$

$$g(0) = \frac{1}{4} \text{ et } g(1) = \frac{1}{2}$$

b: Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0$ et $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{4}$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ alors, g étant strictement croissante sur $[0, 1]$ et les termes en étant éléments,

$$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1) \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

Conclusion : par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

c: Comme $\alpha^4 - 4\alpha + 1 = 0$ alors $\alpha^4 + 1 = 4\alpha$ et $g(\alpha) = \alpha$

La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ . Et comme $u_n \in [0, 1]$ pour tout n , alors $\ell \in [0, 1]$.

g est donc continue en ℓ et $g(\ell) = \ell$ et donc $\ell = \alpha$ ERREUR! α est une solution.. est-ce la bonne?

$$g(x) = x \iff x^4 + 1 = 4x \iff h(x) = 0$$

Donc $\ell = \alpha$ ou $\ell = \beta$ et comme $\ell \in [0, 1]$ alors β

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

d: On calcule les valeurs de u_i pour i de 1 à n . La valeur u_0 initialisant

Program suite ;

var n,i :integer ; u :real ;

begin

writeln('n?') ;readln(n) ;u :=0 ;

for i :=1 to n do u :=(u*u*u*u+1)/4 ;

writeln(u) ;

end.

3) Soit la fonction de deux variables $f : \begin{cases}]0, 1[\times]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 4xy - 4xy^2 \end{cases}$

a: f est de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^4 - 4x + 4y - 4y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x - 8xy$$

b: (x, y) est point critique $\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^4 - 4x + 4y - 4y^2 = 0 \\ 4x - 8xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 - 4x + 4y - 4y^2 = 0 \\ 4x(1 - 2y) = 0 \end{cases} \text{ et comme } x \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} x^4 - 4x + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} h(x) = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ et comme } x \in]0, 1[\text{ alors } h(x) = 0 \iff x = \alpha$$

Conclusion : le seul point critique de f est $A = \left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$

c: Les dérivées partielles secondes sont :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4x^3 - 4$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4 - 8y$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -8x$$

d: en $(\alpha, \frac{1}{2})$: $r = 4(\alpha^3 - 1) < 0$; $s = 0$ et $t = -8\alpha < 0$ donc $rt - s^2 > 0$

Donc, sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$, f présente un extremum local en A et comme $r < 0$,

Conclusion : f a un maximum local au point $A = \left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0, 1[$ et de $(n + 1)$ urnes numérotées de 0 à n .

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'urne n° k contient k boules vertes et $(n - k)$ boules rouges.

On considère l'expérience \mathcal{E} suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.

Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n°4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

- 1) **a:** X est le nombre de pils en n lancers indépendants, la probabilité de pile à chaque lancer étant p .

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ pour $k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Conclusion : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

- b:** On a alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1 - p) + n^2 p^2$

Conclusion : $E(X) = np(1 - p + np)$

- 2) **a:** Quand $X = 0$, on tire une boule de l'urne 0 qui contient 0 vertes et n rouges. On tirera donc une boule rouge et

Conclusion : $P_{(X=0)}(Y = 0) = 0$

et de même si $X = n$, il n'y a que des boules vertes et

Conclusion : $P_{(X=n)}(Y = 0) = 1$

Si X et Y sont indépendantes alors $P_{(X=0)}(Y = 0) = P(Y = 0) = P_{(X=n)}(Y = 0)$. ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : X et Y ne sont pas indépendantes

- b:** Quand $X = k$, on tire une boule de l'urne k qui contient k vertes et $n - k$ rouges. Ces n boules étant équiprobables

Conclusion : $P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}$.

- c:** $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc (probabilités totales)

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \sum_{k=0}^n P_{(X=k)}(Y = 1) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k P(X = k) \\ &= \frac{E(X)}{n} \text{ car } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned}$$

- d:** Comme les valeurs de Y sont $\{0, 1\}$ on a donc

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $E(Y) = p$

3) a: D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i \in Y(\Omega)} k i P(X = k \cap Y = i) \\ &= \sum_{k=0}^n (k P(X = k \cap Y = 1) + 0) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(X = k \cap Y = 1) + 0 \text{ pour } k = 0 \end{aligned}$$

avec $P(X = k \cap Y = 1) = P(X = k) P_{X=k}(Y = 1) = P(X = k) \frac{k}{n}$ donc

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^n k \frac{k}{n} P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) \end{aligned}$$

Conclusion :
$$E(XY) = \sum_{k=1}^n k P(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}.$$

b: On a alors

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n} \\ &= \frac{1}{n} V(X) \end{aligned}$$

Conclusion :
$$\text{cov}(X, Y) = p(1 - p)$$

1 Exercice 4

Soit θ un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = e^{\theta-x} & \text{si } x \geq \theta \\ f(x) = 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$

1) a: Pour tout réel $A \geq \theta$,

$$\int_{\theta}^A f(x) dx = \int_{\theta}^A e^{\theta-x} dx = \left[-e^{\theta-x} \right]_{\theta}^A = 1 - e^{\theta-A}$$

b: f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\theta\}$ et positive sur \mathbb{R}

Et comme $1 - e^{\theta-A} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$ alors $\int_{\theta}^{+\infty} f(x) dx = 1$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Conclusion : f est une densité.

On note X une variable aléatoire réelle de densité f .

2) La fonction F_X de répartition de X est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 \text{ si } x < \theta \\ &= \int_{-\infty}^{\theta} 0 dt + \int_{\theta}^x e^{\theta-t} dt = 1 - e^{\theta-x} \text{ si } x \geq \theta \end{aligned}$$

3) On considère la variable aléatoire $Y = X - \theta$.

a: La fonction de répartition F_Y de Y est définie par :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq y + \theta) \\ &= F_X(y + \theta) \end{aligned}$$

avec $y + \theta < \theta \iff y < 0$ donc

$$\begin{cases} F_Y(y) = 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ F_Y(y) = 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

b: On reconnaît dans cette fonction la fonction de répartition d'une variable loi $\varepsilon(1)$

Donc Y est à densité et $Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$ d'où $E(Y) = \frac{1}{1} = 1$ et $V(Y) = 1$

c: Et comme $X = Y + \theta$ alors X a une espérance et une variance et *Conclusion* : $E(X) = 1 + \theta$ et $V(X) = 1$

4) Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X .

On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)$.

a: on a

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k - 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E(X_k) - 1] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta = \theta \end{aligned}$$

Le biais de S_n comme estimateur de θ est donc $b = E(S_n) - \theta = 0$

Conclusion : S_n est un estimateur sans biais de θ .

b: On a

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n V(X_k - 1) \text{ par indépendance} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Conclusion : $r(S_n) = \frac{1}{n} + 0^2 = \frac{1}{n}$